Métodos Matemáticos de la Física II:
Ecuaciones Diferenciales y Funciones Especiales

Manuel Calixto Molina ©

Septiembre 2016

Índice general

I Ecuaciones Diferenciales Ordinarias (EDOs) 1

1. Ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden 3
- 1.1. Generalidades sobre EDOs: existencia, unicidad y sensibilidad 4
- 1.2. Separación de variables 7
- 1.3. Ecuaciones lineales 13
  - 1.3.1. Método de variación de la constante 13
  - 1.3.2. Método de el factor integrante 14
- 1.4. Ecuación exacta. Factores integrantes 19
- 1.5. Ecuaciones homogéneas 20
- 1.6. Cambio de variable 21
  - 1.6.1. Ecuación de Bernoulli 22
  - 1.6.2. Ecuación de Riccati 23

2. Sistemas de ecuaciones y ecuaciones lineales de orden superior 25
- 2.1. Generalidades y estructura del espacio de soluciones 26
  - 2.1.1. Problemas de: valores iniciales (PVI) y valores en la frontera (PVF) 27
  - 2.1.2. Ecuaciones homogéneas. Sistema fundamental de soluciones 28
  - 2.1.3. Ecuaciones no homogéneas. Variación de las constantes 32
- 2.2. EDOs lineales con coeficientes constantes 35
  - 2.2.1. EDOs homogéneas con coeficientes constantes 35
  - 2.2.2. EDOs no homogéneas con coeficientes constantes 37
- 2.3. PVI: Vibraciones mecánicas y eléctricas 41
  - 2.3.1. Oscilador armónico simple 44
  - 2.3.2. Oscilador armónico amortiguado 45
  - 2.3.3. Oscilador armónico forzado: pulsaciones y resonancia pura 47
  - 2.3.4. Oscilador armónico amortiguado y forzado: factor de amplificación . 50
  - 2.3.5. Analogías eléctricas. Leyes de Kirchhoff 52
- 2.4. PVF: Flexión y pandeo en vigas 53
  - 2.4.1. Flexión en vigas: curva elástica y flecha de flexión 53
  - 2.4.2. Pandeo en vigas: carga de Euler y modos de desviación 60
  - 2.4.3. Cuerda giratoria 63
- 2.5. Sistemas de EDOs lineales con coeficientes constantes: generalidades 64
  - 2.5.1. Métodos de resolución 64

2.5.2. Sistemas de primer orden autónomos. Puntos de equilibrio. Tipos . 67
2.6. Sistemas de EDOs lineales con coeficientes constantes: aplicaciones físicas . 71
2.6.1. Oscilaciones acopladas: cuerda vibrante discreta 71
2.6.2. Transformador eléctrico 75
2.6.3. Mezclas múltiples 76
2.6.4. Procesos de difusión 79
2.6.5. Modelo de Lotka-Volterra: dos especies en competencia 83

3. Resolución de ecuaciones diferenciales mediante series de potencias 85
3.1. Soluciones en torno a puntos ordinarios 86
3.1.1. Repaso de series de potencias 86
3.1.2. Soluciones en serie de potencias 87
3.2. Soluciones en torno a puntos singulares 90

II Funciones Especiales 95

4. Funciones especiales elementales 97
4.1. Ecuación y funciones de Hermite 98
4.2. Ecuación y funciones de Laguerre 99
4.3. Ecuación y funciones de Jacobi 99
4.3.1. Ecuación y funciones de Legendre 99
4.3.2. Ecuación y funciones de Chebyshev 100
4.3.3. Ecuación y funciones de Gegenbauer 101

5. Funciones hipergeométricas y funciones de Bessel 103
5.1. Ecuación y funciones hipergeométricas 104
5.1.1. Representación de funciones especiales como hipergeométricas . . . 105
5.2. Ecuación y funciones de Bessel 106
5.2.1. Serie de Fourier-Bessel 109

III Ecuaciones en Derivadas Parciales (EDPs) 111

6. Método de separación de variables 113
6.1. Introducción a las EDPs 114
6.2. Método de separación de variables 114
6.3. Series de Fourier 116
6.3.1. Propiedades de ortogonalidad de los senoides 116
6.3.2. Cálculo de coeficientes de Fourier 117
6.3.3. Existencia y convergencia del desarrollo de Fourier 120
6.3.4. Forma compleja de la serie de Fourier 121

7. Las ecuaciones de ondas, del calor y de Laplace **123**
7.1. Ecuación de ondas: cuerdas, vigas y membranas vibrantes 124
7.1.1. Ecuación de las oscilaciones verticales de una cuerda 124
7.1.2. Oscilaciones verticales de una viga: vibráfonos 128
7.1.3. Vibraciones radiales de un tambor y ecuación de Bessel 129
7.1.4. Ondas esféricas y polinomios de Legendre 130
7.2. Ecuación de la difusión del calor 130
7.2.1. Formulación del problema básico con condiciones de contorno . . . 130
7.2.2. Temperatura estacionaria en un círculo: ecuación de Cauchy-Euler . 133
7.2.3. Temperatura estacionaria en una esfera: Ecuación de Legendre . . . 135
7.3. Ecuación de Laplace 136

8. Introducción a los problemas de Sturm-Liouville **137**

IV Apéndices **139**

A. Demostración del Teorema de Picard **141**

B. Método de los coeficientes indeterminados **145**

V Biliografía **149**

Parte I

Ecuaciones Diferenciales Ordinarias (EDOs)

Capítulo 1

Ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden. Métodos de integración

1.1. Generalidades sobre EDOs: existencia, unicidad y sensibilidad

Comenzaremos introduciendo algo de notación y terminología. Una Ecuación Diferencial Ordinaria (EDO) de n-ésimo orden puede escribirse simbólicamente como:

$$F(t, x, x', x'', \ldots, x^{(n)}) = 0,$$

donde t es la variable independiente, $x(t)$ es la variable dependiente o función incógnita, y $x' = \dot{x} = \frac{dx}{dt}, x'' = \ddot{x} = \frac{d^2x}{dt^2}, \ldots, x^{(n)}(t) = \frac{d^nx}{dt^n}$ son sus derivadas hasta orden n. Usualmente (principalmente en problemas de valores iniciales) estaremos pensando en la variable independiente t como "tiempo de evolución", y en la variable dependiente $x(t)$ como la "posición de un objeto" o la "cantidad de una determinada magnitud" en el instante t. Para sistemas dinámicos es costumbre denotar también por $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$ a la primera derivada ("velocidad, tasa de variación", etc) y por $\ddot{x} = \frac{d^2x}{dt^2}$ a la segunda derivada ("aceleración"). En otras ocasiones (usulamente en problemas con valores en la frontera) denotaremos por $y(x), y'(x), \ldots, y^{(n)}(x)$ a la variable dependiente y sus derivadas hasta orden n, siendo ahora x la variable independiente (usulamente "posición"). Nosotros usaremos cualquiera de estas notaciones segun convenga. El calificativo de "ordinaria" para este tipo de ecuaciones hace referencia a que solo existe una única variable independiente t. En el caso en que la función incógnita $y(x, t)$ dependa de más de una variable, en este caso dos (x, t), y la ecuación diferencial involucre tanto derivadas parciales en t, por ejemplo $\frac{\partial y(x,t)}{\partial t}$, como derivadas parciales en x, por ejemplo $\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2}$, entonces hablaremos de Ecuaciones en Derivadas Parciales, que serán objeto de estudio más adelante, en la Parte III de este libro.

Si $F(t, x, x', x'', \ldots, x^{(n)}) = 0$ se puede resolver respecto a la n-ésima derivada, entonces escribiremos:

$$x^{(n)} = f(t, x, x', x'', \ldots, x^{(n-1)}). \tag{1.1}$$

Para EDOs de primer orden tendremos simplemente

$$x'(t) = f(t, x).$$

En esta memoria estudiaremos sólo las EDOs que se pueden resolver respecto a la derivada del orden más alto. Esta ecuación puede escribirse también como un sistema de n EDOs de primer orden (solo aparecen derivadas primeras) acopladas

$$\left.\begin{array}{rcl} z_0' &=& z_1, \\ z_1' &=& z_2, \\ &\vdots& \\ z_{n-1}' &=& f(t, \vec{z}) \end{array}\right\} \longrightarrow \vec{z}' = \vec{f}(t, \vec{z}), \tag{1.2}$$

donde se ha hecho la siguiente identificación:

$$\vec{z} = (z_0, z_1, \ldots, z_{n-1}) = (x, x', \ldots, x^{(n-1)}), \quad \vec{f}(t, \vec{z}) = (z_1, z_2, \ldots, z_{n-1}, f(t, \vec{z})).$$

La aplicación que a cada solución $x(t)$ de (1.1) le hace corresponder el vector $\vec{z}(t) = (x(t), x'(t), \ldots, x^{(n-1)}(t))$ establece una correspondencia entre los espacios de soluciones de (1.1) y de (1.2). Esto se hace habitualmente en Mecánica cuando se transforma la ecuación de Newton (orden dos)

$$mx'' = F(t, x, x') \Leftrightarrow \left.\begin{array}{rcl} mv' & = & F(t, x, v), \\ x' & = & v, \end{array}\right\}$$

en dos ecuaciones de orden uno que involucran una nueva función incógnita $v = x'$ (la velocidad).

Esta traducción de una EDO de orden n a un sistema equivalente de n EDOs de orden 1 resulta útil, más que desde un punto de vista práctico, desde una perspectiva puramente teórica. Haremos uso extensivo de esta correspondencia entre ambos espacios de soluciones; en particular, con vistas a la demostración de teoremas de existencia y unicidad en el Apéndice A y también en el siguiente Capítulo.

En los denominados "problemas de valores iniciales" (por contraposición a los "problemas con condiciones en la frontera", véase más adelante), la condición (1.1) sobre la función incógnita x y sus derivadas se ve suplementada por un conjunto de *condiciones iniciales*:

$$x(t_0) = x_0, x'(t_0) = x'_0, \ldots, x^{(n-1)}(t_0) = x_0^{(n-1)}, \tag{1.3}$$

en un "instante inicial" t_0. Un problema con condiciones iniciales puede: 1) no tener solución, 2) tener solución única o 3) tener muchas soluciones. Por ejemplo, el problema

$$x^2 + t^2 x' = 0, x(0) = 0 \tag{1.4}$$

tiene infinitas soluciones: $x = 0, x = -t$ y $x = t/(ct - 1)$, con c arbitrario. Seguidamente damos un teorema que establece condiciones de existencia y unicidad de soluciones para un problema de valores iniciales.

Teorema 1.1.1. (Picard) *Si en la ecuación (1.1) la función $f(t, x, x', x'', \ldots, x^{(n-1)})$ y sus derivadas parciales $\partial_x f, \partial_{x'} f, \ldots, \partial_{x^{(n-1)}} f$ son continuas en un cierto dominio $\Omega = \mathcal{E}_h(t_0) \times B_r(\vec{z}_0)$, donde $\mathcal{E}_h(t_0) = [t_0 - h, t_0 + h]$ y $B_r(\vec{z}_0) \subset \mathbb{R}^n$ es la bola cerrada de radio r y centro $\vec{z}_0 = (x_0, x'_0, \ldots, x_0^{(n-1)})$, existe una solución única $x = x(t)$ de la ecuación (1.1) que satisface las condiciones:*

$$x(t_0) = x_0, x'(t_0) = x'_0, \ldots, x^{(n-1)}(t_0) = x_0^{(n-1)}, \tag{1.5}$$

definida en el intervalo $\mathcal{E}_a(t_0)$, donde $a \leq \min\{h, r/M\}$ y $M = \sup\{\|\vec{f}(t, \vec{z})\| : (t, \vec{z}) \in \Omega\}$.

Las condiciones (1.5) se llaman *condiciones iniciales*, y el problema se denomina *problema de valor inicial o de Cauchy*, por contraposición al *problema de valor en la frontera* (véase más adelante). Para ecuaciones de orden 1, como las que estufiaremos este Capítulo, el teorema de existencia y unicidad adopta la forma más simple:

Teorema 1.1.2. (Picard EDOs orden 1) *Si en la ecuación $x'(t) = f(t,x)$ la función $f(t,x)$ y su derivada parcial $\frac{\partial f(t,x)}{\partial x}$ son continuas en un rectángulo $R = [a,b]\times[c,d]$ cerrado del plano $t-x$ que contiene al punto (t_0,x_0) (condición inicial), entonces existe un cierto intervalo abiero $I_0 = (t_0-h, t_0+h), h>0$, centrado en t_0 y contenido en R y una función única $x = x(t)$ definida en I_0 que representa una solución de $x'(t) = f(t,x)$ y satisface la condición inicial $x(t_0) = x_0$.*

Estas condiciones son *suficientes*, pero no *necesarias*. La condición de que $f(t,x)$ sea continua es equivalente a que x' sea continua (que x no tenga "picos"), y tiene que ver con la "existencia", mientras que la condición de que $\frac{\partial f(t,x)}{\partial x}$ sea continua tiene que ver con la "unicidad". Por ejemplo, para la EDO $x' = 2t\sqrt{x}$ con condición inicial $x(0) = x_0 = 0$ existen dos soluciones distintas (compruébese): $x_1(t) = 0, \forall t$ y $x_2(t) = t^4/4$. Esto se debe a que $\frac{\partial f(t,x)}{\partial x} = \frac{t}{\sqrt{x}}$, que *no es continua* en $x = x_0 = 0$.

Introduzcamos ahora la noción de solución general de una EDO de n-ésimo orden.

Definición 1.1.3. Se llama *solución general* de una EDO de n-ésimo orden como (1.1) a una función (familia n-paramétrica)

$$x = \varphi(t, c_1, c_2, \ldots, c_n),$$

que depende de n constantes arbitrarias $c_1, c_2, \ldots, c_n$ ("constantes de integración") de modo que:

a) satisfaga la ecuación (1.1) cualesquiera que sean los valores de las constantes $c_1, c_2, \ldots, c_n$;

b) para las condiciones iniciales (1.5) se pueden elegir las constantes $c_1, c_2, \ldots, c_n$ para que la función $x = \varphi(t, c_1, c_2, \ldots, c_n)$ satisfaga estas condiciones (suponiendo que los valores iniciales $t_0, x_0, x_0', \ldots, x_0^{(n-1)}$ pertenezcan al dominio de existencia de la solución).

Una relación de la forma $\Phi(t, x, c_1, \ldots, c_n) = 0$, que define la solución general de manera implícita, se llama *integral general* de la EDO.

Toda función obtenida de la solución general para valores concretos de las constantes $c_1, c_2, \ldots, c_n$, se llama *solución particular*. La gráfica de una solución particular se llama *curva integral* de la EDO dada.

Resolver (o integrar) una EDO de orden n significa:

1. hallar su solución general (si no se han dado las condiciones iniciales), o

2. hallar la solución particular de la EDO que satisfaga las condiciones iniciales dadas (si ésta existe).

Observación 1.1.4. *Sensibilidad a las condiciones iniciales.* En el teorema 1.1.1 se exigen condiciones que garantizan la existencia y unicidad de solución para la ecuación (1.1) con condiciones iniciales (1.5). Cuando pensamos en (1.1) como una ecuación que modela un problema físico, las condiciones iniciales (1.5) provienen de mediciones donde una

pequeña imprecisión o error experimental es inevitable. Asimismo, la propia ecuación diferencial (1.1) será una aproximación tratable a un modelo quizás más complejo. Desde este punto de vista práctico, es importante saber si pequeños cambios en las condiciones iniciales o en los términos y parámetros que definen la ecuación diferencial conducen o no (en "tiempo" $|t| =\leq T$ finito) a pequeños cambios en las soluciones. Esto garantiza la eficacia de la ecuación (al menos a corto plazo) como modelo del problema físico al que eventualmente pretende describir. No entraremos en la demostración de los importantes teoremas que existen en conexión con la continuidad y diferenciabilidad respecto de las condiciones iniciales y parámetros (véase por ejemplo [12]) y diremos que las exigencias del teorema 1.1.1 aseguran que la solución de (1.1) no es "sensible" a las condiciones iniciales a corto plazo, es decir, las soluciones de problemas de Cauchy próximos permanecen próximas a tiempo finito. Es importante enfatizar el requerimiento de "*tiempo finito*" ya que, a largo plazo, esto no tiene porqué ocurrir. Por ejemplo, consideremos la ecuación $x' = x^2$, cuya solución con condición inicial $x(0) = \epsilon > 0$ es $x(t, \epsilon) = \epsilon/(1 - \epsilon t)$, y puede demostrarse (véase [11]) que está definida en $(-\infty, 1/\epsilon)$ y $\lim_{t\to 1/\epsilon} x(t, \epsilon) = \infty$. Sin embargo, la solución con condición inicial $x(0) = 0$ es $x(t, 0) = 0$.

En este tema describiremos los principales métodos de resolución de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias (EDOs) de primer orden.

1.2. Separación de variables

Si se puede escribir la ecuación diferencial de primer orden como:

$$\boxed{\frac{dx(t)}{dt} = -\frac{G(t)}{F(x)} \Rightarrow F(x)dx + G(t)dt = 0} \tag{1.6}$$

se dice que las variables son separables y la solución se obtiene por integración directamente

$$\boxed{\int F(x)dx + \int G(t)dt = c} \tag{1.7}$$

Algunos problemas aplicados donde aparecen estas ecuaciones

Veamos primeramente varios **Modelos de dinámica de poblaciones**. Sea $P(t)$ la población de una cierta especie animal en un instante de tiempo t. En general, el ritmo de variación en el tiempo de la población viene dado por:

$$\frac{dP(t)}{dt} = v_n(t) - v_d(t) + v_i(t) - v_e(t)$$

donde v_n donde es la velocidad de nacimientos, v_d la de defunciones, v_i la de inmigraciones y v_e la de emigraciones.

Ejemplo 1.2.1. *Modelo de Malthus.* El modelo más simple es el que supone que la velocidad de nacimientos es proporcional al tamaño de la población $v_n = nP$ e, igualmente, la

velocidad de defunciones es proporcional al tamaño de la población $v_d = mP$. Se supone, además, que la población es cerrada, es decir, no hay migración. Entonces la igualdad anterior se convierte en esta otra

$$\frac{dP(t)}{dt} = (n - m)P(t) \tag{1.8}$$

donde n y m son las tasas de nacimiento y defunción relativas constantes. Si integramos respecto de t, resulta

$$P(t) = P_0 e^{kt}, k = n - m,$$

donde P_0 es la población en el instante inicial t_0. Vemos que el crecimiento es exponencial. Si $k > 0$, este crecimiento lleva a superpoblacón a largo plazo. Si $k < 0$, se produce la extinción de la población a largo plazo. □

Ejercicio 1.2.2. *Crecimiento de bacterias.* En un cierto cultivo de bacterias la velocidad de crecimiento es directamente proporcional al número presente y se ha observado que se duplica al cabo de 4 horas. Establecer la ley de crecimiento y hallar el número de bacterias que habrá en el cultivo transcurridas 12 horas. □

En el modelo malthusiano no se tienen en cuenta cuestiones tan importantes como las siguientes:

- La limitación de recursos y de espacio, que hace imposible el crecimiento indefinido.
- 2) Para muchas poblaciones naturales, la constante k no permanece constante a lo largo del tiempo. Ahora bien, hay poblaciones que tienen la particularidad de que, cuando el tamaño es pequeño, disminuye de una forma importante el número de encuentros para procrear y esto influye en el valor de k.

Veamos un modelo menos simplista como es el logístico.

Ejemplo 1.2.3. *Modelo logístico.* La idea fundamental que sustenta este modelo es la siguiente: la limitación de recursos y de espacio hace imposible un crecimiento indefinido y, en general, a largo plazo debe de haber algún reajuste. En 1836 Verhulst propuso que cuando una población alcanza un tamaño demasiado grande debe de producirse un proceso de autolimitación. En algunas poblaciones (como en la mosca de la fruta, poblaciones de bacterias, células de levadura, protozoos, etc), el índice de natalidad $n(t)$ disminuye cuando la población $P(t)$ aumenta: $n(t) = n_0 - n_1 P(t)$. Supongamos que el índice de mortalidad es constante $m(t) = m_0$. La ecuación diferencial (1.8) queda entonces como

$$\frac{dP}{dt} = kP(M - P)$$

que resulta ser separable. La solución es:

$$P(t) = \frac{MP_0}{P_0 + (M - P_0)e^{-kMt}}$$

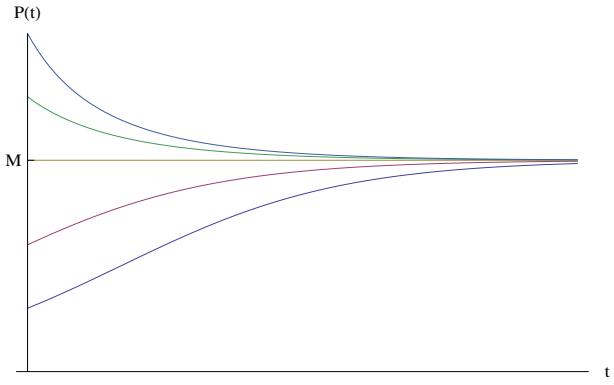


Figura 1.1: Sigmoides: Curva logística para distintas condiciones iniciales

donde $P_0 = P(t = 0)$ es la población inicial, $k = n_1$ y $M = (n_0 - m_0)/n_1$ es la población a largo plazo $P(\infty)$ (punto de equilibrio estable). La población presenta un punto de inflexión en t_i tal que $P(t_i) = M/2$. Véase la gráfica 1.1 para una representación gráfica de $P(t)$ ("sigmoides").

□

Las críticas más importantes que puede hacerse a este modelo son:

- Se considera la constante M independiente de la población en el pasado.
- No se tiene en cuenta el hecho de que, para muchas especies, los individuos necesitan un periodo de tiempo importante para alcanzar la maduración y estar en condiciones de reproducirse. Para corregir este problema, se suelen considerar modelos con retardo (no los consideraremos aquí).
- El *efecto Allee*. En muchas poblaciones naturales, cuando el tamaño es muy bajo se hace muy difícil el que la hembra encuentre al macho para la procreación. En estos casos, la tasa de crecimiento relativo varía un ritmo muy bajo. Sin embargo, en el modelo logístico este ritmo es constante e igual k. Una forma de obtener un modelo que recoja el efecto Allee es proponer una tasa de crecimiento relativo de la forma

$$\frac{\dot{P}}{P} = a_0 + a_1 P + a_2 P^2$$

que posee una variación no constante (de hecho, lineal). Se demuestra que, tomando $a_0, a_1 > 0$ y $a_2 < 0$, se da cuenta del efecto Allee.

Ejercicio 1.2.4. *Día del juicio contra extinción.* Considere ahora que el índice de natalidad es proporcional al número de parejas $(P/2)$, es decir: $n(t) = kP(t)$ y que el índice de mortalidad es constante $m(t) = m_0$. Resuelva la ecuación diferencial $\frac{dP(t)}{dt} = (n(t) - m(t))P(t)$ para este caso y demuestre que:

1. Si la población inicial es $P_0 > m_0/k$, entonces la población diverge para $t \to \frac{\ln C}{m_0}$ con $C = P_0/(P_0 - m_0/k)$ ("día del juicio final")

2. Si la población inicial es $P_0 < m_0/k$, entonces la población tiende a cero para $t \to \infty$ ("extinción").

□

Ejemplo 1.2.5. *Modelo de Ludwig.* En ciertas ocasiones, una población que se ajusta a un modelo logístico puede verse afectada negativamente por la presencia de otros individuos que no tienen su existencia completamente ligada a la de los primeros pero que, de alguna forma, se aprovechan de su existencia. En 1978, Ludwig propuso un modelo para estudiar una población de larvas que estaban desfoliando ciertos bosques de abetos canadienses. Estas larvas, junto con otras, sirven de alimento a ciertos pájaros. Estos no tienen sus vidas ligadas a las larvas, pues pueden migrar con facilidad para buscar otro alimento, pero en presencia de las larvas son sus depredadores naturales. El modelo propuesto tiene la forma

$$\frac{dP(t)}{dt} = kP(1 - \frac{P}{M}) - f(P)$$

El término $f(P)$ es el efecto negativo de los pájaros sobre la tasa de crecimiento absoluto. Para determinar la forma exacta de $f(P)$, se hacen los siguientes supuestos:

1. Si P es próximo a 0, $f(P)$ también debe serlo, pues los pájaros se irán a otro lado para buscar alimento.

2. $f(P)$ debe ser acotada para valores grandes de P, pues la capacidad de depredación de los pájaros es limitada.

