20/09/2021

1. Números Complejos y Propiedades

En $\mathbb{R}$: $x^2+1=0$

$x^2 \geq 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$x^2+1>0, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$

$i=\sqrt{-1}$

$x^2=-1 \longrightarrow x=\pm\sqrt{-1}=\pm i$

Def. 1.1 Un número complejo es un par ordenado $z=(a,b)$, donde $a,b \in \mathbb{R}$.

El número a se denomina parte real de z y b parte imaginaria de z. Se escribe

$$Re(z)=a, \quad Im(z)=b.$$

El conjunto de los números complejos se denota por $\mathbb{C}$.

Def. 1.2 Sean $z_1=(a,b)$ y $z_2=(c,d)$.

$z_1=z_2 \iff a=c$ y $b=d$

$\iff Re(z_1)=Re(z_2)$ y $Im(z_1)=Im(z_2)$

En $\mathbb{C}$ se define las siguientes reglas de operación para la adición y multiplicación.

Adición: $z_1+z_2=(a,b)+(c,d)=(a+b,c+d)$

Multiplicación: $z_1 . z_2=(a,b).(c,d)=(ac-bd, ad+bc)$.

Ejemplo: Sean $z_1=(1,-2)$ y $z_2=(2,4)$. Entonces

$z_1+z_2=(1,-2)+(2,4)=(3,2)$

$z_1 . z_2=(1,-2).(2,4)=(2-(-8), 4+(-4))=(10,0)$.

Teorema 1.1 Sean z, z_1, z_2 y z_3 números complejos. Entonces satisface las siguientes propiedades.

a) $z_1+z_2=z_2+z_1$

b) $z_1+(z_2+z_3)=(z_1+z_2)+z_3$

c) $z_1 . z_2=z_2 . z_1$

d) $z_1 . (z_2 . z_3) = (z_1 . z_2) . z_3$

e) $z_1 . (z_2 + z_3) = z_1 . z_2 + z_1 . z_3$

f) El elemento neutro para la adición es el número complejo

$$z + (0,0) = (0,0) + z = z, \quad \forall z.$$

g) El elemento neutro para la multiplicación es el número complejo $(1,0)$, pues

$$z . (1,0) = z, \quad \forall z.$$

h) Todo número complejo $z = (a,b)$ tiene inverso aditivo $-z = (-a,-b)$ tal que

$$z + (-z) = (0,0)$$
$$(a,b) + (-a,-b) = (0,0)$$

i) Todo número complejo $z = (a,b) \neq (0,0)$ tiene inverso multiplicativo

$$z^{-1} = \left(\frac{a}{a^2+b^2}, \frac{-b}{a^2+b^2} \right)$$

tal que $z . z^{-1} = (1,0)$.

Un conjunto dotado de las operaciones adición y multiplicación cuyos elementos satisfacen las propiedades dadas en el teorema 1.1 se denomina cuerpo. Por tanto, el conjunto $\mathbb{C}$ es un cuerpo.

Observación: Los números complejos de la forma $(x,0)$ se comportan como los números reales, observemos que

$$(a,0) + (b,0) = (a+b,0)$$
$$(a,0) . (b,0) = (a.b,0)$$

Por esta razón, los números complejos $(x,0)$ se identifican con el número real x.

Unidad imaginaria: Es el número complejo $i = (0,1)$.

Entonces, para $b \in \mathbb{R}$,

$$b.i = (b,0) . (0,1) = (0,b) \qquad bi = (b,0)(0,1) =$$

de donde

$$z = (a,b) = (a,0) + (0,b) = a + bi$$

es decir,

$$\boxed{z = a + bi} \Longrightarrow \text{Forma binómica o algebraica de } z.$$

Reescribimos las reglas operacionales de la adición y multiplicación usando la forma binómica.