□

Ejercicio 1.2.6. *Propagación de rumores.* Entre los alumnos de esta asignatura se extiende el rumor de que este problema va a caer en el examen final de Junio. Si hay 70 alumnos matriculados y el rumor se extiende de manera proporcional al número de alumnos que todavía no lo han oído, ¿cuántos días tardarán en saberlo 60 alumnos si a los dos días ya lo saben 40?. Nota: se supone que en $t = 0$ ningún alumno conoce el rumor. □

Ejercicio 1.2.7. *Desintegración de elementos radiactivos.* El radio se desintegra a una velocidad proporcional a la cantidad presente. Se ha comprobado además que en 1600 años desaparece la mitad de la cantidad inicial. Hallar la ecuación de desintegración, así como la cantidad perdida al cabo de 100 años. Repítase el cálculo con radiocarbono, cuya semivida es de 5.600 años. □

Ejercicio 1.2.8. *Eliminación de medicamentos.* Suponga que se usa pentobarbitol sódico para anestesiar a un perro. El perro queda anestesiado cuando la concentración de pentobarbitol sódico es de 45 miligramos por kilogramo de perro. Suponga también que la concentración de anestésico es eliminada de la corriente sanguínea de forma exponencial, con una vida media de 5 horas. ¿Qué dosis debe ser administrada para mantener anestesiado durante una hora a un perro de 50 kg? □

Ejercicio 1.2.9. *Interés compuesto continuo.* Cuando nació su primer hijo, una pareja depositó en su cuenta de ahorros 5000 euros bajo interés compuesto continuo al 8 %. Se dejó que se acumularan los intereses devengados. ¿A cuánto ascenderá la cuenta en el decimoctavo cumpleaños del niño?. Nota: si se depositan C_0 euros en una cuante a un interés de 100k % compuesto en n veces al año, tras t años el capital acumulado será:

$$C(t) = C_0(1 + \frac{k}{n})^{nt} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} C_0 e^{kt} \Rightarrow \frac{dC(t)}{dt} = kC(t)$$

□

Ejercicio 1.2.10. *Enfriamiento de una sustancia.* Según la ley de Newton, la velocidad a la que se enfría una sustancia al aire libre es proporcional a la diferencia entre la temperatura de dicha sustancia T y la del aire T_a de la forma: $\frac{dT(t)}{dt} = k(T_a - T(t))$. Si la temperatura del aire es 30^o y la sustancia se enfría de 100^o a 70^o en 15 minutos, hallar el instante en que su temperatura es de 40^o. Solución $t = (15 \ln 7)/\ln(7/4)$. □

Ejercicio 1.2.11. *Jugando a detectives.* Justamente antes del mediodía el cuerpo de una víctima aparente de un homicidio se encuentra en un cuarto que se conserva a temperatura constante de 20 grados centígrados. Al mediodía la temperatura del cuerpo es de 30 grados, y a las 13 horas es de 25 grados. Considérese que la temperatura del cuerpo en el momento de la muerte es de 36 grados, y que se ha enfriado de acuerdo con la ley de Newton. ¿Cuál fué la hora de la muerte?. □

Ejercicio 1.2.12. *Vida media del gas hilarante (óxido nitroso).* La descomposición de N_2O bajo la influencia de un catalizador de platino viene dada por la ecuación:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{k}{1 + bx}(a - x)$$

donde k, b son constantes y a denota la concentración inicial de N_2O. Si se verifica que $x(0) = 0$, Hallar la expresión de la vida media (instante en que $x = a/2$) de la sustancia. Solución $\tau = (-ba/2 + (ba + 1)\ln 2)/k$ □

Ejercicio 1.2.13. *Avance de una máquina quitanieves.* Supóngase que está nevando con regularidad, y que a las 12 horas del medio día sale una máquina quitanieves de manera que la cantidad de nieve que quita por unidad de tiempo es uniforme. Durante la primera hora recorre 2km, y en la segunda sólo 1km, debido al mayor acúmulo de nieve. Se desea saber la hora en que empezó a nevar. Ayuda: denotemos por $h(t)$ la altura de la nieve en el instante t y por h_0 la altura de la nieve cuando la máquina empieza a funcionar. Teniendo en cuenta que nieva regularmente a una velocidad constante w, se tiene que $h(t) = h_0 + wt$. Además, la máquina debe mantener el volumen V de nieve por unidad de tiempo constante, es decir, $V = h(t)\dot{x}(t)L$, donde $x(t)$ es la distancia recorrida por la máquina y L es la anchura de la carretera (constante). De esta forma, la ecuación diferencial a resolver es $\dot{x}(t) = \frac{V}{Lw(\frac{h_0}{w}+t)}$, que tiene dos constantes desconocidas, $V/(Lw)$ y h_0/w, más la constante de integración. Para calcularlas, sabemos que, a las 12 horas,

$x(0) = 0$ (sale la máquina quitanieves), que, a las 13 horas, $x(1) = 2$ (ha recorrido 2 km) y también que, a las 14 horas, $x(2) = 3$ (ha recorrido 3=2+1 km). Nótese que la hora en que empezó a nevar es $12 - h_0/w$, ya que el tiempo que transcurre desde que empieza a nevar ($h(t) = 0$) hasta que sale la máquina quitanieves es $t_0 = h_0/w$. Solución: $t_0 = 2/(1 + \sqrt{5}) \simeq 0{,}62$, es decir, unos 37 minutos antes de las 12. □

Ejercicio 1.2.14. *Ley de Torricelli.* Un tanque hemiesférico de radio $R = 4$ metros (es decir, el perfil de la sección transversal es $x^2+(y-4)^2 = 4^4$) está inicialmente lleno de agua. En ese momento se abre un agujero circular de 20 centímetros de diámetro en el fondo del tanque (en $y = 0$). Denotemos por $y(t)$ a la profundidad del agua en el tanque en el instante t, y por $V(t) = \int_0^h A(y)dy$ el volumen de agua, donde $A(y) = \pi x^2$ es el area de la sección del tanque a una altura y. La velocidad de salida del chorro se estima en $v = \alpha\sqrt{2gy}$, es decir, la velocidad $\sqrt{2gy}$ que una gota de agua adquiriría al caer libremente desde la superficie del agua hasta el orificio, corregida con un parámetro empírico $0 < \alpha < 1$ (generalmente $\alpha \approx 0{,}6$) que da cuenta del frenado por "embotellamiento"que sufre el chorro al pasar por el agujero. Deducir la ecuación

$$\frac{dV(t)}{dt} = -av \longrightarrow A(y)\frac{dy}{dt} = -a\alpha\sqrt{2gy}$$

donde a denota el área del agujero y $A(y) = \frac{dV}{dy}$ es el área de la sección transversal del tanque a una altura y del fondo. Determinar cuánto tiempo tardará el tanque en vaciarse por completo. □

Ejercicio 1.2.15. ¿Qué tiempo T se necesita para que se desagüe un embudo cónico de 10 cm de altura y ángulo en el vértice $\alpha = 60^o$ (es decir, $y = x/\sqrt{3}$) por un orificio de 0.5 cm^2 en el fondo del embudo?. □

Ejercicio 1.2.16. Un tanque tiene la forma de un cilindro vertical; inicialmente contiene agua con una profundidad de 5 metros, cuando se retira un tapón del fondo. Depués de una hora, la profundidad ha descendido 2 metros. ¿Cuánto tiempo tardará el agua en salir del tanque?. □

Ejercicio 1.2.17. Un tanque tiene la forma que se obtiene al hacer girar la parábola $x^2 = by$ alrededor del eje de las Y. La profundidad del agua es de 4 metros al mediodía, cuando se retira un tapón circular del fondo. a las 13 horas la profundidad del agua es de 1 metro. Encontrar a qué hora se vaciará por completo el tanque. Si el radio superior de la superficie del tanque es de 2 metros, ¿cuál es el radio del agujero?. □

Ejercicio 1.2.18. *La clepsidra*, reloj antiguo de agua, era un cuenco del que salía agua de un pequeño agujero del fondo. Se usaba en las cortes griegas y romanas para medir el tiempo de discurso de los oradores, para evitar que se prolongaran demasiado. Hallar la forma que debe tener la curva de revolución $y = y(x)$ para que el agua fluya a ritmo constante $\frac{dy}{dt} = k$. Ayuda: utilize la ley de Torricelli y tenga en cuanta que, para una superficie de revolución en torno al eje Y, las secciones transversales (y=cte.) son circulares con área $A(y) = \pi x^2$. Solución $y = \frac{k^2\pi x^4}{2a^2\alpha^2 g}$ □

Ejercicio 1.2.19. *Flujo de calor a través de una pared.* Bajo ciertas condiciones, la cantidad de calor Q (calorías/segundo) que fluye a través de un muro viene dada por:

$$Q = -kA\frac{dT(x)}{dx},$$

donde k $(cal/(cm^oC)$ es la conductividad del material, A (cm^2) es el área de la superficie del muro perpendicular a la dirección del flujo de calor y $T(x)$ (^oC) es la temperatura en un cierto punto x (cm) en el interior del muro. Encontrar el número de calorías por hora que fluye a través de la superficie de un frigorífico de área $A = 1m^2$ y espesor $d = 125cm$ si el material tiene conductividad $k = 0{,}0025$ y si se sabe que la Temperatura en la cara interior es de $T(0) = -5^oC$ y en la cara exterior es de $T(d) = 75^oC$. Solución $Q = 16cal/seg \Rightarrow$ flujo de calor en una hora$= 3600Q = 57{,}600cal$. □

Ejercicio 1.2.20. Una tubería de $r_1 = 10$ cm de radio está protegida con un forro de $d = 6$ cm de espesor con un coeficiente de conductividad de $k = 0{,}0003$. Encontrar el calor que se pierde por hora y por metro de tubería si la superficie de la misma está a $T(r_1) = 200^oC$ y la superficie del forro está a $T(r_1 + d) = 30^oC$. Ayuda: Utilize la misma ecuación que en el problema anterior, sustituyendo $x \leftrightarrow r$ y teniendo en cuenta que ahora el área depende del radio $A(r) = 2\pi rh$, con $h = 10$cm la longitud de la tubería. □

Ejercicio 1.2.21. *Problema de un nadador.* Un rio de anchura $2a$ fluye hacia el norte (en la dirección del eje Y), de manera que la líneas $x = \pm a$ representan las riberas del rio. Suponga que la velocidad del agua aumenta a medida que nos aproximamos al centro del rio de la forma $\vec{v}_R = v_R\hat{j} = v_0(1 - x^2/a^2)\hat{j}$. Supongamos que un nadador parte del punto $(-a, 0)$ en la ribera occidental y nada hacia el este (en la dirección del eje X), con respecto al agua, con una velocidad constante $\vec{v}_N = v_N\hat{i}$. Así, la velocidad del nadador respecto a un observador en la orilla es $\vec{v}_n = \vec{v}_R + \vec{v}_N$ y el ángulo que forma la dirección del nadador con el eje X en cada punto es $\tan\alpha = v_R/v_N = dy/dx$. ¿Qué distancia rio abajo alcanzará el nadador la otra orilla?. Solución $y(a) = a\frac{4v_0}{3v_N}$. □

1.3. Ecuaciones lineales

Si se puede escribir la ecuación diferencial de primer orden como:

$$\boxed{\dot{x} + a(t)x = f(t)} \tag{1.9}$$

se dice que ésta es lineal. Si $f(t) = 0$ (caso homogeneo) entonces esta ecuación se reduce a una separable. Para el caso no homogeneo $f(t) \neq 0$, la solución general puede calcularse de las siguientes formas.

1.3.1. Método de variación de la constante

Consideramos primeramente la ecuación *homogénea*

$$\dot{x}_h + a(t)x_h = 0,$$

que equivale a (1.9) cuando $f(t) = 0$. La ecuación $\dot{x}_h + a(t)x_h = 0$ es separable y su solución es $x_h(t) = Ke^{-\int a(t)dt}$, donde K es una constante de integración arbitraria y $\int a(t)dt$ denota una primitiva cualquiera de $a(t)$. Ahora aplicamos el *método de variación de la constante*, que supone hacer K dependiente del tiempo y ensayar $x(t) = K(t)e^{-\int a(t)dt}$ en (1.9) de manera que

$$\dot{x} + a(t)x = \dot{K}e^{-\int a(t)dt} - Ka(t)e^{-\int a(t)dt} + a(t)Ke^{-\int a(t)dt} = \dot{K}e^{-\int a(t)dt} = f(t),$$

con lo cual

$$\dot{K} = f(t)e^{\int a(t)dt} \Rightarrow K(t) = \int f(t)e^{\int a(t)dt}dt + C,$$

donde C es una constante de integración. Juntando todo, la solución general de (1.9) es

$$\boxed{x(t) = K(t)e^{-\int a(t)dt} = e^{-\int a(t)dt}\left(\int f(t)e^{\int a(t)dt}dt + C\right).}$$

1.3.2. Método de el factor integrante

Otra forma de resolver (1.9) es usando lo que se denomina un *factor integrante* (véase sección 1.4 para ecuaciones exactas), que consiste en multiplicar ambos lados de(1.9) por $\phi(t) = e^{\int a(t)dt}$ (*factor integrante*), y darse cuenta que el término de la izquierda puede escribirse como una derivada total como:

$$e^{\int a(t)dt}(\dot{x} + a(t)x) = \frac{d(e^{\int a(t)dt}x)}{dt} = e^{\int a(t)dt}f(t).$$

Integrando y despejando la variable dependiente x, la solución general queda:

$$x(t) = e^{-\int a(t)dt}\left(\int f(t)e^{\int a(t)dt}dt + C\right),$$

que es la misma que la obtenida por variación de la constante. La constante de integración arbitraria C se fija con la condición inicial $x(t_0) = x_0$. Para el caso más sencillo en que $a(t) = a =$constante, puede verse que la solución de $\dot{x} + ax = f(t)$ con condición inicial $x(t_0) = x_0$ viene dada por la expresión:

$$\boxed{x(t) = \int_{t_0}^{t} e^{a(\tau - t)}f(\tau)d\tau + e^{-a(t-t_0)}x_0.} \tag{1.10}$$

Ejercicio 1.3.1. Demuéstrese que efectivamente ésta es la solución de $\dot{x} + a(t)x = f(t)$ con condición inicial $x(t_0) = x_0$ □

Ejemplo 1.3.2. Queremos calcular la solución de $\dot{x} + 2tx = t^3 + t$ con condición inicial $x(0) = 2$. En este caso tenemos que $a(t) = 2t$ y $f(t) = t^3 + t$, con lo cual $e^{\int a(t)dt} = e^{t^2}$. Para integrar $\int f(t)e^{\int a(t)dt}dt = \int (t^3 + t)e^{t^2}dt$ utilizamos el cambio de variable $p = t^2, dp = 2tdt$,

con lo cual $\int (t^3+t)e^{t^2}dt = \frac{1}{2}\int (p+1)e^p dp$ que puede resolverse por partes (hágase). La solución general es entonces $x(t) = \frac{1}{2}t^2 + Ce^{-t^2}$. Imponiendo la condición inicial $x(0) = 2$ obtenemos que $C = 2$ y la solución es $x(t) = \frac{1}{2}t^2 + 2e^{-t^2}$. Compruébese que se cumple efectivamente que $\dot{x} + 2tx = t^3 + t$ □

Ejercicio 1.3.3. Resolver $\dot{x} = 3x + 1$ con condición inicial $x(0) = 0$.
Respuesta: $x(t) = \frac{1}{3}(e^{3t} - 1)$. □

Ejercicio 1.3.4. Resolver $\dot{x} = -2tx$ con condición inicial $x(0) = 4$.
Respuesta: $x(t) = 4e^{-t^2}$. □

Ejercicio 1.3.5. Resolver $t\dot{x} = 2x + t$ con condición inicial $x(1) = 5$.
Respuesta: $x(t) = 6t^2 - t$. □

Algunos problemas aplicados donde aparecen estas ecuaciones

Ejemplo 1.3.6. *Renovación de un líquido y ventilación de una galería.* Un depósito de V_0

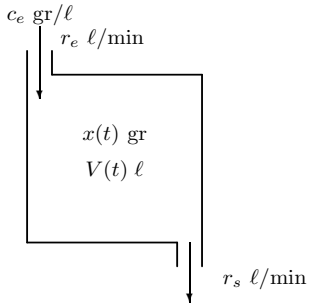


Figura 1.2: Renovación de un líquido

litros contiene una disolución compuesta por un c_0 % (gramos/litro) de soluto (sal, alcohol, monóxido de carbono, contaminantes, etc) y un $(100 - c_0)$ % de disolvente (agua, aire, etc). Mediante un tubo se introduce en el depósito una segunda disolución que contiene un c_e (gramos/litro) de soluto a un ritmo de entrada de r_e litros/minuto. Al mismo tiempo se vacía el depósito a un ritmo de salida de r_s litros/minuto (véase figura 1.2). Suponiendo que la solución del depósito se agita constantemente, se trata de hallar la cantidad de soluto $x(T)$ que queda en él después de T minutos. La variación de la cantidad de gramos de soluto por unidad de tiempo en el recipiente es igual a los gramos que entran menos los que salen por unidad de tiempo:

$$\boxed{\frac{dx}{dt} = r_e c_e - r_s c_s}$$

donde r_e y r_s son los ritmos de entrada y salida (en litros por minuto) y c_e y c_s son las concentraciones de entrada y salida (en gramos por litro). A su vez, la concentración de salida $c_s(t) = x(t)/V(t)$ es igual a la cantidad de soluto $x(t)$ en el recipiente por unidad

de volumen $V(t) = (r_e - r_s)t + V_0$ en ese instante [en efecto, $\frac{dV}{dt} = r_e - r_s$, con condición inicial $V(0) = V_0$, donde consideramos r_e y r_s constantes]. Así, la ecuación diferencial que describe el proceso es:

$$\dot{x}(t) + \frac{r_s}{V(t)}x(t) = r_e c_e(t)$$

(ecuación lineal de primer orden) con la condición inicial $x(0) = c_0 V_0$. La solución general se escribe como:

$$x(t) = e^{-\int \frac{r_s}{V(t)}dt}\left(\int r_e c_e(t) e^{\int \frac{r_s}{V(t)}dt}dt + C\right)$$

donde

$$\int \frac{r_s}{V(t)}dt = \frac{r_s}{r_e - r_s}\ln((r_e - r_s)t + V_0)$$

y

$$\int r_e c_e(t) e^{\int \frac{r_s}{V(t)}dt}dt = \int r_e c_e(t)[(r_e - r_s)t + V_0]^{\frac{r_s}{r_e - r_s}}dt, \tag{1.11}$$

donde se ha usado la identidad $a^b = e^{b\ln(a)}$.

Si la concentración de entrada c_e es constante y los ritmos de entrada y salida son iguales $r_e = r_s = r$ (es decir, el volumen de disolución se mantiene constante $V(t) = V_0$), las solución se simplifica bastante:

$$x(t) = c_e V_0 + Ce^{-\frac{r}{V_0}t},$$

donde la constante C se calcula imponiendo la condición inicial $x(0) = c_0 V_0 \Rightarrow C = (c_0 - c_e)V_0$. Así, la cantidad de soluto en el depósito en el instante T será: $x(T) = c_e V_0 + (c_0 - c_e)V_0 e^{-\frac{r}{V_0}T}$. Este último caso se presenta en *ventilación de galerías*. □

Ejercicio 1.3.7. Resuelva la integral (1.11) el caso en que $r_e \neq r_s$ (constantes) y c_e constante. □

Ejercicio 1.3.8. Resuelva la integral (1.11) el caso en que $r_e = r_s$ (constantes) y $c_e(t) = \alpha e^{-\beta t}, 0 < \alpha < 1$. Interpretación: Si $\beta > 0$ significa que cada vez entra menos soluto en el tanque. □

Ejercicio 1.3.9. Un depósito de 50 litros contiene una solución compuesta por un 90 % de agua y un 10 % de alcohol. Mediante un tubo se introduce en el depósito una segunda solución que contiene agua y alcohol a partes iguales, a un ritmo de 4 l/min. Al mismo tiempo se vacía el tanque a una velocidad de 5 l/min. Suponiendo que la solución del depósito se agita constantemente, hallar el alcohol que queda en él después de 10 minutos. *Solución:* $x(10) \approx 13{,}45$ litros□

Ejercicio 1.3.10. Un estudiante de física decide poner fin a su vida porque no entiende las ecuaciones diferenciales lineales de primer orden. Para ello construye un dispositivo que consta de (a) una conducción que comunica el tubo de escape de su coche con el habitáculo interior y (b) una bomba que extrae aire del interior del vehículo y lo expulsa al exterior. Una vez que el coche se pone en marcha, la conducción introduce en el vehículo

un 80 % de monóxido de carbono CO ($c_e = 0{,}8$) a una velocidad de $r_e = 1$ litros de aire por segundo) y una bomba extrae aire del interior a la misma velocidad. El volumen del habitáculo interior es de $V_0 = 3\ m^3$ y se admite que en todo momento el CO se distribuye de forma homogénea por el habitáculo. El coche es blindado y ha sido trucado para no poder abrirse desde dentro y para que el motor no pueda apagarse una vez arrancado. Al iniciar el proceso de suicidio, el estudiante se arrepiente y, tras desesperados y fallidos intentos por salir del coche, recuerda que guarda un teléfono móvil en la guantera, el cual usa para llamar a su madre. Si una proporción de un 5 % de monóxido de carbono es letal y la madre tarda 5 minutos en llegar, ¿consigue salvarse nuestro estudiante?.
Solución: una concentración del 5 % se alcanza en 193.6 segundos (es decir, algo más de tres minutos). "Mala suerte". □

Ejercicio 1.3.11. En una galería subterránea de dimensiones $15 \times 5 \times 1{,}2$ metros existe una concentración de CO_2 del 0,2 %, por lo que se trata de renovar esa atmósfera con aire del exterior, cuya concentración de CO_2 es del 0,05 %, mediante ventiladores a una velocidad de $9m^3/min$. Hallar la concentración de CO_2 en la galería transcurridos 20 minutos.
Solución: $x(20) = 0{,}063,\ c(20) = 0{,}07\,\%$ □

Ejercicio 1.3.12. El lago Erie tiene un volumen de 458 km^3 y el flujo de entrada y salida se realizan ambos a razón de 175 km^3 por año. Suponga que inicialmente su concentración de contaminantes es de 5 gramos de contaminante por cada litro de agua, y que la concentración de contaminantes que ingresa en el agua del lago es de 1 gramo por litro. Suponiendo que el agua se mezcla perfectamente en el lago, ¿cuánto tiempo pasará para que la concentración de contaminantes en el lago se reduzca a 2 gramos por litro?.
Solución: 3.628 años □

Ejercicio 1.3.13. *Reacciones químicas de primer orden.* La expresión de la velocidad de una reacción química de primer orden con reacción inversa es

$$v = k_1(a - x) - k_2 x.$$

Supongamos que en un caso concreto es $k_1 = k_2 = 100seg^{-1}$ y que la concentración inicial es $a = 1mol/l$. Hallar el valor de x después de 0.01 seg y después de 1 seg. Solución $x(0{,}01) = (1 - e^{-2})/2$, $x(1) = (1 - e^{-200})/2$ □

Ejercicio 1.3.14. *Resistencia de un medio viscoso.* Supongamos que la fuerza resistiva f_r que opone un medio viscoso al movimiento de una partícula de masa m a través suyo es proporcional a la velocidad v de la partícula, es decir, $f_r = -kv$, con k una cierta constante que depende del medio viscoso y de la geometría del objeto. Supongamos que también actua una fuerza externa $f_e(t)$ dependiente del tiempo. Expresar la velocidad en función de $f_e(t)$ a partir de la ley de Newton $m\dot{v} = f_e + f_r$.

Considerese ahora un problema de caída libre, con $f_e(t) = mg$ la fuerza de la gravedad. Calcule la velocidad límite que adquiere transcurrido largo tiempo ($t \to \infty$). Solución: $v_\infty = mg/k$

Considérese ahora una fuerza resistiva proporcional al cuadrado de la velocidad $f_r = -kv^2$. ¿Es la ecuación $mv' = f_e + f_r$ lineal? Demostrar que, cambiando de variable independiente, es decir, poniendo la velocidad $v(y)$ en función de la altura y de manera que la aceleración queda

$$\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dy}\frac{dy}{dt} = \frac{dv}{dy}v = \frac{1}{2}\frac{d(v^2)}{dy},$$

y cambiando también de función incógnita $w = v^2$, la ecuación no lineal $m\dot{v} = f_e - kv^2$ se reduce a la ecuación lineal $\frac{1}{2}mw' = f_e - kw$ con $w' = dw/dy$. Considérese movimiento ascendente ($f_e(t) = -mg$) con velocidad inicial v_0, resuélvase la ecuación diferencial lineal y calcúlese la altura y máxima que alcanza la partícula. Solución: $v(t) = \sqrt{mg/k}\tan(c - t\sqrt{kg/m}), c = \arctan(v_0\sqrt{k/(mg)}$, $y_{\max} = \frac{m}{k}\ln\cos c$. □

Ejercicio 1.3.15. *Propulsión de cohetes.* La ley de Newton $\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}$ dice que la variación temporal de la cantidad de movimiento $\vec{p}$ de un sistema es igual a la fuerza externa $\vec{F}$ que actúa. Supongamos que tenemos un sistema formado por un cohete y sus gases de combustión. El cambio de cantidad de movimiento del sistema es: $dp = mdv + cdm$, donde $m(t)$ y $v(t)$ son la masa del cohete y su velocidad en el instante t, y dm y c son la masa y la velocidad de los gases expulsados (con respecto al cohete) en el instante t. Suponemos que el combustible se consume a una razón constante δ, es decir, $dm/dt = -\delta \Rightarrow m(t) = m_0 - \delta t$, siendo m_0 la masa inicial. Las fuerzas que actúan son la de la gravedad y la fuerza resistiva, en total $F = -mg - kv$, de forma que la ecuación diferencial del movimiento del cohete es (dedúzcala):

$$m(t)\dot{v} + kv = -m(t)g + \delta c,$$

ecuación lineal no homogénea que admite un factor integrante $\Phi(t) = (m_0 - \delta t)^{-k/\delta}$ (dedúzcalo). Supongamos que tenemos un cohete con un peso inicial de 25 toneladas, de las cuales 20 son mezcla de combustible que se quemará a una tasa de 1 ton/s. La velocidad de escape del gas es de 1km/s. Se enciende en $t = 0$ con $y(0) = 0$ y $v(0) = 0$. Encuentre la velocidad (en km/hora) al consumirse todo el combustible: 1) si no hay rozamiento, 2) si el rozamiento es de $k = 0{,}2$ □

Ejercicio 1.3.16. *Masa variable.* Una gota de lluvia esférica que parte del reposo, cae por acción de la gravedad. Si recoge vapor de agua (supuesto en reposo) a un ritmo proporcional a su superficie $\frac{dm}{dt} = k4\pi r^2$, y su radio inicial es r_0, demostrar que su aceleración en el instante t es:

$$a = \frac{g}{4}\left(1 + \frac{3r_0^4}{r(t)^4}\right).$$

En particular, $a = g/4$ si el radio inicial es cero. Ayuda: recuerde que $\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}$ y que $dp = d(mv) = vdm + mdv$ y que $F = mg$, donde $m = \frac{4}{3}\pi r^3$ (para densidad igual a uno). Considere la velocidad v como función del radio, de manera que la aceleración se escribe como $a = \dot{v} = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dr}\frac{dr}{dt}$. Deduzca entonces que la relación entre la velocidad y el radio es $4\pi k r^2 v(r) + \frac{4}{3}\pi r^3 k\frac{dv(r)}{dr} = mg$ y calcule $v(r)$. □

1.4. Ecuación exacta. Factores integrantes

La ecuación

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0 \leftrightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{M(x,y)}{N(x,y)} \tag{1.12}$$

de dice exacta si se puede expresar como una diferencial exacta de una función $U(x,y)$ (llamada *potencial*), es decir

$$dU(x,y) = \frac{\partial U}{\partial x}dx + \frac{\partial U}{\partial y}dy = 0. \tag{1.13}$$

En ese caso la solución viene dada por $U(x,y)$ =constante (*curvas equipotenciales*). Este problema surge en Mecánica cuando tenemos una *fuerza conservativa* en el plano $x-y$ dada por $\vec{F}(x,y) = (F_x(x,y), F_y(x,y)) = (M(x,y), N(x,y))$. El trabajo realizado por dicha fuerza en un desplazamiento infinitesimal $d\vec{r} = (dx, dy)$ es $dW = \vec{F}\cdot d\vec{r}$. La ecuación (1.12) equivale a imponer que el trabajo es nulo $dW = 0$. Para fuerzas conservativas, es decir, irrotacionales o que derivan de un potencial $\vec{F} = \vec{\nabla}U = (\frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial U}{\partial y})$, el trabajo es igual a la diferencia de potencial $dW = dU$, de manera que $dW = 0 \Leftrightarrow dU = 0$, es decir, el trabajo es cero cuando nos movemos por curvas $y(x)$ equipotenciales.

La condición necesaria y suficiente para que la ecuación (1.12) sea exacta es la misma que la condición para que la fuerza $\vec{F}(x,y) = (M(x,y), N(x,y))$ sea conservativa o irrotacional

$$\vec{\nabla}\times\vec{F} = \vec{0} \Leftrightarrow \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}. \tag{1.14}$$

es decir, que las derivadas cruzadas sean iguales. Si la fuerza deriva de un potencial $\vec{F} = \vec{\nabla}U$, la condición $\vec{\nabla}\times\vec{F} = \vec{0}$ es equivalente a decir que las derivadas cruzadas del potencial son iguales $\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial x}$, lo cual es cierto en condiciones muy generales (consultar el Teorema de Schwarz o teorema de la igualdad de las derivadas cruzadas).

Para encontrar la función potencial $U(x,y)$ de una ecuación exacta (1.12) se procede de la siguiente forma

$$\left.\begin{array}{rcl} \frac{\partial U}{\partial x} &=& M(x,y) \\ \frac{\partial U}{\partial y} &=& N(x,y) \end{array}\right\} \longrightarrow \begin{array}{rcl} U(x,y) &=& \int M(x,y)dx + C(y) \\ \frac{\partial U}{\partial y} &=& \frac{\partial}{\partial y}(\int M(x,y)dx + C(y)) = N(x,y), \end{array}$$

donde, al integrar $\int M(x,y)dx$ la primera vez, hemos añadido una función arbitraria $C(y)$ en vez de una constante C por culpa de la derivada parcial $\partial U/\partial x$. De la segunda ecuación obtenemos $C(y)$ integrando. Si la ecuación es realmente exacta, $C'(y)$ solo dependerá de y. [1] Una vez obtenida la función potencial $U(x,y)$, la solución general de la ecuación diferencial (1.12) se puede escribir implícitamente como $U(x,y) = K$ =constante o explicitamente como $y = g(x,K)$ si se puede despejar y en función de x de $U(x,y) = K$.

[1] a veces se cometen errores de cálculo y se llega a una expresión donde $C'(y) = f(x,y)$ que contradice el hecho de que $C(y)$ solo dependa de y. Esto suele suceder cuando se ha supuesto la ecuación exacta y en realidad no lo es, o debido simplemente a errores de cálculo; si esto pasa, hay que repasar las cuentas.

Una ecuación (1.12) que no sea exacta, es decir que no cumpla (1.14), se puede convertir en exacta multiplicandola por lo que se denomina un *factor integrante* $\phi(x,y)$ (recuérdese el caso la ecuación lineal) de manera que

$$\phi(x,y)M(x,y)dx + \phi(x,y)N(x,y)dy = \tilde{M}(x,y)dx + \tilde{N}(x,y)dy = 0. \tag{1.15}$$

Imponiendo que

$$\frac{\partial \tilde{M}}{\partial y} = \frac{\partial \tilde{N}}{\partial x}$$

obtendremos ecuaciones para posibles factores integrantes. Normalmente, para simplificar, se ensaya con factores integrantes $\phi(x)$ o $\phi(y)$ que solo dependan de x o de y. La condición anterior determina en general una familia de factores integrantes. Basta con usar uno de ellos.

Ejercicio 1.4.1. Resuelva el ejercicio 1.3.16 encontrando una función $U(v,r)$ para la ecuación exacta $(4\pi k r^2 v(r) - mg)dr + \frac{4}{3}\pi r^3 k dv = 0$. □

Ejercicio 1.4.2. *Cadena que desliza desde una mesa.* Una cadena de longitud L y densidad λ está sobre una mesa, de manera que un trozo de longitud x cuelga y el otro de longitud $L-x$ está sobre la mesa. El peso $P = mg = \lambda x g$ de la parte que cuelga ejerce una fuerza que hace que la cadena deslize sobre la mesa (supongamos sin rozamiento) y caiga al suelo. La ecuación de Newton establece que

$$\frac{dp}{dt} = F \Rightarrow \frac{d}{dt}(mv) = \frac{d}{dt}(\lambda x \dot{x}) = \lambda \dot{x}^2 + \lambda x \ddot{x} = P = \lambda x g.$$

Considerar la velocidad v como una función de x, de maner que la aceleración $\ddot{x} = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx}\frac{dx}{dt} = v\frac{dv}{dx}$. Demostrar que la ecuación anterior no es exacta pero admite un factor integrante $\phi(x) = x$. Encontrar entonces la función $U(x,v)$ =constante. Si $L = 4$ y en el instante inicial $x(0) = 1$ y $v(0) = 0$, demostrar que $v(x) = \sqrt{2g/3}\sqrt{x^3 - 1}/x$. Con un programa de integración numérica, demostrar entonces que el tiempo que tarda la cadena en abandonar la mesa es aproximadamente $T = 0{,}54$ segundos □

1.5. Ecuaciones homogéneas

Si una ecuación tiene la forma:

$$\frac{dx}{dt} = F(\frac{x}{t}) \tag{1.16}$$

se dice que es homogénea y se puede resolver haciendo la transformación $x = vt$ (véase la siguiente sección) de manera que (1.16) se transforma en:

$$v + t\frac{dv}{dt} = F(v) \Rightarrow \frac{dt}{t} = \frac{dv}{F(v) - v} \tag{1.17}$$

que pasa a ser separable.

Algunos problemas aplicados donde aparecen estas ecuaciones

Ejercicio 1.5.1. *Trayectorias de vuelo.* Supongamos que un aeroplano parte del punto $(x, y) = (a, 0)$, localizado al este del destino $(x, y) = (0, 0)$ al que intenta llegar. El aeroplano viaja con velocidad constante v_0 relativa al viento, el cual está soplando hacia el norte con velocidad constante $\vec{w} = (0, w_0)$. Consideremos que el piloto mantiene la dirección de vuelo hacia el origen, de modo que la velocidad del aeroplano es $\vec{v} = -v_0\hat{r}$, con $\hat{r} = \frac{(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}}$ el vector de posición unitario del avión. Denotando por $\vec{V}(t) = (\dot{x}, \dot{y}) = \vec{v}+\vec{w})$ la velocidad del avión respecto a tierra, y despejando $\dot{y}/\dot{x} = dy/dx$, demuestra que se llega a una ecuación homogenea del tipo $dy/dx = f(y/x)$. Realiza el cambio de variable $u = y/x$ y resuelve la correspondiente ecuación. Impón la condición inicial $y(a) = 0$ y demuestra que el avión sigue la trayectoria dada por

$$y(x) = \frac{a}{2}\left[\left(\frac{x}{a}\right)^{1-k} - \left(\frac{x}{a}\right)^{1+k}\right], \quad k = \frac{w_0}{v_0}$$

Nótese que sólo en el caso $k < 1$ el avión llegará a su destino $y(0) = 0$ ¿por qué?. ¿Cuál es la distancia máxima hacia el norte y_{max} que el viento desvía al aeroplano? □

Ejercicio 1.5.2. *Espejo parabólico.* Sea el espejo E cuya sección transversal viene descrita por la curva azul de la figura 1.3 en el plano $x-y$. Use el hecho de el ángulo de incidencia θ, respecto a la recta tangente T a la curva E en el punto (x, y), es igual al ángulo de reflexión, y que además $\phi = 2\theta$ (¿por qué?), para obtener que la ecuación diferencial que determina la curva $y(x)$ del espejo E viene dada por la ecuación diferencial

$$\tan(\theta) = \frac{dy}{dx} = \frac{-x + \sqrt{x^2 + y^2}}{y}.$$

Compruebe que se trata de una ecuación homogénea y resuelvala. Demuestre que la solución general es una parábola ("espejo parabólico"), en paticular $x = -a + \frac{y^2}{4a}$ para la curva que pasa por $(x, y) = (-a, 0)$. □

1.6. Cambio de variable

Ya hemos visto algun ejercicio donde cambiamos de variable independiente $t \to x$ (tiempo por espacio) de manera que la derivada $\dot{v} = dv/dt$ (aceleración) de variable dependiente $v = \dot{x}$ (velocidad) pasa a ser $\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx}\frac{dx}{dt} = v\frac{dv}{dx}$. Veamos otro.

Ejercicio 1.6.1. *Velocidad de escape.* Para grandes alturas, la fuerza de la gravedad ya no es constante sino $F = GmM/r^2$, donde m es la masa del objeto (pongamos un cohete), M la masa de la tierra, G la constante de la gravitación y r la distancia al centro de la tierra. Considerando la velocidad v del cohete como una función de la distancia r, resolver $m\dot{v} = F$ y calcular la velocidad inicial $v(R)$ en la superficie de la tierra (con R el radio de la tierra) para que el cohete pueda escapar (es decir $v(\infty) = 0$ □

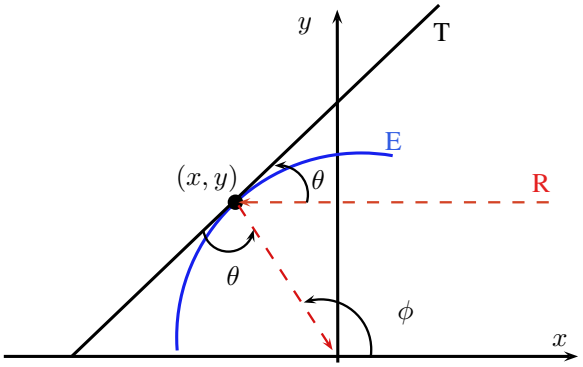


Figura 1.3: Superficie reflectante (espejo) E con la propiedad de que todos los rayos solares R que inciden paralelos al eje x en cualquier punto (x, y) del espejo, se reflejan pasando por el origen.

Consideremos ahora un cambio de función incógnita $x(t) \to y(t)$. Dada una ecuación diferencial $\dot{x} = f(t, x)$, si hacemos un cambio de variable $x = \phi(t, y)$, tenemos que

$$f(t, x) = \dot{x} = \partial_t \phi(t, y) + \partial_y \phi(t, y)\dot{y},$$

de manera que, despejando, la nueva ecuación se escribe $\dot{y} = g(t, y)$ con

$$g(t, y) = \frac{f(t, \phi(t, y)) - \partial_t \phi(t, y)}{\partial_y \phi(t, y)}.$$

Ejercicio 1.6.2. Dada la ecuación $\dot{x} = \frac{1}{x+t} - 1$, realiza el cambio $x + t = y$ y demuestra que ésta se transforma en $\dot{y} = 1/y$. ¿Cuál es la solución para $x(0) = 1$? □

En general, la ecuación diferencial del tipo $y'(x) = f(Ax + Cy + C)$ se combierte en separable haciendo el cambio de variable $z = Ax + By + C$.

Ejercicio 1.6.3. Vuelve a resolver la ecuación diferencial del ejercicio 1.5.2 mediante el cambio de variable $z = x^2 + y^2$.

1.6.1. Ecuación de Bernoulli

La ecuación diferencial de tipo Bernoulli viene dada por

$$y' + P(x)y = Q(x)y^n$$

donde n es cualquier número real. El cambio de variable $z = y^{1-n}$ la reduce a una ecuación lineal.

Ejercicio 1.6.4. Se considera la ecuación diferencial de tipo Bernoulli

$$y' + \frac{2}{x}y = -2xy^2.$$

1. Realiza el cambio de variable $z = 1/y$ y ve que la ecuación de Bernoulli para y se reduce a una ecuación lineal para z.

2. Resuelve la ecuación lineal y el problema de valores iniciales asociado a la condición $y(1) = 2$. □

1.6.2. Ecuación de Riccati

La ecuación diferencial de tipo Riccati viene dada por

$$y' + P(x)y = Q(x)y^2 + R(x).$$

Si se conoce una solución particular $y_p(x)$, El cambio de variable $z = 1/(y - y_p)$ la reduce a una ecuación lineal.

Ejercicio 1.6.5. Dada la ecuación diferencial de Riccati

$$y' + \frac{y}{x} - 2y^2 = -\frac{2}{x^2},$$

1. Comprueba que $y_p(x) = -\frac{1}{x}$ es una solución particular.

2. Realiza el cambio de variable $y \to z = (y + \frac{1}{x})^{-1}$ y comprueba que se obtiene una ecuación lineal.

3. Resuelve dicha ecuación lineal y determina la solución general $y(x)$ (y su dominio) para la ecuación original de Riccati. □

Capítulo 2

Sistemas de ecuaciones y ecuaciones lineales de orden superior

2.1. Generalidades y estructura del espacio de soluciones

En este tema trataremos mayormente ecuaciones lineales, para las que existen métodos de resolución analíticos. Una Ecuación Diferencial Ordinaria (EDO) Lineal de n-ésimo orden puede escribirse simbólicamente como:

$$a_n(t)x^{(n)}(t) + a_{n-1}(t)x^{(n-1)}(t) + \cdots + a_1(t)\dot{x}(t) + a_0(t)x(t) = f(t), \tag{2.1}$$

donde t es la variable independiente (generalmente "tiempo"), $a_n(t)$ son ciertos coeficientes dependientes de t, $x(t)$ es la variable dependiente o función incógnita ("respuesta"), $\dot{x}, \ddot{x}, \ldots x^{(n)}(t)$ sus derivadas hasta orden n y $f(t)$ es el término independiente o inhomogeneo ("fuerza o estímulo externo").

Esta ecuación puede escribirse también como un sistema de n EDOs de orden uno de la forma

$$\vec{z}'(t) = A(t)\vec{z}(t) + \vec{b}(t), \tag{2.2}$$

donde $\vec{z} = (x, \dot{x}, \ldots, x^{(n-1)})^T$,

$$A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 & 1 \\ -\frac{a_0(t)}{a_n(t)} & -\frac{a_1(t)}{a_n(t)} & -\frac{a_2(t)}{a_n(t)} & \cdots & -\frac{a_{n-2}(t)}{a_n(t)} & -\frac{a_{n-1}(t)}{a_n(t)} \end{pmatrix}$$

y

$$\vec{b}(t) = (0, 0, \cdots, 0, f(t)/a_n(t))^T,$$

donde T indica trasposición. Aquí hemos supuesto que $a_n(t)$ es distinto de cero en algún intervalo donde es válida esta identificación.

Esta traducción de una EDO de orden n a un sistema equivalente de n EDOs de orden 1 nos resultará útil aquí, más que desde un punto de vista práctico, desde una perspectiva teórica. Haremos uso extensivo de esta correspondencia entre ambos espacios de soluciones.

Existen dos tipos de problemas, dependiendo del tipo de restricciones sobre la solución general de (2.1), que son:

2.1.1. Problemas de: valores iniciales (PVI) y valores en la frontera (PVF)

Problema de valores iniciales

Un problema de valores iniciales para una EDO lineal de orden n consiste en

$$\begin{aligned} &\text{Resolver :} && a_n(t)x^{(n)} + a_{n-1}(t)x^{(n-1)} + \dots a_1(t)\dot{x} + a_0(t)x = f(t) \\ &\text{Sujeta a :} && x(t_0) = x_0, \dot{x}(t_0) = \dot{x}_0, \dots, x^{(n-1)}(t_0) = x_0^{(n-1)}. \end{aligned} \tag{2.3}$$

Para el problema de valores iniciales (2.3) tenemos un teorema de existencia y unicidad de soluciones que nos dice lo siguiente:

Teorema 2.1.1. *Sean $a_n(t), a_{n-1}(t), \dots, a_1(t), a_0(t)$ y $f(t)$ continuas en un intervalo $I \subset \mathbb{R}$, y sea $a_n(t) \neq 0\, \forall t \in I$. Si $t = t_0$ es cualquier punto en el intervalo I, existe una única solución $x(t)$ en dicho intervalo del problema de valores iniciales (2.3).*

Observación 2.1.2. Nótese que si $a_n(t) = 0$ para algún t en el intervalo I, la solución del problema lineal de valores iniciales (2.3) quizás no sea única o incluso no exista; Por ejemplo, es inmediato comprobar que la función $x_c(t) = ct^2 + t + 3$ es una familia de soluciones (dependientes de un parámetro c) para el problema de valores iniciales

$$t^2\ddot{x} - 2t\dot{x} + 2x = 6,\ x(0) = 3, \dot{x}(0) = 1$$

para $t \in (-\infty, \infty)$ para cualquier valor del parámetro c. En otras palabras, no hay solución única para este problema. Esto se debe a que, aunque los coeficientes $a_n(t)$ son funciones continuas en (∞, ∞), el coeficiente $a_2(t) = t^2$ es cero en $t = 0$, precisamente donde se han impuesto las condiciones iniciales. En la siguiente sección consideraremos coeficientes constantes y tomaremos $a_n(t) = 1$, con lo cual no se presentará este problema.

Problema de valores en la frontera

Otro tipo de problema es resolver una EDO lineal en el que la variable dependiente $y(x)$ y/o sus derivadas $y'(x), y''(x)$, etc [se prefiere la notación $y(x)$ a $x(t)$ para este tipo de problemas] estén especificadas en *puntos distintos*: $x_0, x_1, \dots$ Un problema como

$$\begin{aligned} &\text{Resolver :} && a_2y'' + a_1y' + a_0y = b \\ &\text{Sujeta a :} && y(x_0) = y_0, y(x_1) = y_1, \end{aligned} \tag{2.4}$$

se denomina *problema de valores en la frontera*. Las restricciones $y(x_0) = y_0, y(x_1) = y_1$ se denominan *condiciones en la frontera*. Una solución del problema anterior es una función $y(x)$ que satisface la ecuación diferencial en algún intervalo I que contiene a x_0 y x_1, cuya gráfica pasa por los puntos (x_0, y_0) y (x_1, y_1).

Los ejemplos que siguen demuestran que, aun cuando se satisfagan las condiciones del teorema 2.1.1, un problema de valores en la frontera puede tener i) varias soluciones; ii) solución única, o iii) ninguna solución. En efecto la solución general de la EDO lineal de orden 2: $\ddot{x} + 16x = 0$ es $x = c_1 \cos(4t) + c_2 \operatorname{sen}(4t)$. Ahora:

i) Si imponemos $x(0) = 0, x(\pi/2) = 0 \Rightarrow c_1 = 0$, con c_2 arbitraria. Es decir, tenemos una familia uniparamétrica de soluciones $x = c_2 \operatorname{sen}(4t)$ que pasan por los puntos $(0, 0)$ y $(\pi/2, 0)$ y que satisfacen la ecuación $\ddot{x} + 16x = 0$.

ii) Si imponemos $x(0) = 0, x(\pi/8) = 0 \Rightarrow c_1 = c_2 = 0$. Es decir, $x = 0$ es la única solución de $\ddot{x} + 16x = 0$ que pasa por estos puntos.

ii) Si imponemos $x(0) = 0, x(\pi/2) = 1 \Rightarrow c_1 = 0$ y $c_2 0 = 1$, con lo cual el problema no tiene solución.

Nosotros empezaremos estudiando problemas de valor inicial.

Notación operatorial

A veces es útil denotar $\dot{x} = \frac{dx}{dt} = Dx$, donde el símbolo $D = \frac{d}{dt}$ se llama *operador diferencial* porque transforma una función diferenciable en otra función. Las derivadas de orden superior se pueden expresar como "potencias"de D, como $\frac{d^n x}{dt^n} = D^n x$. Las expresiones polinómicas en D, como $L = D^2 + 3tD + 5$ también son operadores diferenciales. En general:

Definición 2.1.3. Se define un *operador diferencial de orden n* como:

$$L = a_n(t)D^n + a_{n-1}(t)D^{n-1} + \cdots + a_1(t)D + a_0(t), \tag{2.5}$$

donde $a_i(t), i = 0, 1, \ldots, n$ son funciones reales (o complejas) de t. De esta forma, la ecuación (2.3) se puede escribir en forma compacta como $L(x) = f(t)$.