$$(a+bi) + (c+di) = (a+c) + (b+d)i$$

$$(a+bi)\cdot(c+di) = (ac-bd) + (ad+bc)i$$

Además, si $z = a+bi \neq 0$

$$z^{-1} = \frac{a}{a^2+b^2} + \frac{-b}{a^2+b^2}\, i$$

Además, se tiene

$i^0 = 1$

$i^1 = i$

$i^2 = -1$

$i^3 = i^2 \cdot i = -i$

$i^4 = i^2 \cdot i^2 = (-1)(-1) = 1$

$i^5 = i^4 \cdot i = i$

$\vdots$

$i^{4k} = 1$

$i^{4k+1} = i$

$i^{4k+2} = i^2 = -1$

$i^{4k+3} = i^3 = -i$

Generalizando, si $\alpha \in \mathbb{N}$, entonces existe $q \in \mathbb{N}$ tal que

$$\alpha = 4q + r, \quad 0 \leq r \leq 3.$$

Luego,

$$i^{\alpha} = i^{4q+r} = i^r$$

osea $i^{\alpha} = i^r$.

Ejemplo

$i^{15} = i^{4(3)+3} = i^3 = -i$; $\quad i^{100} = i^{4(25)} = 1$.

Obs. El conjunto de los números complejos no es ordenado.

En efecto: Si $\mathbb{C}$ fuera ordenado, entonces como $i \neq 0$ se tiene que $i>0$ ó $i<0$.

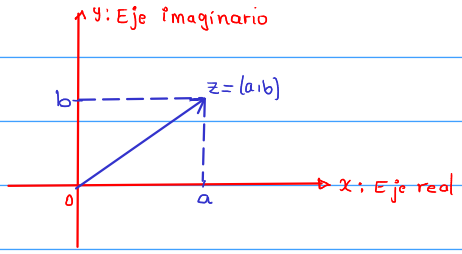
a) $i>0 \Rightarrow i^2>0 \Rightarrow -1>0$ (Falso)

b) $i<0 \Rightarrow (-i)>0 \Rightarrow (-i)^2>0 \Rightarrow -1>0$ (Falso).

Por tanto, $\mathbb{C}$ no puede ser ordenado.

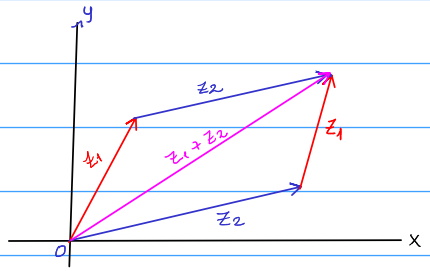
Representación geométrica

a) Número complejo $z=(a,b)$



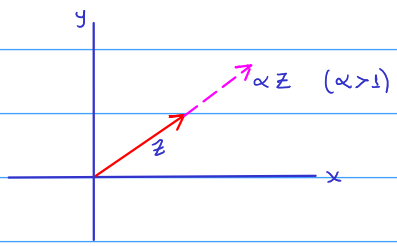
Plano complejo

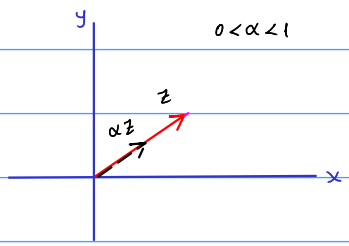
b) Para la adición: obedece a la Ley del paralelogramo