2.1.2. Ecuaciones homogéneas. Sistema fundamental de soluciones

Una EDO lineal de orden n como (2.1) se dice homogénea si el lado derecho de la igualdad es idénticamente nulo: $f(t) = 0$. Veremos que la resolución de una ecuación no homogénea como (2.1) pasa por la resolución de la ecuación homogénea asociada.

Denotemos por $\mathcal{C}^{(m)}$ el conjunto de las funciones reales (o complejas) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de clase m. Obviamente $\mathcal{C}^{(m)}$ es un espacio vectorial sobre el cuerpo $\mathbb{R}$, y L es una aplicación $L : \mathcal{C}^{(m)} \to \mathcal{C}^{(l)}$, $m \geq n$ que hace corresponder a cada $f \in \mathcal{C}^{(m)}$ una función $L(f)$ de clase $C^{(l)}$. La aplicación "multiplicación por $a_0(t)$"hace corresponder a cada función $f(t)$ la función $a_0(t)f(t)$. Veamos que la aplicación $L : \mathcal{C}^{(m)} \to \mathcal{C}^{(l)}$, $m \geq n$ es una aplicación lineal entre espacios vectoriales.

Teorema 2.1.4. *El operador L tiene la propiedad de linealidad*

$$L(\alpha f(t) + \beta g(t)) = \alpha L(f(t)) + \beta L(g(t)), \tag{2.6}$$

donde α y β son constantes y $f, g \in \mathcal{C}^{(m)}$, $m \geq n$. A causa de esta propiedad, el operador diferencial de orden n (2.5) se denomina "operador lineal".

Demostración: la demostración radica en dos propiedades básicas de la diferenciación: 1) $D(\alpha f(t)) = \alpha Df(t)$, donde α es una constante, y 2) $D(f(t)+g(t)) = Df(t)+Dg(t)$. Estas propiedades son claramente extensibles a la derivada n-ésima D^n, incluyendo $D^0 \equiv 1$, y a sus combinaciones lineales con coeficientes $a_k(t)$. ■

Observación 2.1.5. Nótese que, al contrario que D, el operador L no tiene porqué cumplir la regla de Leibnitz $D(f(t)g(t)) = D(f(t))g(t) + f(t)D(g(t))$. Esto se debe a la presencia del término $a_0(t)$ en (2.5).

Notación operatorial de EDOs lineales

La EDO lineal (2.1) puede expresarse en forma compacta en términos del operador diferencial lineal (2.5) como:

$$L(x) = 0,$$

para el caso homogéneo $f(t) = 0$, o bien en forma (2.2) de un sistema de n EDOs de orden uno como:

$$D\vec{z} = A\vec{z} \Rightarrow (DI_n - A)\vec{z} = \vec{0},$$

donde I_n denota la matriz identidad $n \times n$.

Así, resolver la ecuación $L(x) = 0$ significa encontrar el núcleo del operador L entre las funciones reales n veces derivables $\mathcal{C}^{(n)}$. O, equivalentemente, encontrar el núcleo del operador lineal $DI_n - A$ entre las funciones vectoriales derivables $\vec{z} : I \to \mathbb{R}^n$.

Principio de superposición

La propiedad de linealidad de L permite, dadas dos o mas soluciones de $L(x) = 0$, encontrar otra. Esta idea viene expresada de manera precisa en el siguiente teorema

Teorema 2.1.6. *Sean $x_1, x_2, \ldots, x_k$ soluciones de la ecuación diferencial homogénea de orden n $L(x) = 0$, donde t está en un intervalo I. La combinación lineal*

$$x(t) = \alpha_1 x_1(t) + \alpha_2 x_2(t) + \cdots + \alpha_k x_k(t),$$

donde $\alpha_i, i = 1, 2, \ldots, k$ son constantes arbitrarias, también es una solución cuando t está en el intervalo I.

Demostración: la clave está en la linealidad de L:

$$L(x) = L(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_k x_k) = \alpha_1 L(x_1) + \alpha_2 L(x_2) + \cdots + \alpha_k L(x_k) = 0,$$

donde, en la última igualdad hemos usado que $L(x_i) = 0$, $i = 1, \ldots, k$, es decir, que $x_1, x_2, \ldots, x_k$ son soluciones de la EDO lineal homogénea de orden n: $L(x) = 0$. ■

Corolario 2.1.7. *Del teorema anterior se deduce inmediatamente que las soluciones de $L(x) = 0$ forman un* espacio vectorial *sobre* $\mathbb{R}$.

Veamos cómo encontrar la dimensión de este espacio vectorial real.

Dependencia e independencia lineal

Citaremos un par de conceptos básicos para estudiar EDOs lineales.

Definición 2.1.8. Se dice que un conjunto de funciones, $f_1(t), f_2(t), \ldots, f_n(t)$ es *linealmente dependiente* en un intervalo I, si existen constantes $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ no todas nulas, tales que

$$\alpha_1 f_1(t) + \alpha_2 f_2(t) + \cdots + \alpha_n f_n(t) = 0, \ \forall t \in I.$$

Si el conjunto de funciones no es linealmente dependiente, se dice que es *linealmente independiente*.

Para un conjunto de dos funciones, la dependencia lineal $\alpha_1 f_1(t) + \alpha_2 f_2(t) = 0$ significa que una función es múltiplo de la otra: $f_1(t) = -\frac{\alpha_2}{\alpha_1} f_2(t)$ (suponiendo que $\alpha_1 \neq 0$). Por ejemplo, las funciones $f_1(t) = \operatorname{sen}(2x)$ y $f_2(t) = \operatorname{sen}(t)\cos(t)$ son linealmente dependientes en $I = (-\infty, \infty)$ porque $f_1(t) = \operatorname{sen}(2x) = 2\operatorname{sen}(t)\cos(t) = 2f_2(t)$. Por otro lado, las funciones $f_1(t) = t$ y $f_2(t) = |t|$ son linealmente independientes en $I = (-\infty, \infty)$ (aunque no en los intervalos $(-\infty, 0)$ y $(0, \infty)$, donde son dependientes).

Generalidades sobre las soluciones de EDOs lineales homogéneas

Antes de entrar en fórmulas explícitas para las soluciones, las cuales sólo pueden proporcionarse salvo casos excepcionales como el caso de coeficientes constantes, estudiemos con detenimiento la estructura del espacio de soluciones.

Teorema 2.1.9. *Las soluciones de $L(x) = 0$, o equivalentemente de $(DI_n - A)\vec{z} = \vec{0}$, forman un espacio vectorial de dimensión n sobre $\mathbb{R}$.*

Demostración: hemos visto que la suma de soluciones y el producto de soluciones de $L(x) = 0$ por escalares son también solución. Para conocer la dimensión utilizaremos la equivalencia $L(x) = 0 \Leftrightarrow (DI_n - A)\vec{z} = \vec{0}$. Fijemos una base $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots \vec{v}_n$ de $\mathbb{R}^n$ y $t_0 \in I$, y consideremos las soluciones $\vec{z}_1, \vec{z}_2, \ldots \vec{z}_n$ de $(DI_n - A)\vec{z} = \vec{0}$ con condiciones iniciales $\vec{z}_i(t_0) = \vec{v}_i, i = 1, 2, \ldots, n$.

Basta probar que $\vec{z}_1, \vec{z}_2, \ldots \vec{z}_n$ forman una base del espacio de soluciones (linealmente independiente y generador). Para ello procedamos por reducción al absurdo. Supongamos que existen constantes $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ no todas nulas, tales que

$$\alpha_1 \vec{z}_1(t) + \alpha_2 \vec{z}_2(t) + \cdots + \alpha_n \vec{z}_n(t) = \vec{0}, \ \forall t \in I.$$

Sustituyendo t por t_0,

$$\alpha_1 \vec{v}_1 + \alpha_2 \vec{v}_2 + \cdots + \alpha_n \vec{v}_n = \vec{0},$$

pero esto contradice el hecho de que $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots \vec{v}_n$ sea una base de $\mathbb{R}^n$, luego $\vec{z}_1, \vec{z}_2, \ldots \vec{z}_n$ son linealmente independientes. Para ver que son un sistema generador, supongamos que $\vec{z}$ es una solución de $(DI_n - A)\vec{z} = \vec{0}$ y pongamos $\vec{z}(t_0) = \vec{v}$. Sean $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ las coordenadas de $\vec{v}$ en la base $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots \vec{v}_n$ de $\mathbb{R}^n$. Entonces

$$\alpha_1 \vec{z}_1(t_0) + \alpha_2 \vec{z}_2(t_0) + \cdots + \alpha_n \vec{z}_n(t_0) = \vec{v},$$

y por unicidad de soluciones del problema de Cauchy (Teorema 2.1.1)

$$\alpha_1\vec{z}_1(t)+\alpha_2\vec{z}_2(t)+\cdots+\alpha_n\vec{z}_n(t)=\vec{z}(t).$$

Por tanto $\vec{z}_1,\vec{z}_2,\dots\vec{z}_n$ forman un sistema generador. ■

Definición 2.1.10. Llamaremos a cualquiera de las bases $S=\{\vec{z}_1,\vec{z}_2,\dots\vec{z}_n\}$ del espacio de soluciones de $(DI_n-A)\vec{z}=\vec{0}$ un *sistema fundamental* de soluciones. De las matrices

$$Z=\begin{pmatrix} z_{1,0} & z_{2,0} & \cdots & z_{n,0}\\ z_{1,1} & z_{2,1} & \cdots & z_{n,1}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ z_{1,n-1} & z_{2,n-1} & \cdots & z_{n,n-1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n\\ x_1' & x_2' & \cdots & x_n'\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ x_1^{(n-1)} & x_2^{(n-1)} & \cdots & x_n^{(n-1)}\end{pmatrix}\in M_{n\times n}(\mathbb{R})$$

cuyas columnas $\vec{z}_1,\vec{z}_2,\dots\vec{z}_n$ son un sistema fundamental S diremos que son *matrices fundamentales* $M[S]=Z$ de $(DI_n-A)\vec{z}=\vec{0}\leftrightarrow L(x)=0$.

Entre las familias $F=\{x_1(t),x_2(t),\dots,x_n(t)\}$ de soluciones de $L(x)=0$ distinguiremos las que constituyen un sistema fundamental de las que no a través del *Wronskiano*, que se define como el determinante

$$W[F](t)=\det(M[F](t))=\begin{vmatrix} x_1(t) & x_2(t) & \cdots & x_n(t)\\ x_1'(t) & x_2'(t) & \cdots & x_n'(t)\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ x_1^{(n-1)}(t) & x_2^{(n-1)}(t) & \cdots & x_n^{(n-1)}(t)\end{vmatrix}.$$

Teorema 2.1.11. *Sean $x_1(t),x_2(t),\dots,x_n(t)$ soluciones de $L(x)=0$. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(i) La familia $F=\{\vec{z}_1,\vec{z}_2,\dots\vec{z}_n\}$, formada por los vectores con componentes $\vec{z}_k=(x_k,x_k',\dots,x_k^{(n-1)})$, es un sistema fundamental;

(ii) existe $t_0\in I$ tal que $W[F](t_0)\neq 0$;

(iii) para todo $t\in I, W[F](t)\neq 0$

Demostración: en virtud del isomorfismo lineal entre el espacio de soluciones de $L(x)=0$ y $(DI_n-A)\vec{z}=\vec{0}$, podemos demostrar que (i)⇒(ii). En efecto, supongamos que $M[F](t)$ es una matriz fundamental pero que, sin embargo, existe $t_1\in I$ tal que $\det M[F](t_1)=W[F](t_1)\neq 0$. Existirán entonces $\alpha_1,\alpha_2\dots,\alpha_n\in\mathbb{R}$ no todas nulas, tales que $\alpha_1\vec{z}_1(t_1)+\alpha_2\vec{z}_2(t_1)+\cdots+\alpha_n\vec{z}_n(t_1)=\vec{0}$. Definamos $\vec{z}(t)=\alpha_1\vec{z}_1(t)+\alpha_2\vec{z}_2(t)+\cdots+\alpha_n\vec{z}_n(t)$. Obviamente $\vec{z}(t)$ es solución de $(DI_n-A)\vec{z}=\vec{0}$ con la condición inicial $\vec{z}(t_1)=\vec{0}$, al igual que $\vec{z}(t)=\vec{0}$, luego, por unicidad, $\vec{z}(t)=\vec{0}$. Se contradice así que la familia F sea libre.

Trivialmente (iii)⇒(ii).

Para probar que (ii)⇒(i), basta notar que $\vec{v}_i=\vec{z}_i(t_0), i=1,2,\dots,n$ es una base de $\mathbb{R}^n$ y razonar como en el Teorema 2.1.9 para concluir que F es un sistema fundamental. ■

Observación 2.1.12. Como ilustración, discutamos el caso particular de EDOs lineales homogeneas de orden $n = 2$

$$a_2(t)x'' + a_1(t)x' + a_0(t)x = 0, \quad x(t_0) = x_0, x'(t_0) = v_0.$$

El teorema anterior indica que, conocidas dos soluciones independientes $x_1(t)$ y $x_2(t)$, cualquier solución $x(t)$ se puede poner como combinación lineal de ambas

$$x(t) = C_1x_1(t) + C_2x_2(t)$$

con C_1 y C_2 constantes arbitrarias. Derivando la ecuación anterior se obtiene

$$x'(t) = C_1x_1'(t) + C_2x_2'(t).$$

Ambas ecuaciones se pueden escribir juntas en notación matricial como

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ x'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1(t) & x_2(t) \\ x_1'(t) & x_2'(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix}.$$

Evaluando en $t = t_0$, y notando que las condiciones iniciales son $x(t_0) = x_0, x'(t_0) = v_0$, tenemos que

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ v_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1(t_0) & x_2(t_0) \\ x_1'(t_0) & x_2'(t_0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix}.$$

La condicion para que la solución $x(t)$ exista y sea única es que podamos despejar

$$\begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1(t_0) & x_2(t_0) \\ x_1'(t_0) & x_2'(t_0) \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} x_0 \\ v_0 \end{pmatrix},$$

es decir, que la matriz fundamental de *Wronsky* $\begin{pmatrix} x_1(t_0) & x_2(t_0) \\ x_1'(t_0) & x_2'(t_0) \end{pmatrix}$ sea invertible, lo cual es equivalente a que el determinante *Wronskiano* $\begin{vmatrix} x_1(t_0) & x_2(t_0) \\ x_1'(t_0) & x_2'(t_0) \end{vmatrix} \neq 0$, tal y como requiere el teorema 2.1.11.■

2.1.3. Ecuaciones no homogéneas. Variación de las constantes

Las soluciones de la ecuación lineal homogénea $L(x) = 0 \leftrightarrow (DI_n - A)\vec{z} = \vec{0}$ y de la no homogénea $L(x) = f \leftrightarrow (DI_n - A)\vec{z} = \vec{b}$ guardan una relación muy estrecha, como pone de manifiesto el siguiente resultado:

Teorema 2.1.13. *Sea $S = \{x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)\}$ un sistema fundamental de $L(x) = 0$ y $x_p(t)$ una solución cualquiera de $L(x) = f$. Entonces la solución general de $L(x) = f$ viene dada por*

$$x(t) = \overbrace{\underbrace{x_p(t)}_{\text{s.p.n.h.}} + \underbrace{c_1x_1(t) + c_2x_2(t) + \cdots + c_nx_n(t)}_{\text{s.g.h.}}}^{\text{s.g.n.h.}},$$

donde $c_1, c_2, \ldots, c_n$ son constantes arbitrarias.

Demostración: sea $x(t)$ la solución general de la ecuación no homogénea (s.g.n.h.) $L(x) = f$ y $x_p(t)$ una solución particular de $L(x) = f$ (s.p.n.h.). Si definimos $u(t) = x(t) - x_p(t)$, por la linealidad de L se debe cumplir

$$L(u) = L(x) - L(x_p) = f - f = 0.$$

Esto demuestra que $u(t)$ es una solución de la ecuación homogénea $L(x) = 0$; por consiguiente, según el Teorema 2.1.9, existen constantes $c_1, c_2, \ldots, c_n$ tales que $u(t) = c_1x_1(t) + c_2x_2(t) + \cdots + c_nx_n(t) = x(t) - x_p(t)$. ■

Principio de superposición para ecuaciones no homogéneas

Respecto al cálculo de soluciones particulares x_p de $L(x) = f$, a veces resulta útil el siguiente "principio de superposición"para EDOs lineales no homogéneas (véase más adelante el *método de los coeficientes indeterminados*).

Teorema 2.1.14. *Sean $x_{p_1}, x_{p_2}, \ldots, x_{p_k}$ soluciones particulares respectivas de*

$$L(x) = f_1, L(x) = f_2, \ldots, L(x) = f_k$$

en un cierto intervalo I, entonces $x_p = \alpha_1x_{p_1} + \alpha_2x_{p_2} + \cdots + \alpha_kx_{p_k}$, con $\alpha_i, i = 1, \ldots, k$ constantes reales, es solución de

$$L(x) = f = \alpha_1f_1 + \alpha_2f_2 + \cdots + \alpha_kf_k.$$

Demostración: en efecto, este resultado es consecuencia de la linealidad del operador diferencial L

$$L(\alpha_1x_{p_1} + \alpha_2x_{p_2} + \cdots + \alpha_kx_{p_k}) = \alpha_1L(x_{p_1}) + \alpha_2L(x_{p_2}) + \cdots + \alpha_kL(x_{p_k}) =$$

$$= \alpha_1f_1 + \alpha_2f_2 + \cdots + \alpha_kf_k = f.\blacksquare$$

Este principio resulta especialmente útil en el caso de funciones periódicas $f(t) = f(t + T)$ bastante generales que admiten un desarrollo de Fourier en serie de senos y cosenos. Véase más adelante.

Método de variación de las constantes

La búsqueda de la solución general de la ecuación lineal no homogénea pasa por encontrar un sistema fundamental de soluciones de la ecuación homogénea y después una solución particular de la completa. Cuando ya se conoce la s.g.h., el cálculo de una solución particular puede hacerse por el *método de variación de las constantes*. En este caso, suponemos que la solución particular que buscamos podrá escribirse, en términos del sistema fundamental $S = \{x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)\}$ del que ya disponemos, como

$$x_p(t) = c_1(t)x_1(t) + c_2(t)x_2(t) + \cdots + c_n(t)x_n(t) \tag{2.7}$$

para funciones adecuadas $c_i(t)$, $i = 1, \ldots, n$. Para comprenderlo mejor, hacemos uso del isomorfismo lineal entre el espacio de soluciones de $L(x) = 0$ y $(DI_n - A)\vec{z} = \vec{0}$. Así, la ecuación (2.7) puede escribirse de manera equivalente como

$$\vec{z}_p(t) = Z(t)\vec{c}(t),$$

donde $\vec{z}_p = (x_p, x_p', \ldots, x_p^{(n-1)})^T$, $\vec{c} = (c_1, c_2, \ldots, c_n)^T$, Z es la matriz fundamental definida en 2.1.10 y se han introducido condiciones auxiliares como $\vec{x}^T(t)\vec{c}'(t) = 0$, etc. Para una función $\vec{z}_p$ definida de esta manera ocurrirá que

$$\vec{z}_p'(t) = Z'(t)\vec{c}(t) + Z(t)\vec{c}'(t) = A(t)Z(t)\vec{c}(t) + Z(t)\vec{c}'(t),$$

donde hemos utilizado que $(DI_n - A)\vec{z}_k = \vec{0}$, $k = 1, \ldots, n$ para las columnas $\vec{z}_k$ de la matriz fundamental $Z(t)$. Si queremos que $\vec{z}_p$ cumpla la ecuación no homogénea $\vec{z}_p'(t) = A(t)\vec{z}_p(t) + \vec{b}(t)$, se concluye que

$$Z(t)\vec{c}'(t) = \vec{b}(t) \Rightarrow \vec{c}(t) = \int Z^{-1}(t)\vec{b}(t)dt = \int \frac{\overrightarrow{W}[S](t)}{W[S](t)}dt,$$

donde, en la última igualdad, se ha utilizado el método de Cramer con

$$\overrightarrow{W}[S] = (W_1[S], W_2[S], \ldots, W_n[S])$$

y $W_j[S]$ el determinante que resulta de sustituir la columna j en el Wronskiano $W[S]$ por $\vec{b}$. Así, la solución general de $(DI_n - A)\vec{z} = \vec{b}$ es

$$\vec{z}(t) = Z(t)\vec{\alpha} + Z(t)\int Z^{-1}(t)\vec{b}(t)dt.$$

Si se imponen condiciones iniciales $\vec{z}(t_0) = \vec{z}_0$, la solución es:

$$\vec{z}(t) = Z(t)Z^{-1}(x_0)\vec{z}_0 + Z(t)\int_{x_0}^{x} Z^{-1}(t)\vec{b}(t)dt. \tag{2.8}$$

Observación 2.1.15. Como ilustración, y sin usar la equivalencia con sistemas de orden 1, discutamos el caso particular de EDOs lineales homogeneas de orden $n = 2$

$$x'' + P(t)x' + Q(t)x = f(t).$$

Conocidas dos soluciones independientes $x_1(t)$ y $x_2(t)$ de la ecuación homogenea, escribimos cualquier solución $x(t)$ como combinación lineal de ambas

$$x(t) = C_1(t)x_1(t) + C_2(t)x_2(t)$$

donde permitimos que C_1 y C_2 dependan de t ("variación de la constante"). Derivando la ecuación anterior se obtiene

$$x'(t) = C_1x_1'(t) + C_1'x_1(t) + C_2x_2'(t) + C_2'x_2(t).$$

Derivando de nuevo, $x''(t) = \ldots$, sustituyendo en $x'' + P(t)x' + Q(t)x = f(t)$ y teniendo en cuenta que $x_{1,2}$ son soluciones de la ecuación homogenea, $x''_{1,2} + P(t)x'_{1,2} + Q(t)x_{1,2} = 0$, al final se llega a que

$$\frac{d}{dt}(x_1C_1' + x_2C_2') + P(t)(x_1C_1' + x_2C_2') + (x_1'C_1' + x_2'C_2') = f(t).$$

Para determinar $C_{1,2}$ necesitamos dos ecuaciones y, por lo pronto, solo tenemos una. Vamos a imponer que $C_{1,2}$ verifiquen además $x_1C_1' + x_2C_2' = 0$ (la justificación es que al final se obtiene una solución), con lo cual la ecuación anterior se simplifica a $x_1'C_1' + x_2'C_2' = f(t)$. Con estas dos condiciones

$$x_1C_1' + x_2C_2' = 0, \quad x_1'C_1' + x_2'C_2' = f(t),$$

podemos despejar

$$C_1' = \frac{\begin{vmatrix} 0 & x_2(t) \\ f(t) & x_2'(t) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_1(t) & x_2(t) \\ x_1'(t) & x_2'(t) \end{vmatrix}}, \quad C_2' = \frac{\begin{vmatrix} x_1(t) & 0 \\ x_1'(t) & f(t) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_1(t) & x_2(t) \\ x_1'(t) & x_2'(t) \end{vmatrix}},$$

y obtener $C_{1,2}$ integrando. Este proceso es general, pero bastante laborioso. Para ecuaciones con coeficientes constantes y funciones $f(t)$ de tipo polinómico, exponencial, seno y coseno, usaremos mejor el método de los coeficientes indeterminados que explicaremos más adelante.■

2.2. EDOs lineales con coeficientes constantes

Existen métodos de resolución de ecuaciones lineales como (2.3) basados en desarrollos en serie de potencias. No obstante, nosotros no trataremos estos métodos aquí y pasaremos a abordar el caso más sencillo en que los coeficientes $a_j(t)$ de (2.3) son constantes $a_k(t) = a_k$. Sin pérdida de generalidad podemos tomar $a_n = 1$, de manera que la ecuación a estudiar es

$$L(x) = x^{(n)} + a_{n-1}x^{(n-1)} + \cdots + a_1x' + a_0 = f.$$

Comencemos por buscar un sistema fundamental de la EDO homogénea $L(x) = 0$.

2.2.1. EDOs homogéneas con coeficientes constantes

Para encontrar la solución general de

$$\boxed{L(x) = x^{(n)} + a_{n-1}x^{(n-1)} + \cdots + a_1\dot{x} + a_0x = 0,} \tag{2.9}$$

ensayaremos funciones del tipo $\boxed{x(t) = e^{\lambda t}}$ que, sustituidas en la ecuación anterior $L(x) = 0$, nos queda $L(e^{\lambda t}) = e^{\lambda t}L[\lambda] = 0$, donde

$$\boxed{L[\lambda] = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0,} \tag{2.10}$$

denota un polinomio de grado n en λ al que denominaremos *polinomio característico* de (2.9). La ecuación $L[\lambda] = 0$ se denomina *ecuación característica o secular.*

Teorema 2.2.1. *La solución general de (2.9) es una combinación lineal de las funciones*

$$t^k e^{\beta t}\cos(\omega t),\ \ t^k e^{\beta t}\,\mathrm{sen}(\omega t),$$

donde $\lambda = \beta + i\omega$ recorre el conjunto de las raíces de (2.10) con $\omega \geq 0$, y $0 \leq k \leq m(\lambda)$, siendo $m(\lambda)$ la multiplicidad de λ.

Demostración: basta demostrar que si γ es una raíz de $L[\lambda]$ de multiplicidad m y $0 \leq k \leq m$, entonces $t^k e^{\gamma t}$ es solución de $L[D](x) = 0$ (con $L[D] \equiv L$).[1] A este fin, apréciese que si $L[\lambda]$ factoriza como $L[\lambda] = L_1[\lambda]L_2[\lambda]$ entonces si $L_2[\lambda](x) = 0 \Rightarrow L[\lambda](x) = 0$. Como nuestro objetivo es demostrar que si $(\lambda-\gamma)^m$ divide a $L[\lambda]$ entonces $L[D](t^k e^{\gamma t}) = 0$ para cada $0 \leq k < m$, bastará con probar que

$$(D-\gamma)^{k+1}(t^k e^{\gamma t}) = 0 \text{ para cada } k \geq 0.$$

Esto es simple si razonamos por inducción. La afirmación es obviamente cierta cuando $k = 0$. Supuesta cierta para $k-1 \to (D-\gamma)^k(t^{k-1}e^{\gamma x}) = 0$, se tiene que:

$$\begin{aligned}(D-\gamma)^{k+1}t^k e^{\gamma t} &= (D-\gamma)^k\left((D-\gamma)t^k e^{\gamma t}\right)\\ &= (D-\gamma)^k\left(kt^{k-1}e^{\gamma t} + t^k\gamma e^{\gamma t} - \gamma t^k e^{\gamma t}\right)\\ &= k(D-\gamma)^k\left(t^{k-1}e^{\gamma t}\right) = 0,\end{aligned}$$

de modo que también será cierta para k. Es inmediato comprobar también que dichas soluciones son linealmente independientes. ■

Veamos algunos ejemplos

Ejemplo 2.2.2. (Raices reales y distintas) Queremos hallar la solución general de $\ddot{x} - 4\dot{x} - 5x = 0$. Ensayando $x(t) = e^{\lambda t}$ tenemos la ecuación característica $\lambda^2 - 4\lambda - 5 = 0$ que tiene como raíces $\lambda = 5, -1$. La solución general es pues $x(t) = C_1 e^{5t} + C_2 e^{-t}$ □

Ejemplo 2.2.3. (Raices reales dobles) Queremos hallar la solución general de $\ddot{x} + 4\dot{x} + 4x = 0$. Ensayando $x(t) = e^{\lambda t}$ tenemos la ecuación característica $\lambda^2 + 4\lambda + 4 = 0$ que tiene como raíces $\lambda = -2$ doble. La solución general es pues $x(t) = C_1 e^{-2t} + C_2 t e^{-2t}$ □

Ejemplo 2.2.4. (Raices complejas) Queremos hallar la solución general de $\ddot{x} + 2\dot{x} + 5x = 0$. Ensayando $x(t) = e^{\lambda t}$ tenemos la ecuación característica $\lambda^2 + 2\lambda + 5 = 0$ que tiene como raíces $\lambda_\pm = -1 \pm 2i$, luego, utilizando la *fórmula de Euler*

$$e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\,\mathrm{sen}(\theta) \tag{2.11}$$

podemos poner $e^{\lambda_\pm t} = e^{(-1\pm 2i)t} = e^{-t}e^{\pm i2t} = e^{-t}(\cos(2t) \pm i\,\mathrm{sen}(2t))$. Tomando las partes real e imaginaria, la solución general se escribe $x(t) = C_1 e^{-t}\cos(2t) + C_2 e^{-t}\,\mathrm{sen}(2t)$ □

[1] Nótese que si, en particular, $\gamma = \beta + i\omega$ tiene parte imaginaria $\omega \neq 0$, entonces se tendrá

$$0 = L[D](t^k e^{\gamma t}) = L[D](t^k e^{\beta t}\cos(\omega t) + it^k e^{at}\,\mathrm{sen}(\omega t)) = L[D](t^k e^{\beta t}\cos(\omega t)) + iL[D](t^k e^{at}\,\mathrm{sen}(\omega t)),$$

y por tanto $L[D](t^k e^{\beta t}\cos(\omega t)) = 0 = L[D](t^k e^{\beta t}\,\mathrm{sen}(\omega t))$.

Ejercicio 2.2.5. Resolver $4\ddot{x} + 25x = 0$ con condiciones iniciales $x(0) = 10, \dot{x}(0) = 25$.
Respuesta: $x(t) = 10(\cos(5t/2) + \operatorname{sen}(5t/2))$. □

Ejercicio 2.2.6. Hallar la solución general de $\ddot{x} - 4\dot{x} - x = 0$.
Respuesta: $x(t) = e^{2t}(C_1 e^{\sqrt{5}t} + C_2 e^{-\sqrt{5}t})$. □

Ejercicio 2.2.7. Hallar la solución general de $4\ddot{x} - 20\dot{x} + 25x = 0$.
Respuesta: $x(t) = e^{5t/2}(C_1 + C_2 t)$. □

Ejercicio 2.2.8. Hallar la solución general de $\ddot{x} + 10\dot{x} + 25x = 0$.
Respuesta: $x(t) = e^{-5t}(C_1 + C_2 t)$. □

2.2.2. EDOs no homogéneas con coeficientes constantes

Las soluciones de la ecuación lineal homogénea $L(x) = 0$ y de la no homogénea $L(x) = f(t)$ guardan una relación muy estrecha, como pone de manifiesto el Teorema 2.1.13.

Respecto al cálculo de soluciones particulares x_p de $L(x) = f$, a veces resulta útil el "principio de superposición"para EDOs lineales no homogéneas discutido en el Teorema 2.1.14.

Conocido un sistema fundamental de la ecuación homogénea $L(x) = 0$, ya hemos discutido el *método de variación de las constantes* como método general para calcular una solución particular x_p de $L(x) = f$. No obstante, para coeficientes constantes existe otro método más práctico y directo, llamado *método de los coeficientes indeterminados*, para el caso simple en que el término inhomogéneo $f(t)$ sea producto de exponenciales, polinomios en t, senos y cosenos.

Teorema 2.2.9. ***(Método de los coeficientes indeterminados)*** *Supongamos que*

$$f(t) = e^{\beta t}(p(t)\cos(\omega t) + q(t)\operatorname{sen}(\omega t)),$$

donde $p(t)$ y $q(t)$ son polinomios de grado a lo sumo $k \geq 0$. Sea $\mu = \beta + i\omega$. Entonces se tienen las siguientes posibilidades:

(i) Si μ NO es raíz del polinomio característico (2.10) entonces $L(x) = f$ tiene una solución particular de la forma

$$x_p(t) = e^{\beta t}(r(t)\cos(\omega t) + s(t)\operatorname{sen}(\omega t)),$$

con $r(t)$ y $s(t)$ polinomios de grado a lo sumo k, cuyos $2(k+1)$ coeficientes se determinan sustituyendo x_p en $L(x_p) = f$ e igualando término a término.

(ii) Si μ es raíz del polinomio característico (2.10) con multiplicidad m, entonces $L(x) = f$ tiene una solución particular de la forma

$$x_p(t) = e^{\beta t}t^m(r(t)\cos(\omega t) + s(t)\operatorname{sen}(\omega t)),$$

con $r(t)$ y $s(t)$ polinomios de grado a lo sumo k. En este caso diremos que existe "RESONANCIA".

La demostración de este Teorema puede verse en el Apéndice B.

Ejemplo 2.2.10. Resolver $\ddot{x} - 4\dot{x} - 5x = t^2 + 2e^{3t}$. Según el ejemplo 2.2.2 la solución general de la ecuación homogénea es $x_h(t) = C_1e^{5t} + C_2e^{-t}$. Como el lado derecho de la ecuación dada tiene un polinomio de segundo grado y una exponencial, usando el principio de superposición 2.1.14 y el método de los coeficientes indeterminados 2.2.9, proponemos ensayar como solución particular $x_p(t) = At^2 + Bt + C + De^{3t}$ (nótese que ni t^2 ni e^{3t} aparecen dentro del sistema fundamental de soluciones de la ecuación homogénea, es decir, no existe "resonancia" en este caso). Sustituyendo $x_p(t)$ en la ecuación diferencial y reagrupando términos se tiene que

$$(2A - 4B - 5C) + (-8A - 5B)t - 5At^2 - 8De^{3t} = t^2 + 2e^{3t}.$$

Igualado coeficientes de términos comunes a derecha e izquierda de la igualdad y resolviendo un sistema de 4 ecuaciones con 4 incógnitas se obtiene:

$$A = -1/5, B = 8/25, C = -42/125, D = -1/4.$$

Así, la solución general es:

$$x(t) = x_h(t) + x_p(t) = C_1e^{5t} + C_2e^{-t} - t^2/5 + 8t/25 - 42/125 - e^{3t}/4.$$

□

Ejemplo 2.2.11. Resolver $\ddot{x} + 10\dot{x} + 25x = 20\cos(2t)$. Según el ejemplo 2.2.8 la solución general de la ecuación homogénea es $x_h(t) = e^{-5t}(C_1 + C_2t)$. Como el lado derecho de la ecuación dada tiene un coseno y éste no aparece dentro del sistema fundamental de soluciones de la ecuación homogénea (es decir, no existe "resonancia" en este caso), se ensaya una solución particular del tipo $x_p(t) = A\cos(2t) + B\,\mathrm{sen}(2t)$, con lo cual:

$$(21A + 20B)\cos(2t) + (21B - 20A)\,\mathrm{sen}(2t) = 20\cos(2t).$$

Igualando coeficientes de términos comunes a derecha e izquierda de la igualdad y resolviendo un sistema de 2 ecuaciones con 2 incógnitas se obtiene $A = 420/841$ Y $B = 400/841$. Así, la solución general es:

$$x(t) = x_h(t) + x_p(t) = e^{5t}(C_1 + C_2t) + \frac{420}{841}\cos(2t) + \frac{400}{841}\,\mathrm{sen}(2t).$$

□

Ejemplo 2.2.12. Resolver $\ddot{x} + 4\dot{x} + 4x = e^{-2t}$. Según el ejemplo 2.2.3 la solución general de la ecuación homogénea es $x_h(t) = e^{-2t}(C_1 + C_2t)$. Como el lado derecho de la ecuación diferencial coincide con una de las soluciones de la ecuación homogénea, en este caso existe resonancia. Además, la multiplicidad es $m = 2$. Esto implica que la solución particular a ensayar es ahora de la forma $x_p(t) = At^2e^{-2t}$, que introducida en la ecuación diferencial nos da $A = 1/2$. Así, la solución general es:

$$x(t) = x_h(t) + x_p(t) = e^{-2t}(C_1 + C_2t + \frac{1}{2}t^2).$$

□

En los ejemplos anteriores, las constantes arbitrarias C_1 y C_2 se fijan con las condiciones iniciales $x(t_0) = x_0$ y $\dot{x}(t_0) = \dot{x}_0$. Por ejemplo:

Ejemplo 2.2.13. Resolver $\ddot{x} + x = 4\cos t$ con condiciones iniciales $x(0) = 2, \dot{x}(0) = -1$. La ecuación característica es $\lambda^2 + 1 = 0$, que tiene dos soluciones complejas $\lambda_\pm = \pm i$. Así, $x_h(t) = C_1 \cos t + C_2 \operatorname{sen} t$. Como el término inhomogeneo $4\cos t$ aparece entre las soluciones de la ecuación homogénea, existe resonancia. Así, la solución particular a ensayar es: $x_p(t) = At\cos t + Bt\operatorname{sen} t$, que introducida en la ecuación diferencial nos da: $A = 0, B = 2$. Así la solución general es:

$$x(t) = x_h(t) + x_p(t) = C_1 \cos t + C_2 \operatorname{sen} t + 2t \operatorname{sen} t.$$

Imponiendo las condiciones iniciales $x(0) = 2, \dot{x}(0) = -1$, se obtienen: $C_1 = 2, C_2 = -1$, con lo cual la solución del problema es:

$$x(t) = 2\cos t - \operatorname{sen} t + 2t \operatorname{sen} t.$$

□

Observación 2.2.14. Nótese que las condiciones iniciales se imponen una vez calculada la solución general $x(t) = x_h(t) + x_p(t)$. Es un ERROR bastante frecuente que el alumno imponga las condiciones iniciales sobre sólo $x_h(t)$, sin tener en cuenta la solución particular $x_p(t)$, algo que NO es correcto.

Ejercicio 2.2.15. Resolver la ecuación diferencial

$$\ddot{x} + \beta\dot{x} + x = \operatorname{sen}(\omega t)$$

con condiciones iniciales $x(0) = 2, \dot{x}(0) = -1$ cuando:

a) $\beta = 2, \omega = 0$. *Respuesta:* $x(t) = e^{-t}(2 + t)$

b) $\beta = 0, \omega = 1$. *Respuesta:* $x(t) = \frac{1}{2}(4\cos[t] - t\cos[t] - \operatorname{sen}[t])$

□

Ejercicio 2.2.16. Resolver la ecuación diferencial

$$\ddot{x} + \beta\dot{x} + x = e^{-at}\operatorname{sen}(\omega t)$$

con condiciones iniciales $x(0) = 2, \dot{x}(0) = -1$ cuando:

a) $\beta = 2, a = 1, \omega = 1$. *Respuesta:* $x(t) = e^{-t}(2 + 2t - \operatorname{sen} t)$

b) $\beta = a = 0, \omega = 2$ *Respuesta:* $x(t) = \frac{1}{3}(6\cos[t] - \operatorname{sen}[t] - \operatorname{sen}[2\ t])$

□

Ejercicio 2.2.17. Proponer una solución particular para la ecuación:

$$\ddot{x} + \dot{x} + x = te^{-t/2} + t^2 \operatorname{sen}(\frac{\sqrt{3}}{2}t) + e^{-t/2}\cos(\frac{\sqrt{3}}{2}t)$$

(No es necesario determinar los coeficientes). □

Ejercicio 2.2.18. Escribir la solución general (en función de dos constantes arbitrarias) de la ecuación diferencial

$$\ddot{x} + \beta\dot{x} + x = e^{-at}(A\cos(\omega t) + B\operatorname{sen}(\omega t))$$

para los casos:

a) $\beta = 2, A = B = 0.$
Respuesta: $x(t) = x_h(t) = C_1e^{-t} + C_2te^{-t}$

b) $\beta = 2, a = A = 1, B = \omega = 0.$
Respuesta: $x(t) = x_h(t) + x_p(t) = x_h(t) + \frac{1}{2}t^2e^{-t}$

c) $\beta = 2, a = 1, A = B = t, \omega = 0$
Respuesta: $x(t) = x_h(t) + \frac{1}{6}t^3e^{-t}$

d) $\beta = 2, a = 1, A = t^2, B = \omega = 0$
Respuesta: $x(t) = x_h(t) + \frac{1}{12}t^4e^{-t}$

e) $\beta = 0, A = B = 0$
Respuesta: $x(t) = x'_h(t) = C_1\cos t + C_2\operatorname{sen} t$

f) $\beta = 0, a = 1, A = B = t, \omega = 0$
Respuesta: $x(t) = x'_h(t) + \frac{1}{2}(e^{-t} + te^{-t})$

g) $\beta = a = 0, A = B = \omega = 1.$
Respuesta: $x(t) = x'_h(t) + \frac{-t}{2}(\operatorname{sen}(t) - \cos(t))$

h) $\beta = a = 0, A = t, B = 0, \omega = 1$
Respuesta: $x(t) = x'_h(t) + \frac{t}{4}\cos t + \frac{1}{4}t^2\operatorname{sen} t$

i) $\beta = a = 0, A = B = t, \omega = 1$
Respuesta: $x(t) = x'_h(t) + \frac{1}{4}(t - t^2)\cos t + \frac{1}{4}(t + t^2)\operatorname{sen} t$

¿En qué caso o casos se produce "resonancia" ? □

Ejercicio 2.2.19. (Práctica de ordenador) Obtenga las soluciones de los ejercicios anteriores usando el comando DSolve de *Mathematica* descrito en la página 109 de la referencia [5] y represente gráficamente las soluciones. □

Método de Fourier para funciones $f(t)$ periódicas

El resultado del teorema 2.2.9 puede aplicarse a funciones periódicas $f(t) = f(t+2nT)$ de periodo $2T$ que cumplen determinadas condiciones generales (como continuidad de f y f' a trozos), para las cuales es posible un desarrollo en serie de senos y cosenos

$$f(t) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{j=1}^{\infty} \left(\alpha_j \cos \frac{j\pi}{T} t + \beta_j \operatorname{sen} \frac{j\pi}{T} t \right)$$

con coeficientes

$$\alpha_j = \frac{1}{T} \int_{-T}^{T} f(t) \cos \frac{j\pi}{T} t \, dt, \quad \beta_j = \frac{1}{T} \int_{-T}^{T} f(t) \operatorname{sen} \frac{j\pi}{T} t \, dt.$$

Si ni $\gamma_1 = i\frac{\pi}{T}$ ni ninguno de sus armónicos $\gamma_j = i\frac{j\pi}{T}$ son raíces de (2.10), entonces podemos ensayar una solución particular del tipo

$$x_p(t) = \frac{A_0}{2} + \sum_{j=1}^{\infty} \left(A_j \cos \frac{j\pi}{T} t + B_j \operatorname{sen} \frac{j\pi}{T} t \right),$$

con coeficientes A_j, B_j a determinar.

2.3. PVI: Vibraciones mecánicas y eléctricas

Estudiaremos el movimiento unidimensional de una partícula de masa m sometida a fuerzas de diferente naturaleza: elásticas o restauradoras $F_e(t, x)$, viscosas o resistivas $F_v(t, x, \dot{x})$ y otras fuerzas externas $F_{\text{ext}}(t)$ dependientes del tiempo. La ecuación diferencial que describe la evolución de la posición $x(t)$ en función del tiempo viene dada por la segunda ley de Newton:

$$m\ddot{x} = F_e(t, x) + F_v(t, x, \dot{x}) + F_{\text{ext}}(t), \tag{2.12}$$

que es una EDO de orden 2 cuyas condiciones iniciales

$$x(t_0) = x_0, \quad v(t_0) = \dot{x}(t_0) = v_0,$$

consisten en especificar la posición $x(t)$ y la velocidad $v(t) = \frac{dx(t)}{dt} \equiv \dot{x}(t)$ en un instante inicial t_0.

Pasemos a discutir distintas expresiones de dichas fuerzas y sus aproximaciones lineales, las cuales tomaremos como punto de partida para un tratamiento analítico de la ecuación (2.12)

1. *Fuerzas recuperadoras o elásticas F_e.* Hemos permitido, en general, fuerzas restauradoras $F_e(t, x)$ dependientes de la posición y del tiempo. Supongamos que x denota

un desplazamiento alrededor de una posición de equilibrio y que $F_e(t,x)$ admite un desarrollo en serie alrededor de dicha posición de equilibrio de la forma:

$$F_e(t,x) = -k_1(t)x - k_3(t)x^3 + \dots,$$

donde sólo intervienen potencias impares del desplazamiento x debido que la fuerza restauradora debe ser impar $F_e(t,x) = -F_e(t,-x)$.

a) *Resorte lineal.* Cuando los desplazamientos son pequeños, podemos despreciar órdenes superiores en el desarrollo de F_e y considerar

$$F_e(t,x) = -k_1(t)x.$$

1) *Ley de Hooke.* El caso más sencillo e ideal es aquél en el cual las características físicas del resorte no cambian con el tiempo, es decir, cuando $k_1(t) = k > 0$ es independiente del tiempo, con lo cual la fuerza elástica queda:

$$F_e(t,x) = -kx.$$

2) *Resorte desgastable.* Sin embargo, en el mundo real es lógico esperar que el resorte de debilite (o "pierda brío") conforme pasa el tiempo; por ejemplo, de la forma $k_1(t) = ke^{-\alpha t}$, $k, \alpha > 0$. En este caso, la EDO del sistema "masa-resorte"

$$m\ddot{x} + ke^{-\alpha t}x = 0$$

se transforma en una

$$\text{Ec. de Bessel } (\nu = 0): \quad s^2\frac{d^2x}{ds^2} + s\frac{dx}{ds} + s^2x = 0. \tag{2.13}$$

mediante el cambio de variable

$$s = \frac{2}{\alpha}\sqrt{\frac{k}{m}}e^{-\alpha t/2}.$$

La solución de esta ecuación se obtiene por desarrollo en serie de potencias (véase el siguiente capítulo) y puede escribirse en términos de las funciones de Bessel de primera y segunda clase de la forma:

$$x(t) = c_1 J_0\left(\frac{2}{\alpha}\sqrt{\frac{k}{m}}e^{-\alpha t/2}\right) + c_2 Y_0\left(\frac{2}{\alpha}\sqrt{\frac{k}{m}}e^{-\alpha t/2}\right).$$

3) *Resorte que se endurece.* Cuando un resorte se somete a un ambiente en que la temperatura decrece rápidamente, la constante elástica crece con el tiempo, por ejemplo, de forma lineal $k_1(t) = kt$. En este caso, la EDO del sistema "masa-resorte" viene descrito por la

$$\text{Ec. de Airy}: m\ddot{x} + ktx = 0. \tag{2.14}$$

que se resuelve por series de potencias (véase siguiente tema, ejemplo 3.1.3). Dicha ecuación también aparece al estudiar la difracción de la luz, la difracción de las ondas de radio en torno a la superficie de la Tierra, en aerodinámica y en el pandeo de una columna vertical uniforme que se flexiona bajo su propio peso.

b) *Resorte no lineal.* Para desplazamientos no tan pequeños, el muelle abandona su comportamiento lineal y la fuerza elástica adopta (en el caso independiente del tiempo) la forma $F_e(x) = -kx - k_3x^3$, donde hemos despreciado términos de orden superior. Duffing estudió las oscilaciones forzadas de una masa puntual sometida a una fuerza recuperadora no lineal modelada por la ecuación diferencial:

$$\text{Ec. de Duffing}: \ m\ddot{x} + kx + k_3x^3 = F_0 \cos \omega t.$$

Caben dos casos interesantes aquí:

1) *Resorte duro.* $k_3 > 0$, para el cual la fuerza recuperadora es mayor (en valor absoluto) que la del resorte lineal.
2) *Resorte suave.* $k_3 < 0$, para el cual la fuerza recuperadora es menor (en valor absoluto) que la del resorte lineal.