c) Para la multiplicación: $z=(a,b)$

I) $(\alpha,0).z = \alpha z = (\alpha a, \alpha b)$



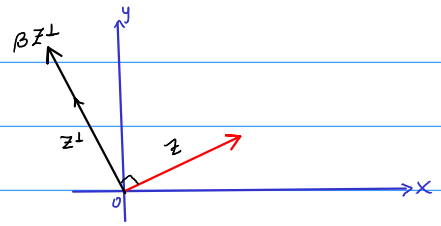


II) $(0,\beta).z = (0,\beta).(a,b) = (-\beta b, \beta a) = \beta(-b,a)$

$(0,\beta).(a,b) = \beta(-b,a)$

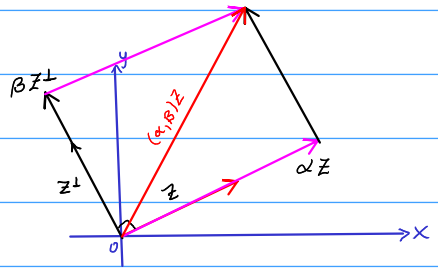
$z \qquad z^{\perp}$

$(0,\beta).z = \beta z^{\perp}$



III) $(\alpha,\beta)\cdot z = (\alpha,0)\,z + (0,\beta)\,z = \alpha z + \beta\cdot z^{\perp}$

$(\alpha,\beta)\cdot z = \alpha z + \beta\cdot z^{\perp}$



Def. 1.3 Sean $z_1 = a+bi$, $z_2 = c+di$. Se define

Sustracción: $z_1 - z_2 = z_1 + (-z_2)$

$z_1 - z_2 = (a-c) + (b-d)i$

División: $z_1 \div z_2 = \dfrac{z_1}{z} = z_1 \cdot z_2^{-1}$

Ejemplo: Calcule $\dfrac{2-3i}{1-3i}$.

Solución: $\dfrac{2-3i}{1-3i} = (2-3i)\cdot(1-3i)^{-1} = (2-3i)\cdot\left(\dfrac{1}{1+9} + \dfrac{-(-3)}{1+9}i\right) = (2-3i)\cdot\left(\dfrac{1}{10} + \dfrac{3}{10}i\right)$

$= \left(\dfrac{2}{10} + \dfrac{9}{10}\right) + \left(\dfrac{6}{10} - \dfrac{3}{10}i\right) =$

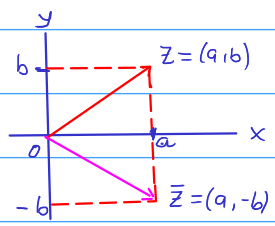
$= \dfrac{11}{10} + \dfrac{3}{10}i.$

Conjugado y Módulo

22/09/2021

Def. 1.4 El conjugado de un número complejo $z = a+ib$ es:

$$\bar{z} = a - ib = (a,-b)$$



Ejemplo: $z = 2+3i$, $\bar{z} = 2-3i$

$= (2,3)$ $\quad = (2,-3)$

Teorema 1.4 Sean $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$. Entonces

a) $\overline{z_1 \pm z_2} = \overline{z}_1 \pm \overline{z}_2$

b) $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z}_1 \cdot \overline{z}_2$ ✓

c) $\overline{\overline{z}} = z$ ✓

d) $\left(\overline{\frac{z_1}{z_2}}\right) = \frac{\overline{z}_1}{\overline{z}_2}, \quad z_2 \neq 0$

e) $Re(z) = \frac{z + \overline{z}}{2}, \quad Im(z) = \frac{z - \overline{z}}{2i}$

Dem.

a) Sup. que $z_1 = a + bi$ y $z_2 = c + di$. Entonces

$$z_1 + z_2 = (a + c) + (b + d)i \quad y$$

$$\overline{z_1 + z_2} = (a + c) - (b + d)i$$

$$= (a - bi) + (c - di)$$

$$= \overline{z}_1 + \overline{z}_2$$

Por tanto, $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z}_1 + \overline{z}_2$

d) Hagamos $z_3 = \frac{z_1}{z_2}$. Entonces $z_3 \cdot z_2 = z_1$.

Luego, $\overline{z_3 \cdot z_2} = \overline{z_1}$

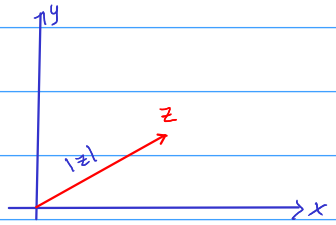
$$\overline{z}_3 \cdot \overline{z}_2 = \overline{z}_1$$

$$\overline{z}_3 = \frac{\overline{z}_1}{\overline{z}_2}$$

$$\left(\overline{\frac{z_1}{z_2}}\right) = \frac{\overline{z}_1}{\overline{z}_2}$$

Def. 1.5 El módulo de un número complejo $z = a + bi$ es el número real no negativo

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2} \geq 0$$



Geométricamente, $|z|$ es la longitud del radio vector que representa a z.

Teorema 1.3 Sean $z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$. Entonces

a) $Re(z) \leq |z|$, $Im(z) \leq |z|$

b) $|\bar{z}| = |z|$

c) $|z_1 . z_2| = |z_1| . |z_2|$

d) $z . \bar{z} = |z|^2$

e) $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$, $z_2 \neq 0$.

f) $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$

Dem.

f) $|z_1 + z_2|^2 = (z_1 + z_2) . \overline{(z_1 + z_2)}$ por d)

$= (z_1 + z_2) . (\bar{z}_1 + \bar{z}_2)$

$= z_1 . \bar{z}_1 + z_1 . \bar{z}_2 + z_2 . \bar{z}_1 + z_2 . \bar{z}_2$

$= |z_1|^2 + z_1 . \bar{z}_2 + \bar{z}_1 . \bar{\bar{z}}_2 + |z_2|^2$

$= |z_1|^2 + z_1 . \bar{z}_2 + \overline{z_1 . \bar{z}_2} + |z_2|^2$

$= |z_1|^2 + 2\, Re(z_1 . \bar{z}_2) + |z_2|^2$

$\leq |z_1|^2 + 2 |z_1 . \bar{z}_2| + |z_2|^2$

$= |z_1|^2 + 2 |z_1| . |z_2| + |z_2|^2$, $|\bar{z}_2| = |z_2|$

$= (|z_1| + |z_2|)^2$

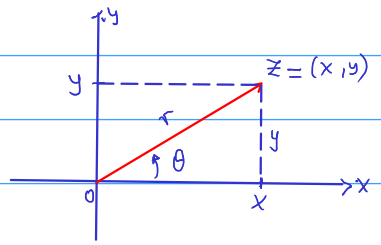
$|z_1 + z_2|^2 \leq (|z_1| + |z_2|)^2$

$\therefore \quad |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$.

2. Forma Polar o trigonométrica

23/09/2021

Sea $z = x + iy = (x, y)$ no nulo.



$r = |z|$

$\theta = \arg(z)$ (argumento de z.)

De la figura tenemos:

$$\cos\theta = \frac{x}{r}, \quad \operatorname{sen}\theta = \frac{y}{r}$$

de donde $x = r\cos\theta$, $y = r\operatorname{sen}(\theta)$

y así: $z = x + iy = r\cos\theta + i\, r\,\text{sen}\,\theta$

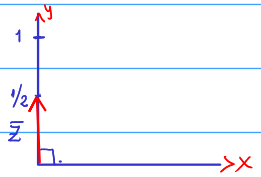
$$\boxed{z = r(\cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta)}$$ ⇒ Forma polar o trigonométrica de z.

Obs. Como $\cos\theta = \cos(\theta + 2\pi k)$ y $\text{sen}(\theta) = \text{sen}(\theta + 2k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$, se tiene que $\theta + 2\pi k$ también es un argumento de z, osea el argumento de un número complejo no es único.

El valor de θ tal que $\boxed{-\pi < \theta \leq \pi}$ se denomina argumento principal de z y se denota por $\text{Arg}(z)$.

Ejemplo 1. Halle $\arg(z)$ para $z = i/2, = (0, \frac{1}{2})$

Sol.