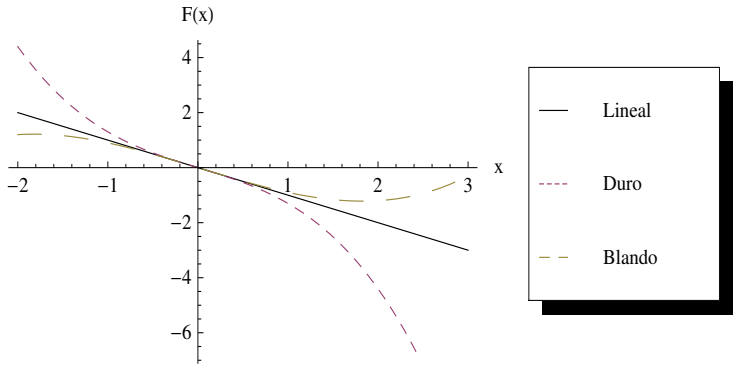


Figura 2.1: Fuerza $F_e(x) = -kx - k_3x^3$ para un resorte lineal ($k_3 = 0$), uno duro ($k_3 > 0$) y uno blando ($k_3 < 0$)

2. *Fuerzas resistivas o viscosas* F_v. Supongamos que $F_v(t, x, \dot{x})$ admite un desarrollo en serie de la forma:

$$F_v(t, x, \dot{x}) = -c_1(t, x)\dot{x} - c_2(t, x)|\dot{x}|\dot{x} - c_3(t, x)|\dot{x}|^2\dot{x} + \ldots,$$

donde los valores absolutos garantizan que la fuerza viscosa se oponga siempre al movimiento.

a) *Fuerza viscosa lineal.* Para velocidades pequeñas, se pueden despreciar términos de orden superior y tomar

$$F_v(t, x, \dot{x}) = -c_1(t, x)\dot{x}.$$

Caben varias posibilidades aquí:

1) *Coeficiente de viscosidad constante.* $c_1(t, x) = c$=constante> 0.
2) *Coeficiente de viscosidad variable.* Dentro de las posibilidades destacamos el caso $c_1(t, x) = c(x^2 - a^2)$ que da lugar a la

$$\text{Ec. de van der Pol}: \ m\ddot{x} + c(x^2 - a^2)\dot{x} + kx = 0.$$

El hecho de que la fuerza viscosa sea $F_v(|x| > |a|) < 0$ y $F_v(|x| < |a|) > 0$ significa que la partícula se acelera para $|x| < |a|$ y se retarda para $|x| > |a|$ (o, de otra forma, la partícula absorbe energía cuando $|x| < |a|$ y disipa cuando $|x| > |a|$) tendiendo, por tanto, permanecer en oscilación estacionaria. Este es el resultado del Teorema de Liénard (véase el libro de ecuaciones diferenciales de Simmons, página 518), el cual asegura para ecuaciones como la de van der Pol la existencia de una única trayectoria cerrada que rodea al origen en el plano de fases, a la que tienden en forma de espirales todas las demás trayectorias cuando $t \to \infty$.

b) *Fuerza viscosa no lineal.* Para velocidades no tan pequeñas, y dependiendo del tipo de medio viscoso, a veces es necesario añadir nuevos términos en el desarrollo de F_v, por ejemplo:

$$F_v(\dot{x}) = -c_1\dot{x} - c_2|\dot{x}|\dot{x}.$$

En la siguiente sección sólo consideraremos el caso lineal independiente del tiempo, con lo cual, la ecuación a estudiar es:

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F_{\text{ext}}(t) \to \ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = F_{\text{ext}}(t)/m,$$

donde hemos puesto $2\beta = c/m$ y $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ por comodidad de cálculo (véase más adelante). Como fuerzas externas $F_{\text{ext}}(t)$ utilizaremos, por simplicidad, funciones de tipo periódico $F_{\text{ext}}(t) = F_{\text{ext}}(t + T)$.

2.3.1. Oscilador armónico simple

Comencemos considerando el caso en que no existe fuerza viscosa ($\beta = 0$) ni fuerzas externas $F_{\text{ext}}(t) = 0$. Así, la ecuación a estudiar es:

$$\boxed{\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0.}$$

Ensayando la solución $x(t) = e^{\lambda t}$ obtenemos la ecuación característica

$$\lambda^2 + \omega_0^2 = 0 \Rightarrow \lambda_\pm = \pm i\omega_0,$$

luego, por el teorema 2.2.1, la solución general es:

$$x(t) = c_+ \operatorname{sen}(\omega_0 t) + c_- \cos(\omega_0 t) = A\cos(\omega_0 t - \delta),$$

donde las constantes de integración A, δ representan la *amplitud* y el *desfase*, respectivamente. Estas constantes se determinan a través de las condiciones iniciales

$$\left.\begin{array}{l} x(0) = x_0 \\ \dot{x}(0) = v_0 \end{array}\right\} \Rightarrow \delta = \arctan(\frac{v_0}{\omega_0 x_0}),\ A = x_0\sqrt{1 + \left(\frac{v_0}{x_0\omega_0}\right)^2}.$$

El resultado es un movimiento sinusoidal de periodo $T = 2\pi/\omega_0$. Las órbitas en el espacio de las fases $\dot{x}(x)$ son *elipses o vórtices* ya que

$$\frac{x(t)^2}{C^2} + \frac{\dot{x}(t)^2}{C^2\omega_0^2} = 1.$$

2.3.2. Oscilador armónico amortiguado

Introduzcamos ahora una fuerza viscosa en el oscilador armónico simple, de forma que la ecuación a estudiar es:

$$\boxed{\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0.}$$

Ensayando la solución $x(t) = e^{\lambda t}$ obtenemos la ecuación característica

$$\lambda^2 + 2\beta\lambda + \omega_0^2 = 0 \Rightarrow \lambda_\pm = -\beta \pm \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}.$$

Caben diferentes posibilidades aquí dependiendo de los valores relativos de β y ω_0. Estudiemos cada uno por separado.

Oscilador armónico subamortiguado ($\beta < \omega_0$)

En este caso tenemos dos raíces complejas $\lambda_\pm = -\beta \pm i\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} = -\beta \pm i\omega$ y la solución general puede escribirse como:

$$x(t) = e^{-\beta t}\left(c_1 \operatorname{sen}(\omega t) + c_2 \cos(\omega t)\right) = \underbrace{e^{-\beta t}A}_{\tilde{A}(t)}\cos(\omega t - \delta),\ \ \omega \equiv \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}.$$

Las constantes de integración A, δ (amplitud y desfase) se determinan a través de las condiciones iniciales

$$\left.\begin{array}{l} x(0) = x_0 \\ \dot{x}(0) = v_0 \end{array}\right\} \Rightarrow A = x_0\sqrt{1 + \left(\frac{\beta x_0 + v_0}{\omega x_0}\right)^2},\ \ \delta = \arctan\left(\frac{\beta x_0 + v_0}{\omega x_0}\right).$$

El resultado es un movimiento oscilatorio de frecuencia $\omega \equiv \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$ (menor que la frecuencia natural ω_0) y amplitud decreciente $\tilde{A}(t) = e^{-\beta t}A \to 0$ cuando $t \to \infty$ (véase la figura 2.2). Las órbitas en el espacio de las fases $\dot{x}(x)$ son *espirales* (véase la figura 2.3).

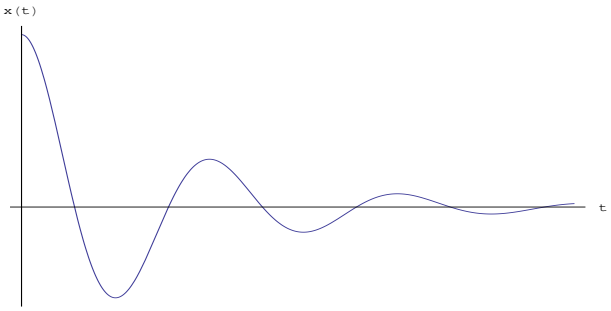


Figura 2.2: La amplitud de las oscilaciones decrece con el tiempo para un oscilador subamortiguado

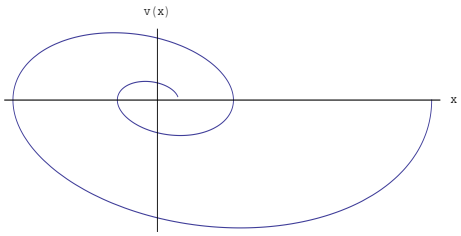


Figura 2.3: Órbita espiral en el plano de fases "velocidad-posición" para un oscilador subamortiguado

Oscilador armónico críticamente amortiguado ($\beta = \omega_0$)

En este caso tenemos una raíz real doble $\lambda = -\beta$ y la solución general puede escribirse como:

$$x(t) = c_1 e^{-\beta t} + c_2 t e^{-\beta t}.$$

Las constantes de integración c_1, c_2 se determinan a través de las condiciones iniciales

$$\left.\begin{array}{l} x(0) = x_0 \\ \dot{x}(0) = v_0 \end{array}\right\} \Rightarrow c_1 = x_0,\ c_2 = v_0 + \beta x_0.$$

El resultado es un movimiento no oscilatorio en el que $x(t)$ decrece con el tiempo de forma exponencial (véase la figura 2.4). Nótese que la partícula puede pasar por la posición de equilibrio a lo sumo una vez. Las órbitas en el espacio de las fases $\dot{x}(x)$ son *nodos límite*.

Oscilador armónico sobreamortiguado ($\beta > \omega_0$)

En este caso tenemos dos raíces reales $\lambda_\pm = -\beta \pm \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}$ y la solución general puede escribirse como:

$$x(t) = c_- e^{\lambda_- t} + c_+ e^{\lambda_+ t} = e^{-\beta t}\left(c_+ e^{\sqrt{\beta^2-\omega_0^2}t} + c_- e^{-\sqrt{\beta^2-\omega_0^2}t}\right),$$

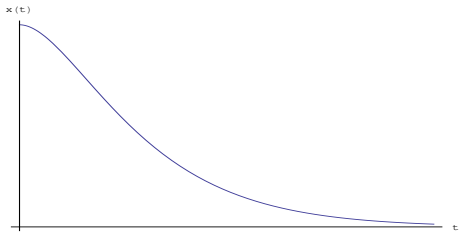


Figura 2.4: La amplitud de las oscilaciones decrece con el tiempo para un oscilador críticamente amortiguado

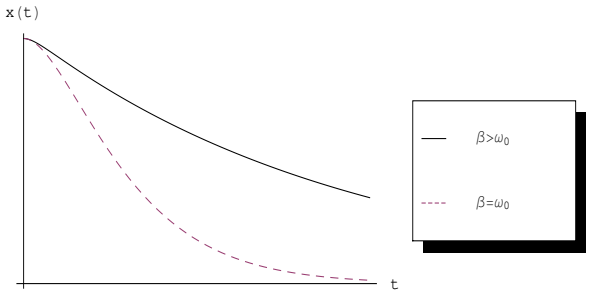


Figura 2.5: Comparación entre el oscilador críticamente amortiguado y sobreamortiguado

Las constantes de integración $c_\pm$ se determinan a través de las condiciones iniciales

$$\left.\begin{array}{l} x(0) = x_0 \\ \dot{x}(0) = v_0 \end{array}\right\} \Rightarrow c_+ = \frac{v_0 - \lambda_- x_0}{\lambda_+ - \lambda_-},\ c_- = \frac{-v_0 + \lambda_+ x_0}{\lambda_+ - \lambda_-}.$$

El resultado es un movimiento no oscilatorio en el que $x(t)$ decrece con el tiempo de forma exponencial, al igual que en el caso crítico anterior. No obstante, la mayor viscosidad para el oscilador sobreamortiguado hace que la amplitud vaya a cero más lentamente (véase la figura 2.5).

Las órbitas en el espacio de las fases $\dot{x}(x)$ son *nodos*.

2.3.3. Oscilador armónico forzado: pulsaciones y resonancia pura

Supongamos primeramente que no existe amortiguamiento e introduzcamos una fuerza externa de tipo sinusoidal de la forma $F_{\text{ext}}(t) = F_0 \cos(\omega_e t)$, donde ω_e denota la frecuencia de la fuerza externa. La ecuación a estudiar es:

$$\boxed{\ddot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m} \cos(\omega_e t).}$$

Aplicando el método de los coeficientes indeterminados (teorema 2.2.9), ensayaremos una la solución particular del tipo $x_p(t) = A_1 \cos(\omega_e t) + A_2 \operatorname{sen}(\omega_e t)$. Introduciendo esta solu-

ción particular en la ecuación diferencial obtenemos que $A_1 = \frac{F_0/m}{\omega_0^2-\omega_e^2}$, $A_2 = 0$, con lo cual, la solución general de la ecuación no homogénea es la suma de la solución general de la homogénea (s.g.h.) más una particular de la no homogénea (s.p.n.h.):

$$x(t) = \underbrace{c_1 \cos \omega_0 t + c_2 \operatorname{sen} \omega_0 t}_{s.g.hh} + \underbrace{\frac{F_0/m}{\omega_0^2 - \omega_e^2} \cos \omega_e t}_{s.p.n.h.} .$$

Caben estudiar aquí dos fenómenos interesantes dependiendo de los valores relativos de la frecuencia natural ω_0 y la frecuencia externa ω_e.

Pulsaciones $\omega_e \approx \omega_0$

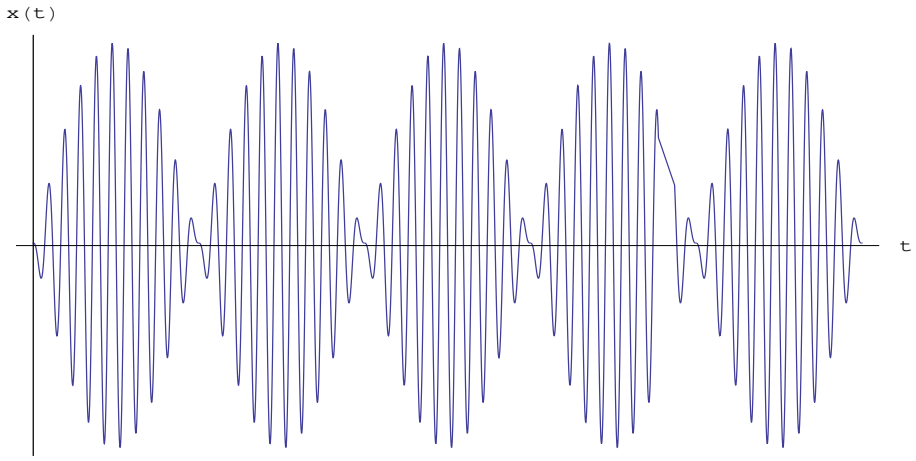


Figura 2.6: Fenómeno de las pulsaciones

Tomemos, por ejemplo, como condiciones iniciales

$$\left.\begin{array}{l} x(0) = 0 \\ \dot{x}(0) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow x(t) = \frac{F_0/m}{\omega_0^2 - \omega_e^2}(\cos \omega_e t - \cos \omega_0 t)$$
$$= \underbrace{\frac{F_0/m}{\omega_0^2 - \omega_e^2} 2 \operatorname{sen}\left(\frac{\omega_0 - \omega_e}{2} t\right)}_{A(t)} \operatorname{sen}\left(\frac{\omega_0 + \omega_e}{2} t\right),$$

donde se ha utilizado la identidad trigonométrica: $\cos a - \cos b = -2 \operatorname{sen} \frac{1}{2}(a-b) \operatorname{sen} \frac{1}{2}(a+b)$. La solución anterior se interpreta como una *oscilación rápida* de frecuencia $\frac{\omega_0+\omega_e}{2}$ (la media aritmética de la frecuencia natural y la externa) *modulada o envuelta* por una *oscilación lenta* de frecuencia pequeña $\frac{\omega_0-\omega_e}{2}$ cuando las frecuencias externa y natural son muy parecidas $\omega_e \approx \omega_0$ (¡pero distintas!). Véase figura 2.6.

Este fenómeno recibe el nombre de *latidos o pulsaciones* y es la base de la *amplitud modulada* (AM) en las emisoras de radio, donde el sonido audible (de menor frecuencia) modula o envuelve a las ondas de radio (de alta frecuencia). También es fácilmente detectable durante la "afinación de una guitarra".

Resonancia pura $\omega_e = \omega_0$

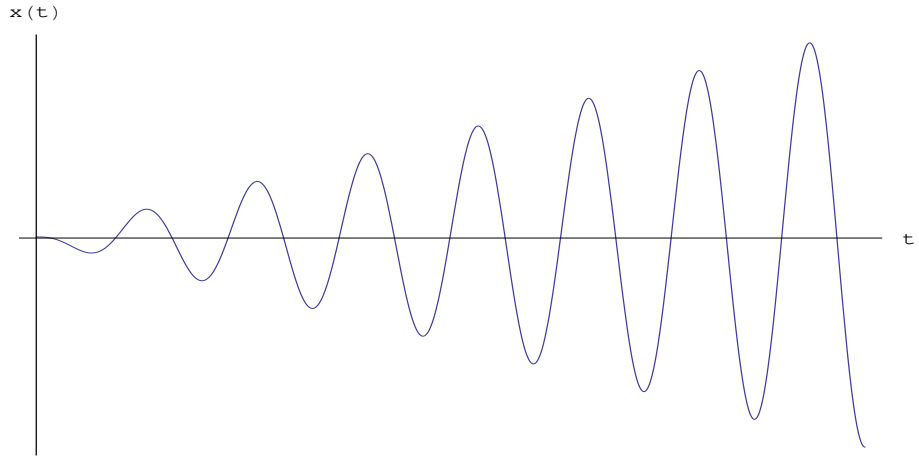


Figura 2.7: Crecimiento lineal en el tiempo de la amplitud para una resonancia pura

Cuando la frecuencia externa ω_e coincide exactamente con la frecuencia natural del sistema ω_0 (en ausencia de rozamiento), el método de los coeficientes indeterminados (teorema 2.2.9) nos sugiere una solución particular del tipo $x_p(t) = t(A_1\cos(\omega_e t) + A_2\,\mathrm{sen}(\omega_e t))$. Introduciendo esta solución particular en la ecuación diferencial obtenemos que $A_1 = 0$, $A_2 = \frac{F_0/m}{2\omega_e}$, con lo cual, la solución general de la ecuación no homogénea es la suma de la solución general de la homogénea (s.g.h.) más una particular de la no homogénea (s.p.n.h.):

$$x(t) = \underbrace{c_1\cos\omega_0 t + c_2\,\mathrm{sen}\,\omega_0 t}_{s.g.hh} + \underbrace{\frac{F_0/m}{2\omega_0} t\,\mathrm{sen}\,\omega_0 t}_{s.p.n.h.}\,.$$

Tomemos, por ejemplo, como condiciones iniciales

$$\left.\begin{array}{l} x(0) = x_0 \\ \dot{x}(0) = v_0 \end{array}\right\} \Rightarrow x(t) = \underbrace{\left(\frac{v_0}{\omega_0} + \frac{F_0/m}{2\omega_0} t\right)}_{A(t)} \mathrm{sen}\,\omega_0 t + x_0\cos\omega_0 t.$$

En este caso, el coeficiente $A(t)$ es lineal en el tiempo y ello supone que la amplitud de las oscilaciones crezca indefinidamente (véase la figura 2.7).

Este fenómeno se denomina *resonancia pura*, y puede conllevar la rotura del resorte cuando la amplitud de las oscilaciones alcanza el límite elástico del material del que está

fabricado dicho resorte. Esta es la vertiente "negativa" de la resonancia, la cual puede presentarse como un efecto "pernicioso" en las vibraciones de ciertas estructuras en construcción. No obstante, este fenómeno también subyace a la fabricación de *sintonizadores*, como los de una radio, que "filtran" una determinada frecuencia (véase sección 2.3.5 sobre la aplicación a la teoría de circuitos).

Ejercicio 2.3.1. Una lavadora está montada sobre un grueso cojinete de caucho que actúa como un resorte. El peso de la máquina deprime el cojinete 1cm. Cuando el rotor gira a ω radianes por segundo ejerce una fuerza vertical de $F_0 \cos \omega t$ Newtons. ¿A qué velocidad (en revoluciones por segundo) ocurrirán vibraciones de resonancia?. Desprecie el rozamiento. □

2.3.4. Oscilador armónico amortiguado y forzado: factor de amplificación

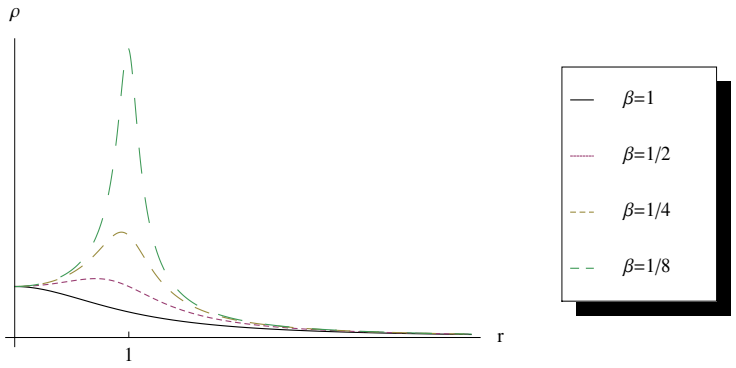


Figura 2.8: Dependencia del factor de amplificación $\rho(r)$ con $r \equiv \frac{\omega_e}{\omega_0}$ para distintos valores de viscosidad β

Supongamos ahora que existe amortiguamiento e introduzcamos una fuerza externa de tipo sinusoidal de la forma $F_{\text{ext}}(t) = F_0 \cos(\omega_e t)$, donde ω_e denota la frecuencia de la fuerza externa. La ecuación a estudiar es:

$$\boxed{\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m}\cos(\omega_e t).}$$

Aplicando el método de los coeficientes indeterminados (teorema 2.2.9), ensayaremos una la solución particular del tipo $x_p(t) = A_1 \operatorname{sen}(\omega_e t) + A_2 \cos(\omega_e t)$. Introduciendo esta solu-

ción particular en la ecuación diferencial anterior obtenemos que

$$\begin{aligned} x_p(t) &= \frac{2\beta\omega_e F_0}{(\omega_0^2-\omega_e^2)^2+4\beta^2\omega_e^2}\,\mathrm{sen}(\omega_e t)+\frac{(\omega_0^2-\omega_e^2)F_0/m}{(\omega_0^2-\omega_e^2)^2+4\beta^2\omega_e^2}\cos(\omega_e t) \\ &= \underbrace{\frac{F_0/m}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega_e^2)^2+4\beta^2\omega_e^2}}}_{A(\omega_e)}\cos(\omega_e t-\delta)=\underbrace{\rho(r)\frac{F_0}{k}}_{A(r)}\cos(\omega_e t-\delta), \end{aligned}$$

donde se ha definido:

$$\text{Factor de amplificación :}\qquad \rho(r)=\frac{1}{\sqrt{(1-r^2)^2+4\beta^2 r^2}},\ r\equiv\frac{\omega_e}{\omega_0},$$

$$\text{Desfase :}\qquad \delta=\arctan\left(\frac{2\beta\omega_e}{\omega_0^2-\omega_e^2}\right).$$

En la figura 2.8 tenemos un gráfico de la dependencia del factor de amplificación ρ en función del cociente $r\equiv\frac{\omega_e}{\omega_0}$. Observamos que $\rho(r)$ presenta un máximo para $r=1\Rightarrow\omega_e=\omega_0$, o sea, cuando la frecuencia de la fuerza externa coincide con la frecuencia natural de oscilador del resorte. Dicho máximo es más pronunciado conforme el coeficiente de rozamiento β es más pequeño, tendiendo a la resonancia pura (estudiada en el apartado anterior) en el límite $\beta\to 0$. En este caso, la amplitud $A(\omega_e)$ de las oscilaciones es máxima. Es decir:

$$\text{Si}\quad \left.\begin{array}{c}\omega_e\approx\omega_0\\ \beta<<1\end{array}\right\}\Rightarrow A(\omega_e)>>1\to\text{Resonancia.}$$

La solución general de la ecuación no homogénea será la suma de la solución general de

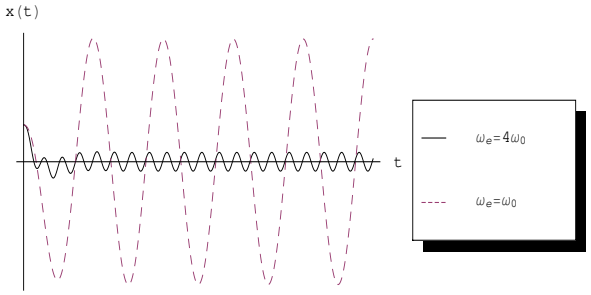


Figura 2.9: Comparación de la amplitud para un movimiento amortiguado ($\beta=0{,}3$) y forzado con $\omega_e=4\omega_0$ y en resonancia $\omega_e=\omega_0$

la homogénea (s.g.h.) más la solución particular de la no homogénea (s.p.n.h.) calculada anteriormente. Es decir:

$$x_{g.n.h.}(t)=x_{g.h.}(t)+x_p(t)=\underbrace{e^{-\beta t}B\cos(\omega t+\varphi)}_{\text{Parte transitoria}}+\underbrace{A(r)\cos(\omega_e t-\delta)}_{\text{Parte estacionaria}},$$

donde B y φ son constantes arbitrarias a fijar por las condiciones iniciales $x(0) = x_0$ y $\dot{x}(0) = v_0$; recuerde que la frecuencia para el movimiento amortiguado no forzado se definía como: $\omega \equiv \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$. La solución general de la homogénea $x_{g.h.}(t)$ se ve fuertemente amortiguada por el factor $e^{-\beta t}$, de manera que es insignificante pasado un cierto tiempo $t >> 1/\beta$ y supone, por lo tanto un *término transitorio o solución transitoria*. Pasado ese tiempo, la solución general de la no homogénea tenderá a la solución particular, es decir, $x_{g.n.h.}(t) \approx x_p(t)$, $t >> 1/\beta$, que se denomina *parte estacionaria o solución de estado estacionario*.