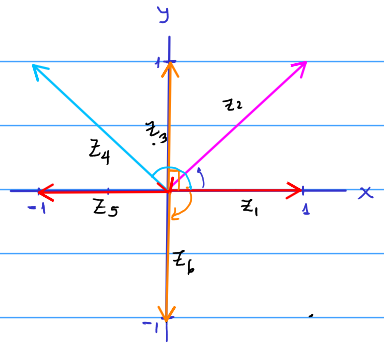
$$\arg(z) = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}. \text{ y}$$

$$\text{Arg}(z) = \frac{\pi}{2}.$$

Ejemplo 2. Determine $\text{Arg}(z)$ en los sgtes casos.

a) $z = 1$
b) $z = 1 + i$
c) i
d) $-1 + i$
e) -1
f) $-i$
g) $1 - i$

Sol



a) $z_1 = 1 = (1,0)$, $\text{Arg}(z_1) = 0$

b) $z_2 = 1 + i = (1,1)$, $\text{Arg}(z_2) = \frac{\pi}{4}$

c) $z_3 = i = (0,1)$, $\text{Arg}(z_3) = \frac{\pi}{2}$

d) $z_4 = -1 + i = (-1,1)$, $\text{Arg}(z_4) = \frac{3\pi}{4}$

e) $z_5 = -1 = (-1,0)$, $\text{Arg}(z_5) = \pi$

f) $z_6 = -i = (0,-1)$, $\text{Arg}(z_6) = -\frac{\pi}{2}$

g) $z_7 = 1 - i = (1,-1)$, $\text{Arg}(z_7) = -\frac{\pi}{4}$

Teorema 2.1 Sean $z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\,\text{sen}\,\theta_1)$ y $z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\,\text{sen}\,\theta_2)$.

Entonces

$$z_1 = z_2 \iff r_1 = r_2 \text{ y } \theta_1 = \theta_2 + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Dem.

$\Rightarrow$) Sup. que $z_1 = z_2$. $z_1 = (r_1 \cos\theta_1) + (r_1 \operatorname{sen}\theta_1)\, i$ $\quad z_2 = (r_2 \cos\theta_2) + (r_2 \operatorname{sen}\theta_2)\, i$

Como $z_1 = z_2$, entonces

$$r_1 \cos\theta_1 = r_2 \cos\theta_2 \quad y \quad r_1 \operatorname{sen}\theta_1 = r_2 \operatorname{sen}\theta_2 \qquad (1)$$

Elevando al cuadrado

$$r_1^2 \cos^2\theta_1 = r_2^2 \cos^2\theta_2$$

$$r_1^2 \operatorname{sen}^2\theta_1 = r_2^2 \operatorname{sen}^2\theta_2$$

$$r_1^2 = r_2^2$$

$$r_1 = r_2$$

Ahora, si $r_1 = r_2$, entonces de (1)

$$\cos\theta_1 = \cos\theta_2 \quad y \quad \operatorname{sen}\theta_1 = \operatorname{sen}\theta_2,$$

de donde $\theta_1 = \theta_2 + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

$\Leftarrow$) Ejercicio

Teorema 2.2 (Operaciones en forma polar) Sean $z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i \operatorname{sen}\theta_2)$ y $z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i \operatorname{sen}\theta_2)$. Entonces

a) $z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2 [\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \operatorname{sen}(\theta_1 + \theta_2)]$

$\arg(z_1 \cdot z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2)$

b) $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{r_1}{r_2}[\cos(\theta_1 - \theta_2) + i \operatorname{sen}(\theta_1 - \theta_2)]$, $z_2 \neq 0$

$\arg\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right) = \arg(z_1) - \arg(z_2)$.

c) $\forall n \in \mathbb{Z}_0^+$, $z^n = r^n [\cos(n\theta) + i \operatorname{sen}(n\theta)]$ (Teorema de Moivre)

donde $z = r(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)$.

Dem.

a) $z_1 \cdot z_2 = [r_1(\cos\theta_1 + i \operatorname{sen}\theta_1)] \cdot [r_2(\cos\theta_2 + i \operatorname{sen}\theta_2)]$

$= r_1 \cdot r_2 [(\cos\theta_1 \cdot \cos\theta_2 - \operatorname{sen}\theta_1 \cdot \operatorname{sen}\theta_2) + i(\cos\theta_1 \operatorname{sen}\theta_2 + \operatorname{sen}\theta_1 \cos\theta_2)]$

$\Rightarrow z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2 [\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \operatorname{sen}(\theta_1 + \theta_2)]$

c) Por inducción

- $n = 0$, $z^0 = r^0(\cos(0) + i \operatorname{sen}(0)) = 1$ se cumple.