Ejercicio 2.3.2. Supóngase un automóvil que pesa $m = 1Ton$, cuya suspensión consiste en un muelle de $k = 1000Ton/m$, que atraviesa unas bandas sonoras en forma sinusoidal $y(s) = 0{,}4\cos(\frac{2\pi s}{L})$ metros, donde $s = vt$ es la distancia recorrida y $L = 6m$ es la distancia entre bandas. Se pide:

1. La velocidad a la que ocurre la resonancia pura si el coche no tiene amortiguadores. Sol. $v_r = \frac{6}{2\pi}\sqrt{1000}$

2. La velocidad a la que ocurre la resonancia práctica si el amortiguador ejerce una fuerza $F_v = bx'$ con $b = 500$.

□

Ejercicio 2.3.3. (Práctica de ordenador) Experimente con los distintos tipos de osciladores, representando resonancias y pulsaciones usando los comandos de *Mathematica* descritos en la página 119 de la referencia [5]. □

2.3.5. Analogías eléctricas. Leyes de Kirchhoff

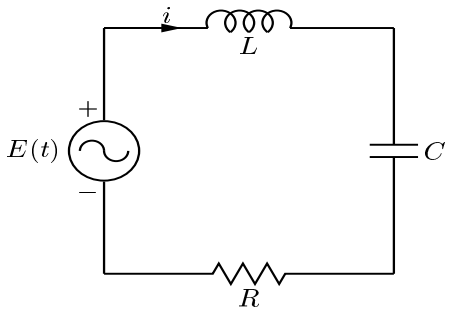


Figura 2.10: Circuito RCL

La ecuación diferencial que modela las vibraciones eléctricas (variación de la carga $q(t)$ en el tiempo) en un circuito RCL, con una resistencia de valor R, un condensador

de capacidad C, una bobina de inductancia L y una fuente de alimentación de fuerza electromotriz $E(t)$ en serie, viene dada por la segunda ley de Kirchhoff ("la suma de las caídas de tensión o voltajes en los elementos de un circuito debe ser igual a la fuerza electromotriz aplicada"):

$$\boxed{\underbrace{L\ddot{q}}_{V_L} + \underbrace{R\dot{q}}_{V_R} + \underbrace{\frac{1}{C}q}_{V_C} = E(t),}$$

donde $V_L = L\ddot{q}$ denota la caída de tensión en la bobina, $V_R = R\dot{q}$ la caída de tensión en la resistencia y $V_C = \frac{1}{C}q$ la caída de tensión en el condensador. Todo lo dicho para las vibraciones mecánicas puede traducirse directamente a las eléctricas sin más que hacer la siguiente identificación:

CONCEPTO MECÁNICO	$\longleftrightarrow$	CONCEPTO ELÉCTRICO
desplazamiento $x(t)$	$\longleftrightarrow$	carga $q(t)$
masa m	$\longleftrightarrow$	inductancia L
viscosidad c	$\longleftrightarrow$	resistencia R
cte. resorte k	$\longleftrightarrow$	capacitancia $1/C$
fuerza externa $F_{\text{ext}}(t)$	$\longleftrightarrow$	fuerza electromotriz $E(t)$

Ejercicio 2.3.4. *(Radio de galena).* Una radio de galena consiste en un circuito RCL con capacitancia de C faradios (F) variable. Dadas una inductancia de L henrios (H) y una resistencia de R ohmios (Ω), ¿qué valor de C hace que su circuito entre en resonancia con una emisora que emite a $\omega = 1000$ kHz?. □

2.4. PVF: Flexión y pandeo en vigas

En los problemas de valor en la frontera que seguidamente exponemos se combinan conceptos de interés en Geometría, Mecánica de Medios Continuos y Teoría de Distribuciones como: curvatura, tensor de esfuerzos y deformaciones, Ley de Hooke, distribución de cargas, etc.

2.4.1. Flexión en vigas: curva elástica y flecha de flexión

En la figura 2.11 mostramos el aspecto general que presenta una viga horizontal al encorvarse bajo las cargas que soporta, las cuales se suponen verticales. Imaginemos la viga descompuesta en delgadas láminas horizontales. Debido al encorvamiento, las láminas situadas en la región superior de la viga se encuentran comprimidas, en tanto que las situadas en la región inferior están estiradas. Ambas regiones están separadas por una capa cuyas fibras no están ni estiradas ni comprimidas; esa capa recibe el nombre de *capa o superficie neutra*. Según la figura 2.11, la intersección de la superficie neutra con el plano XY nos define una curva llamada *fibra neutra*. Consideremos ahora un elemento diferencial longitudinal de la viga, tal como se ilustra en la figura 2.12, sometido a momentos flexores

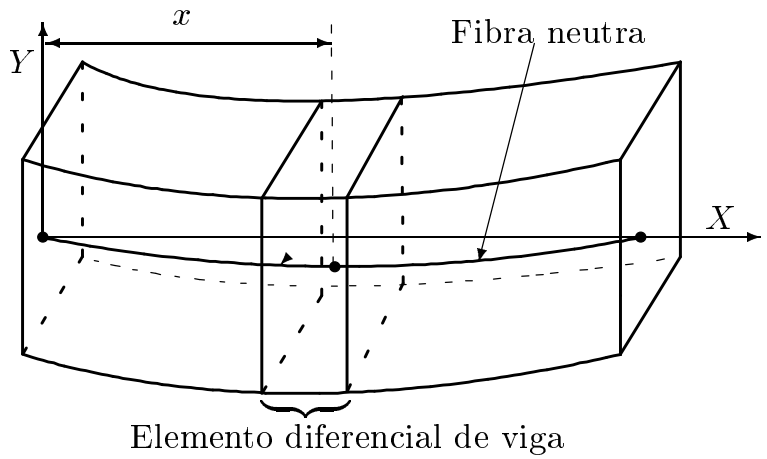


Figura 2.11: Viga encorvada y fibra neutra

de signo opuesto $M(x+dx) = -M(x-dx)$ (para que el elemento no gire) en los extremos. El elemento de viga experimenta una flexión tal que su fibra neutra toma la forma de un arco de circunferencia de radio R. Otra fibra situada a una distancia y por encima de la neutra tendrá un radio $R-y$; entonces, la *deformación longitudinal unitaria* (o porcentaje en cambio de longitud), definida como el cociente: ((longitud de la fibra contraída) - (longitud de la fibra neutra))/(longitud de la fibra neutra), será:

$$\epsilon_{xx} = \frac{(R-y)d\theta - Rd\theta}{Rd\theta} = -\frac{y}{R}, \tag{2.15}$$

donde $d\theta$ es el ángulo substendido por el elemento de viga de longitud dx en el *centro de curvatura* C. El signo negativo en la expresión (2.15) nos indica que las fibras situadas por encima de la fibra neutra ($y > 0$) están comprimidas ($\epsilon_{xx} < 0$) en tanto que las situadas por debajo ($y < 0$) están estiradas ($\epsilon_{xx} > 0$). La ley de Hooke generalizada dice que la deformación longitudinal unitaria $\epsilon_{xx}(x, y)$ es proporcional al esfuerzo normal $\sigma_{xx}(x, y)$ (compresor o tensor) que actúa en la dirección del eje X sobre una fibra situada a una altura y por encima de la fibra neutra:

$$\sigma_{xx}(x, y) = E\epsilon_{xx}(x, y) = -\frac{E}{R(x)}y,$$

donde la constante de proporcionalidad E es el *módulo de Young del material*.

La fuerza normal total que actúa sobre una sección transversal S (en el plano $Y - Z$) de la viga como resultado de la acción del material situado a la izquierda sobre el situado a la derecha de la sección debe ser nula:

$$F = \int_S \sigma_{xx} dydz = -\frac{E}{R(x)} \int_S ydydz = 0,$$

ya que estamos suponiendo que todas las cargas que soporta la viga son verticales, de modo que no puede haber fuerza neta horizontal en ninguna sección transversal de la viga.

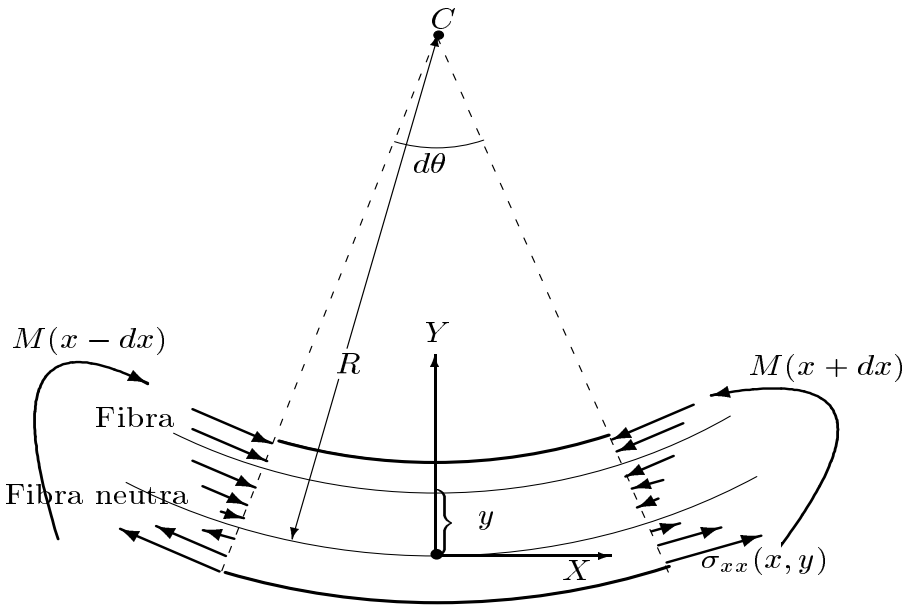


Figura 2.12: Elemento longitudinal diferencial de viga y esfuerzo normal y momento flexor que soporta debido a la acción del material situado a izquierda y derecha

Puesto que $\int_S y dydz = 0$, será necesario tomar el origen del eje vertical Y coincidiendo con el *centro de área o centroide* de la sección transversal S para cada valor de x, lo que equivale a decir que la fibra neutra pasa por los centroides de todas las secciones transversales.

Aún cuando la distribución de esfuerzos normales σ_{xx} sobre una sección transversal de la viga representa una fuerza normal neta nula, no pasa lo mismo con el momento de dicha distribución:

$$M(x) = \int_S y\sigma_{xx} dydz = -\frac{E}{R(x)} \underbrace{\int_S y^2 dydz}_{I_z} = -\frac{EI_z}{R(x)},$$

donde $I_z \equiv \int_S y^2 dydz$ es el análogo del "*momento de inercia*"de la sección transversal, con relación al eje Z que pasa por la fibra neutra, supuesta dicha sección una "lámina delgada de densidad superficial unidad".

Se trata de determinar la forma de la fibra neutra o *curva elástica* $y(x)$. Recordemos que, de acuerdo con la Geometría Diferencial, la curvatura κ (el inverso del radio de curvatura R) de una curva plana $y(x)$ en un punto genérico x de la misma se calcula como:

$$\kappa(x) = \frac{1}{R} = \frac{y''(x)}{(1 + y'(x)^2)^{3/2}} \approx y''(x),$$

donde se ha supuesto que, como sucede an la mayor parte de los casos de interés práctico, la flexión que experimenta la viga es muy pequeña, de manera que $y'(x)^2$ puede considerarse

despreciable frente a la unidad. Así, la *ecuación diferencial de la curva elástica* queda:

$$y''(x) = -\frac{1}{EI_z}M(x).$$

Teniendo en cuenta que la derivada del momento flexor $M(x)$ es igual a menos la fuerza cortante $F(x) = \int_S \sigma_{xy} dydz$, y que la derivada de la fuerza cortante es igual a la *densidad de carga* $q(x)$ (peso por unidad de longitud),

$$M'(x) = -F(x),\ F'(x) = q(x),$$

podemos representar también la ecuación diferencial de la curva elástica como:

$$y^{IV}(x) = \frac{1}{EI_z}q(x), \tag{2.16}$$

donde y^{IV} denota la derivada cuarta.

Hay que distinguir entre:

1. *Cargas distribuidas*, $dF(x) = q(x)dx = w(x)dx$, tales como el propio peso de la viga, que se aplican de forma uniforme a lo largo de la viga (en general, funciones $w(x)$ continuas a trozos).

2. *Cargas concentradas*, $dF(x) = q(x)dx = \sum_i W_i \delta(x - x_i)dx$, tales como las reacciones verticales V_i en los apoyos, que se aplican como cargas W_i localizadas en los puntos x_i.

Hemos introducido la "distribución" ("¡que no función!") *delta de Dirac* $\delta(x - x_i)dx$ para dar un tratamiento matemático unificado de cargas distribuidas y concentradas como *distribuciones* $dF(x)$ de peso sobre la viga. Físicamente, las cargas concentradas W_i están localizadas en un entorno pequeño de anchura a alrededor de los puntos de aplicación x_i, de manera que ("a efectos prácticos") las densidades de carga concentrada pueden escribirse como

$$w(x) = \sum_i W_i \delta_a(x - x_i),\ \text{ donde }\ \delta_a(x - x_i) = \begin{cases} \frac{1}{a},\ \text{si}\ x \in [x_i - \frac{a}{2}, x_i + \frac{a}{2}] \\ 0,\ \text{si}\ x \notin [x_i - \frac{a}{2}, x_i + \frac{a}{2}] \end{cases},$$

de manera que el área que substiende la "función meseta" $\delta_a(x - x_i)$ es siempre igual a uno (véase figura 2.13). La abstracción matemática consiste en hacer tender $a \to 0$, es decir, localizar más y más las cargas W_i hasta que estas actúen en un solo punto x_i. Así, la delta de Dirac tiene sentido como una distribución, al hacer promedios (integrales), cumpliendo que, para una función $f(x)$ continua en un punto x_0 se tiene:

$$\int f(x)\delta(x - x_0)dx = f(x_0).$$

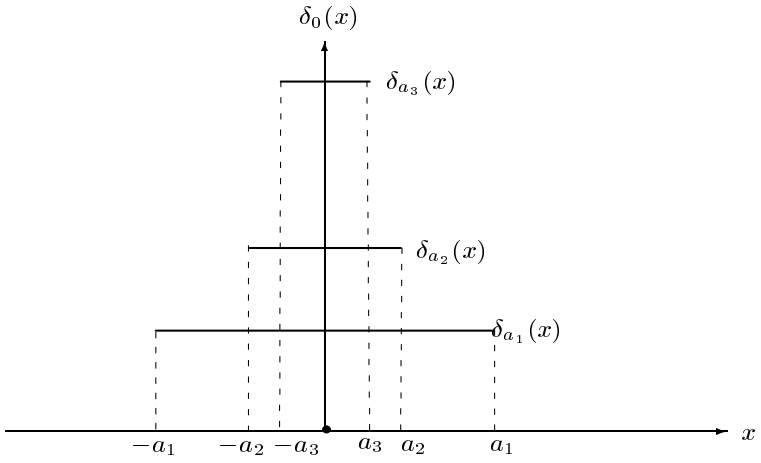


Figura 2.13: Delta de Dirac como "límite de funciones meseta"

Todas estas definiciones se pueden formalizar aún más y esto constituye parte de la doctrina denominada *Teoría de Distribuciones*. Para nuestros fines será suficiente con saber que la fuerza cortante en un punto x de la viga puede calcularse como:

$$F(x) = F(0) + \int_0^x q(l)dl = \int_0^x (w(l) + \sum_i W_i \delta(l - x_i))dx = \int_0^x w(l)dl + \sum_{x>x_i} W_i,$$

donde hemos puesto $F(0) \equiv W_0$ y $x_0 = 0$. Conseguimos así rebajar en uno el orden de la ecuación diferencial (2.16), quedando:

$$y'''(x) = \frac{1}{EI_z} F(x),$$

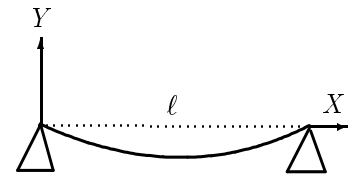
Recordando igualmente que $M'(x) = -F(x)$, el momento flexor M puede calcularse como la integral:

$$M(x) = M(0) - \int_0^x F(l)dl = M(0) + \sum_{x>x_i} x_i W_i + \int_0^x lw(l)dl - xF(x),$$

que introducida en la ecuación diferencial anterior rebaja el orden a dos:

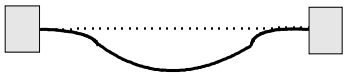
$$y''(x) = -\frac{1}{EI_x} M(x),$$

Recuerde que $F(x)$ tiene discontinuidades de salto en las posiciones x_i donde están localizadas las cargas concentradas W_i. Por lo tanto la curva elástica $y(x)$ será, en general, una función continua con derivada segunda y'' continua (es decir, de clase C^2), con puntos angulosos donde están localizadas las cargas concentradas. Si no existen cargas concentradas, la función $y(x)$ será de clase C^3.

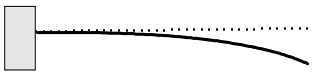


Condiciones de contorno:

Soporte simple $y(0) = y(\ell) = y''(0) = y''(\ell) = 0$



Viga empotrada $y(0) = y(\ell) = y'(0) = y'(\ell) = 0$



Viga en voladizo $y(0) = y'(0) = y''(\ell) = y'''(\ell) = 0$

Figura 2.14: Condiciones de contorno para vigas con soporte simple, empotradas y en voladizo

La solución general de la ecuación (2.16) depende de 4 constantes arbitrarias que pueden fijarse con condiciones de contorno (véase figura 2.14). Tenemos tres tipos de condiciones de contorno, dependiendo del tipo de sujeción que tenga la viga en sus extremos ($x = 0, \ell$): soporte simple, soporte interconstruido (empotrada) y en voladizo (véase figura 2.14). Veamos el significado físico de las mismas:

1. La condición $y'(0) = 0$ significa que la viga está empotrada en el extremo $x = 0$.

2. La condición $y''(\ell) = 0$ significa que la viga no está sometida a momentos flexores en el extremo $x = \ell$, es decir, está apoyada o libre.

3. La condición $y'''(\ell) = 0$ significa que no existen fuerzas cortantes en el extremo $x = \ell$, es decir, la viga está libre en ese extremo.

A dichas condiciones de contorno deben añadirse las

$$\text{condiciones de empalme : } y(x_i^-) = y(x_i^+), \quad y'(x_i^-) = y'(x_i^+),$$

a izquierda y derecha de los puntos x_i donde se aplican las cargas concentradas. Veamos algunos ejemplos:

Viga con soporte simple

Supongamos que tenemos una viga horizontal de longitud 2ℓ que está apoyada sobre sus extremos (véase figura 2.15). Se trata de encontrar la ecuación de su curva elástica $y(x)$ y su deflexión máxima o *flecha de flexión* y_{max} cuando:

1. La viga está sometida a su propio peso por unidad de longitud (carga) w =cte. Solución: $EIy(x) = w\ell x^3/6 - wx^4/24 - w\ell^3 x/3,\ y_{max} = -\frac{5w\ell^4}{24EI}$

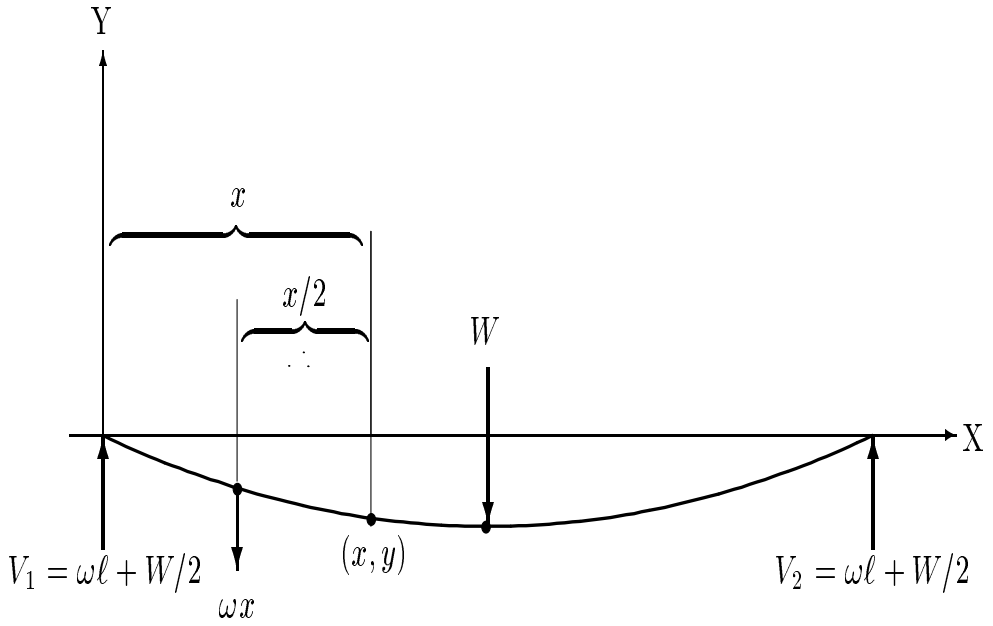


Figura 2.15: Viga en soporte simple sometida a su propio peso y a una carga W concentrada en $x = \ell$

2. La viga está sometida a su propio peso y a una carga W localizada en el centro (véase figura 2.15). Solución: $EIy(x) = w(\ell x^3/6 - x^4/24 - \ell^3 x/3) + \frac{W}{12}(3\ell x^2 - |\ell - x|^3 - 6\ell^2 x + \ell^3)$, $, y_{max} = -\frac{5w\ell^4}{24EI} - \frac{W\ell^3}{6EI}$.