. Supongamos que la propiedad se cumple para $n=m$. Es decir,

$$z^m = r^m\left(\cos(m\theta)+i\,\text{sen}(m\theta)\right) \text{ es verdadera} \checkmark$$

Ahora probemos que se cumple para $n=m+1$.

$$z^{m+1} = z^m \cdot z$$

$$= r^m(\cos(m\theta)+i\,\text{sen}(m\theta)).\, r(\cos\theta+i\,\text{sen}\theta)$$

$$= r^{m+1}\left[(\cos(m\theta).\cos\theta - \text{sen}(m\theta).\text{sen}\theta) + i(\cos(m\theta)\,\text{sen}\theta + \text{sen}(m\theta).\cos\theta)\right]$$

$$= r^{m+1}\left[\cos(m\theta+\theta)+i\,\text{sen}(m\theta+\theta)\right]$$

$$\Rightarrow \quad z^{m+1} = r^{m+1}\left[\cos(m+1)\theta + i\,\text{sen}(m+1)\theta\right].$$

Por tanto, la propiedad c) se cumple $\forall n \in \mathbb{Z}_0^+$.

Ejemplo 3. Expresar en forma polar los sgtes números complejos

a) $z = 4\sqrt{3}+4i$

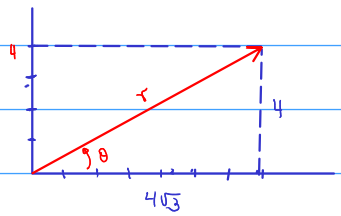
b) $z = 2i$

c) $z = \sqrt{2}-\sqrt{6}\,i$

Solución.

a) $z = 4\sqrt{3}+4i$

$$r = |z| = \sqrt{(4\sqrt{3})^2+4^2} = \sqrt{48+16} = 8 \Rightarrow r=8.$$



$$z = 4(\sqrt{3}+i)$$

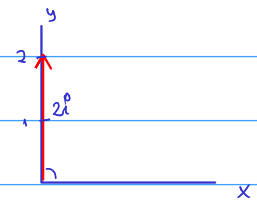
$$\cos\theta = \frac{4\sqrt{3}}{8} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \text{sen}\,\theta = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \theta = \frac{\pi}{6}.$$

$$z = 8\left(\cos(\pi/6)+i\,\text{sen}(\pi/6)\right) \checkmark$$

b) $z = 2i$

$r = 2$, $\theta = \pi/2$.



$$z = 2\left(\cos(\pi/2)+i\,\text{sen}(\pi/2)\right).$$

c) $z = \sqrt{2}-\sqrt{6}\,i$

$$z = 2\sqrt{2}\left(\cos(-\pi/3)+i\,\text{sen}(-\pi/3)\right).$$

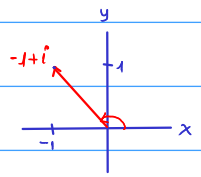
Hasta 12:52.

Ejemplo 4. Calcule $(-1+i)^{60}$

sol.

$|-1+i| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$

$\text{Arg}(-1+i) = \frac{3\pi}{4}$



Entonces

$$(-1+i)^{60} = \left[\sqrt{2}\left(\cos 3\pi/4 + i \operatorname{sen} 3\pi/4\right)\right]^{60}$$

$$= \sqrt{2}^{60}\left[\cos\left(60\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right) + i \operatorname{sen}\left(60\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right)\right]$$

$$= 2^{30}\left[\cos 45\pi + i \operatorname{sen} 45\pi\right]$$

$$= 2^{30}\left[-1\right]$$

$$(-1+i)^{60} = -2^{30}$$

Ejemplo 5.