Viga con soporte interconstruido

Una viga horizontal de longitud ℓ está empotrada en sus extremos (véase figura 2.16). Encontrar la ecuación de su curva elástica y su deflexión máxima o *flecha de flexión* cuando:

1. La viga está sometida a su propio peso por unidad de longitud (carga) w =cte. Solución: $EIy(x) = \frac{wx^2}{24}(2\ell x - \ell^2 - x^2)$, $y_{max} = y(\ell/2) = -\frac{w\ell^4}{384EI}$

2. La viga está sometida a su propio peso y a una carga W localizada en el centro (véase figura 2.16). Solución:

$$EIy(x) = \left\{ \begin{array}{l} \frac{wx^2}{24}(2\ell x - \ell^2 - x^2) + \frac{W}{48}(4x^3 - 3\ell x^2),\ 0 \le x \le \ell/2 \\ \frac{wx^2}{24}(2\ell x - \ell^2 - x^2) + \frac{W}{48}(\ell^3 - 6\ell^2 x + 9\ell x^2 - 4x^3),\ \ell/2 \le x \le \ell \end{array} \right\}$$

$$y_{max} = y(\ell/2) = -\frac{w\ell^4 + 2W\ell^3}{384EI}$$

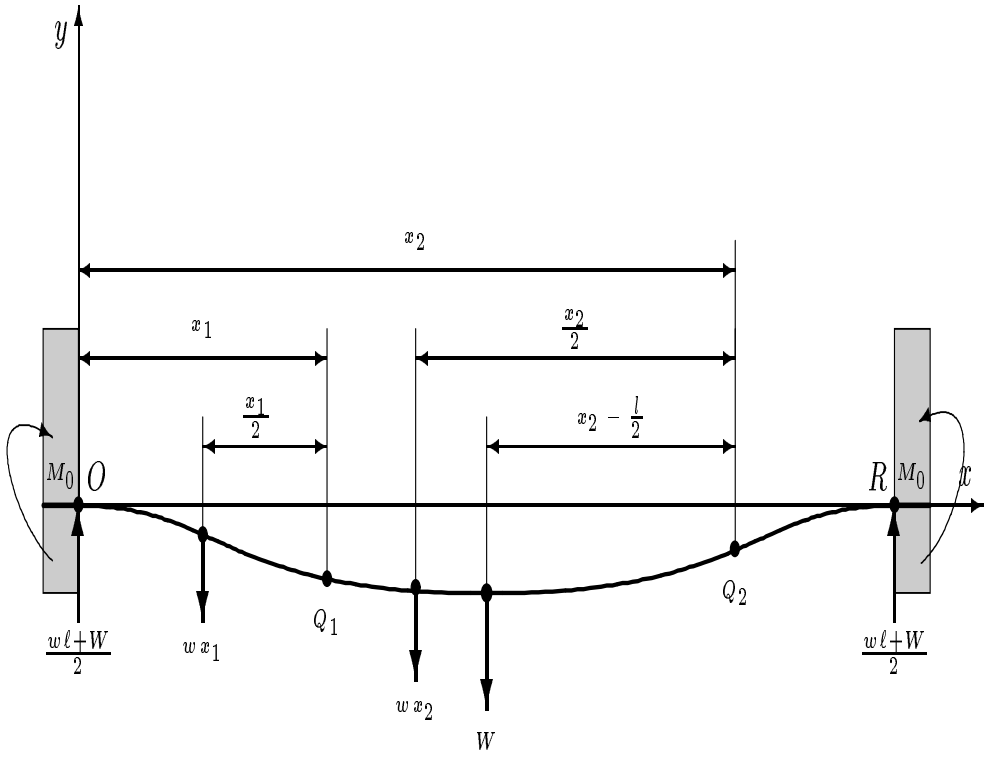


Figura 2.16: Viga con soporte interconstruido sometida a su propio peso y a una carga W concentrada en $x = \ell/2$

Viga en voladizo

Una viga horizontal de longitud ℓ está apoyada en su extremo izquierdo y libre en el derecho (véase figura 2.17). Encontrar la ecuación de su curva elástica y su deflexión máxima o *flecha de flexión* cuando:

1. La viga está sometida a su propio peso por unidad de longitud (carga) w =cte. Solución: $EIy(x) = \frac{w}{24}(4\ell x^3 - 6\ell^2 x^2 - x^4),\ y_{max} = -\frac{w\ell^4}{8EI}$

2. La viga está sometida a su propio peso y a una carga W localizada en el extremo libre (véase figura 2.17). Solución: $EIy(x) = \frac{w}{24}(4\ell x^3 - 6\ell^2 x^2 - x^4) + W(x^3/6 - \ell x^2/2),\ \ , y_{max} = -(\frac{w\ell^4}{8EI} + \frac{W\ell^3}{3EI})$

2.4.2. Pandeo en vigas: carga de Euler y modos de desviación

En el siglo XVIII Leonhard Euler fue uno de los primeros matemáticos en estudiar un problema de valores propios al analizar cómo se curva una columna elástica sometida a una fuerza axial de compresión (véase figura 2.18) Hemos visto que la relación entre el momento flexor $M(x)$ y el radio de curvatura $R(x)$ en un punto x de la viga viene dada

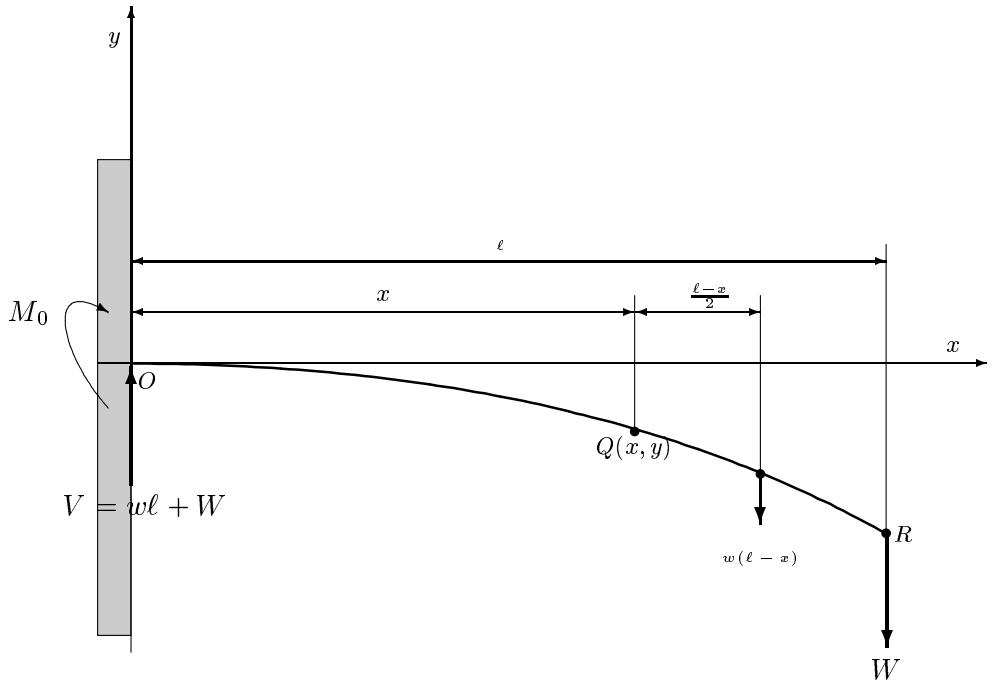


Figura 2.17: Viga en voladizo sometida a su propio peso y a una carga W concentrada en $x = \ell$

por:

$$M(x) = -\frac{EI_z}{R(x)}.$$

Supongamos primeramente que la curvatura es pequeña, de manera que $\frac{1}{R(x)} \approx y''(x)$. El momento flexor $M(x)$ a una distancia x del extremo izquierdo de la viga es igual al producto de la fuerza F por el *brazo de momento* (es decir, la ordenada correspondiente):

$$M(x) = Fy(x),$$

de manera que, para pandeos pequeños la ecuación a estudiar es:

$$y''(x) + \frac{F}{EI_z}y(x) = 0, \;\; y(0) = 0 = y(\ell) \tag{2.17}$$

que tiene soluciones:

$$y_n(x) = A\,\mathrm{sen}(\lambda_n x), \;\; \lambda_n = \frac{n\pi}{\ell} = \sqrt{\frac{F_n}{EI_z}}, \;\; n = 1, 2, 3, \ldots.$$

Es decir, se trata de un de un problema de *autovalores* λ_n (cargas críticas) y *autofunciones* y_n (modos de desviación) cuyo significado físico es el siguiente: la columna se desvía sólo cuando la fuerza de compresión tiene uno de los valores:

$$F_n = \frac{\pi^2 EI_z}{\ell^2}n^2, \;\; n = 1, 2, 3, \ldots.$$

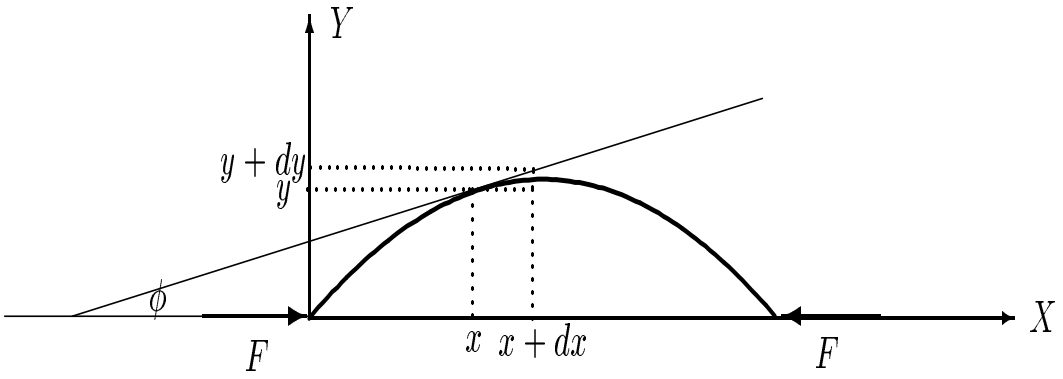


Figura 2.18: Pandeo de una viga sometida a una fuerza axial F de compresión

Estas fuerzas se llaman *cargas críticas*. La curva de deflexión $y(x)$ que corresponde a la mínima carga crítica, $F_1 = \frac{\pi^2 EI_z}{\ell^2}$ (*carga de Euler*), es $y_1(x) = A\,\mathrm{sen}(\pi x/\ell)$, que se conoce como *primer modo de desviación*. Las curvas de deflexión correspondientes a cargas superiores F_n, $n = 2, 3, \ldots$ se corresponden con modos de desviación donde la columna tiene algún tipo de restricción física o *guía* en $x_n = \frac{L}{n}$ (véase la figura 2.19). La columna no se desviará para otras cargas intermedias que no sean estas cargas críticas (o autovalores) F_n. Este es un problema parecido al de la cuerda giratoria que desarrolamos en

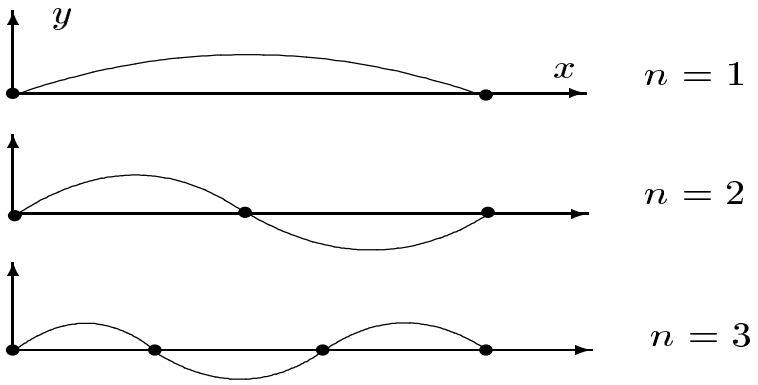


Figura 2.19: Modos de desviación para cargas críticas F_1, F_2 y F_3

la siguiente sección, donde la cuerda adopta ciertas formas (modos de desviación) para ciertas frecuencias críticas de rotación. Ambos problemas son ejemplos de *problemas de Sturm-Liouville* que serán analizados en el Capítulo 8.

Consideremos ahora curvaturas κ no necesariamente pequeñas. Recordemos que la curvatura se definía como el cociente:

$$\kappa = \frac{1}{R(x)} = \frac{d\phi}{ds},$$

con ds un diferencial de arco de curva y $\phi = \arctan(y'(x))$ (véase figura 2.18). Si derivamos nuevamente con respecto a s la ecuación anterior y tenemos en cuenta que $dy/ds = \operatorname{sen}\phi$, obtenemos finalmente que la *ecuación diferencial de la curva elástica* es:

$$\frac{d^2\phi}{ds^2} = -\frac{F}{EI_z}\operatorname{sen}\phi.$$

Esta ecuación es formalmente idéntica a la de un ¡péndulo simple!. Se trata de una ecuación no lineal de orden dos cuyo estudio se sale de los objetivos de esta memoria.

2.4.3. Cuerda giratoria

Un PVF del tipo (2.17) también ocurre al determinar la forma $y(x)$ que adopta una cuerda tensa (de tensión T) de longitud L (coincidente en reposo con el eje horizontal X) al girar con una velocidad angular ω y con sus extremos fijos en torno al eje X. En el sistema de referencia propio (el que acompaña a la cuerda en rotación), la condición de equilibrio para un elemento infinitesimal de la cuerda es[2]

$$T\operatorname{sen}(\phi + d\phi) - T\operatorname{sen}(\phi) + dm\omega^2 y = 0,$$

donde $\tan\phi = y'(x)$ es la pendiente de la cuerda en el punto x del elemento de cuerda con masa $dm = \lambda ds$, donde λ es la densidad lineal de masa y $ds = dx\sqrt{1 + (y'(x))^2}$ es el elemento de longitud o diferencial de arco de curva. Para pendientes pequeñas, podemos aproximar $\operatorname{sen}\phi \simeq \tan\phi = y'(x)$ y $\operatorname{sen}(\phi + d\phi) \simeq y'(x + dx) = y'(x) + y''(x)dx$, de manera que $T\operatorname{sen}(\phi + d\phi) - T\operatorname{sen}(\phi) \simeq Ty''(x)dx$ y $dm \simeq \lambda dx$. La condición de equilibrio para desviaciones y pequeñas se puede escribir entonces como

$$y'' + ay = 0, \;\; y(0) = 0, y(L) = 0, \tag{2.18}$$

donde $a = \frac{\lambda\omega^2}{T}$ juega ahora el mismo papel que $\frac{F}{EI_z}$ en (2.17). Ahora existiran unas velocidades angulares críticas $\omega_n = \frac{n\pi}{L}\sqrt{\frac{T}{\lambda}}$, $n = 1, 2, 3, \ldots$ para las cuales la cuerda salta de la posición de equilibrio $y = 0$ a $y_n(x) = \operatorname{sen}(n\pi x/L)$ (modos de desviación). La cuerda "sintoniza" solo con estas frecuencias críticas y no se produce desviación por debajo de la velocidad angular mínima $\omega_1 = \frac{\pi}{L}\sqrt{\frac{T}{\lambda}}$.

[2]Ecuación de compensación para las componentes verticales en el eje Y de las tensiones y la fuerza centrífuga $dm\omega^2 y$; véase la referencia [4], pag. 203, para una representación gráfica similar a la figura 2.18 añadiendo la fuerza centrífuga.

2.5. Sistemas de EDOs lineales con coeficientes constantes: generalidades

Consideremos el sistema

$$\left.\begin{array}{l} L_{11}[D]x_1(t) + L_{12}[D]x_2(t) + \cdots + L_{1n}[D]x_n(t) = f_1(x), \\ L_{21}[D]x_1(t) + L_{22}[D]x_2(t) + \cdots + L_{2n}[D]x_n(t) = f_2(t), \\ \vdots \\ L_{n1}[D]x_1(t) + L_{n2}[D]x_2(t) + \cdots + L_{nn}[D]x_n(t) = f_n(t), \end{array}\right\} \to L(\vec{x}(t)) = \vec{f}(t), \quad (2.19)$$

donde L denota ahora una matriz $n \times n$ cuyos coeficientes $L_{ij}[D]$ son operadores lineales como los definidos en (2.5), $\vec{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ es la función (vectorial) incógnita y $\vec{f} = (f_1, \ldots, f_n)$ son los términos inhomogeneos ("estímulos externos").

2.5.1. Métodos de resolución

Para resolver este sistema diferencial lo inmediato es aplicar el *algoritmo de triangulación de Gauss* tratando el sistema formalmente como si las funciones incógnita $\vec{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ fuesen números y sus coeficientes $L_{ij}[D]$ polinomios en el "parámetro" D. Sabemos que en este proceso de "triangulación" se reemplaza una fila (o columna) por la que se obtiene al sumar a dicha fila una "combinación lineal" de las restantes, entendiendo aquí por "combinación lineal" la "multiplicación" de filas por operadores diferenciales polinomiales $\sum_j c_j D^j$ arbitrarios (no necesariamente constantes). Así llegamos a "desacoplar" el sistema en múltiples EDOs lineales de orden superior para cada una de las funciones incógnita $x_i(t)$.

Para sistemas pequeños, otra posibilidad es utilizar el *método de Cramer* o el *método de diagonalización de la matriz de transición*. Lo mejor es verlo con un ejemplo sencillo.

Ejemplo 2.5.1. Resolver simultáneamente:

$$\left.\begin{array}{l} \dot{x}_1 + x_2 = e^t \\ x_1 - \dot{x}_2 = t \end{array}\right\}.$$

□

Solución:

Algoritmo de triangulación de Gauss

Derivando la segunda ecuación respecto de t y sustituyendo $\dot{x}_1$ en la primera, obtenemos una ecuación sólo para la variable x_2:

$$\ddot{x}_2 + x_2 = e^t - 1 \quad (2.20)$$

cuya solución general puede verse fácilmente que es

$$x_2 = c_1 \operatorname{sen} t + c_2 \cos t + e^t/2 - 1.$$

Derivando x_2 y sustituyendo $\dot{x}_2$ en la segunda ecuación obtenemos que

$$x_1 = \dot{x}_2 + t = c_1 \cos t - c_2 \operatorname{sen} t + e^t/2 + t.$$

Método de Cramer
También se puede resolver el sistema por el método de Cramer, poniéndolo como $L[D]\vec{x} = \vec{f}(t)$, donde $\vec{x} = (x_1, x_2)$, $\vec{f}(t) = (e^t, t)$ y la matriz:

$$L[D] = \begin{pmatrix} D & 1 \\ 1 & -D \end{pmatrix}.$$

Despejando por ejemplo x_2 tenemos:

$$\begin{vmatrix} D & 1 \\ 1 & -D \end{vmatrix} x_2 = \begin{vmatrix} D & e^t \\ 1 & t \end{vmatrix}$$

donde las barras verticales denotan "determinantes" en los cuales D debe tratarse como un mero factor, excepto cuando multiplica al término independiente $\vec{f}(t)$, en cuyo caso entendemos $Df_1 = \dot{f}_1$ y $Df_2 = \dot{f}_2$. Teniendo esto en cuenta, calculamos

$$|L[D]| = \begin{vmatrix} D & 1 \\ 1 & -D \end{vmatrix} = -D^2 - 1, \quad \begin{vmatrix} D & e^t \\ 1 & t \end{vmatrix} = 1 - e^t$$

y llegamos a la ecuación (2.20) de antes. De la misma forma podríamos haber despejado x_1 obteniendo:

$$\begin{vmatrix} D & 1 \\ 1 & -D \end{vmatrix} x_1 = \begin{vmatrix} e^t & 1 \\ t & -D \end{vmatrix}$$

y desarrollando los determinantes llegaríamos a que: $-\ddot{x}_1 - x_1 = -e^t - t$ aunque, como hemos dicho antes, para este ejemplo sencillo lo mejor es despejar x_1 de la segunda ecuación una vez que se ha calculado ya la solución general para x_2. Obsérvese que, al tener un sistema de dos ecuaciones de primer orden, la solución general queda en función de sólo dos constantes arbitrarias, c_1 y c_2, a fijar por las condiciones iniciales $x_1(t_0) = x_1^{(0)}$ y $x_2(t_0) = x_2^{(0)}$.

Método de diagonalización de la matriz A de transición
Para sistemas de primer orden, como el que nos ocupa, podemos buscar una expresión análoga a las ecuaciones de primer orden (1.9) con tal de despejar las derivadas

$$\left.\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -x_2 + e^t \\ \dot{x}_2 &= x_1 - t \end{aligned}\right\}$$

o, en forma matricial como:

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = A\vec{x} + \vec{f}, \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \; A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \; \vec{f} = \begin{pmatrix} e^t \\ -t \end{pmatrix}. \tag{2.21}$$

La ventaja es que podemos usar la expresión compacta (1.10) y adaptarla a nuestro caso:

$$\boxed{\vec{x}(t) = \int_{t_0}^{t} e^{-A(\tau-t)}\vec{f}(\tau)d\tau + e^{A(t-t_0)}\vec{x}_0,} \tag{2.22}$$

donde ahora la condición inicial es $\vec{x}_0 = (x_1(t_0), x_2(t_0))$ y por la exponencial de una matriz A entendemos su desarrollo en serie de Taylor:

$$\boxed{e^{At} = I + At + \frac{A^2t^2}{2!} + \frac{A^3t^3}{3!} + \dots} \tag{2.23}$$

Ejercicio 2.5.2. Utilizando el desarrollo en serie, demuéstrese que $\frac{d}{dt}e^{At} = Ae^{At} = e^{At}A$ (Nota: esto no es cierto en general si la matriz A no es constante) y que $e^{A(t+\tau)} = e^{At}e^{A\tau}$ (Nota: en general $e^{A+B} \neq e^Ae^B$ a no ser que A y B conmuten, es decir, que $AB = BA$) y que $e^{PDP^{-1}} = Pe^DP^{-1}$ para P matriz invertible. □

Para calcular la exponencial de una matriz no es necesario en general sumar la serie (2.23). Si la matriz A es diagonalizable $A = PDP^{-1}$ (con P la matriz de paso de vectores propios y $D = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots)$ la matriz diagonal de valores propios λ_i), se puede demostrar que

$$\boxed{e^{At} = e^{PDP^{-1}t} = Pe^{Dt}P^{-1}}$$

donde ahora puede calcularse directamente $e^{Dt} = \text{diag}(e^{\lambda_1 t}, e^{\lambda_2 t}, \dots)$. Por ejemplo, para el caso que nos ocupa, la ecuación característica

$$|A - \lambda I| = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ 1 & \lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \lambda^2 + 1 = 0 \Rightarrow \lambda_\pm = \pm i$$

nos da dos raíces complejas. Los vectores propios los calculamos imponiendo:

$$A\vec{v}_\pm = \lambda_\pm\vec{v}_\pm \Rightarrow\Rightarrow (A - \lambda_\pm)\vec{v}_\pm = \vec{0} \Rightarrow \begin{pmatrix} \lambda_\pm & -1 \\ 1 & \lambda_\pm \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_\pm \\ y_\pm \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Resolviendo estos dos sistemas de dos ecuaciones (dependientes) con dos incógnitas $x_\pm, y_\pm$ cada una, podemos tomar como solución, por ejemplo:

$$\vec{v}_\pm = (\pm i, 1) \Rightarrow P = \begin{pmatrix} -i & i \\ 1 & 1 \end{pmatrix},\ P^{-1} = \begin{pmatrix} i/2 & 1/2 \\ -i/2 & 1/2 \end{pmatrix},$$

donde, para escribir P, hemos tomado los vectores propios $\vec{v}_\pm = (\pm i, 1)$ por columnas en el orden: primero $\vec{v}_-$ y segundo $\vec{v}_+$. Teniendo en cuenta que

$$e^{Dt} = \begin{pmatrix} e^{\lambda_- t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_+ t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-it} & 0 \\ 0 & e^{it} \end{pmatrix},$$

se comprueba que (hágase), tras un poco de álgebra, y de usar la fórmula de Euler, se tiene:

$$e^{At} = Pe^{Dt}P^{-1} = \begin{pmatrix} \cos t & -\operatorname{sen} t \\ \operatorname{sen} t & \cos t \end{pmatrix}.$$

Introduciendo esta expresión en (2.22) y haciendo los productos e integrales correspondientes, se puede ver que se obtiene la misma solución que con los métodos anteriores (hágase).

Ejercicio 2.5.3. Resolver simultáneamente:

$$\left.\begin{array}{rcl} 2\dot{x}+\dot{y}-4x-y & = & e^t \\ \dot{x}+3x+y & = & 0 \end{array}\right\}.$$

□

Solución: $x = C_1\cos t + C_2 \operatorname{sen} t - 1/2t, y = (C_1 - 3C_2)\operatorname{sen} t - (3C_1 + C_2)\cos t + 2e^t$

Ejercicio 2.5.4. Dada la matriz de transición $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$, calcula la solución del sistema $\frac{d\vec{x}}{dt} = A\vec{x}$, con condición inicial $\vec{x}(0) = (2, 3)$, por el método de diagonalización.
Solución: $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = -2, \vec{v}_1 = (1, 1), \vec{v}_2 = (0, 1), \vec{x}(t) = (2e^{-t}, 2e^{-t} + e^{-2t})$ □

Ejercicio 2.5.5. (Práctica de ordenador) Obtenga las soluciones de los ejercicios anteriores usando el comando DSolve de *Mathematica* descrito en la página 109 de la referencia [5] y represente gráficamente las soluciones. □

2.5.2. Sistemas de primer orden autónomos. Puntos de equilibrio. Tipos

Consideremos por simplicidad el sistema de 2 EDOs de primer orden acopladas:

$$\left.\begin{array}{l} \dot{x} = V_x(x, y) \\ \dot{y} = V_y(x, y) \end{array}\right\}. \tag{2.24}$$

Dicho sistema se dice que es "autónomo" al no depender $\vec{V}(x, y) = (V_x(x, y), V_y(x, y))$ del tiempo t. Podemos pensar en dicho sistema como el campo de velocidades de un fluido, de manera que $(x(t), y(t))$ son las trayectorias o "líneas de corriente". Los puntos de equilibrio (x_0, y_0) donde $\vec{V}(x_0, y_0) = 0$ se corresponderían con "remansos" en los cuales el fluido está "estático". Queremos estudiar la estabilidad de dichos puntos de equilibrio. Usando nuestra analogía con fluidos podríamos comparar este problema con el de un barquito que navega cerca de estos puntos y queremos saber si pasado un tiempo, el fluido lo mantendrá alrededor de dichos puntos o lo alejará de los mismos. En un entorno suficientemente pequeño del punto (x_0, y_0) tenemos que:

$$\left.\begin{array}{l} V_x(x, y) \simeq V_x(x_0, y_0) + \frac{\partial V_x(x_0,y_0)}{\partial x}(x - x_0) + \frac{\partial V_x(x_0,y_0)}{\partial y}(y - y_0), \\ V_y(x, y) \simeq V_y(x_0, y_0) + \frac{\partial V_y(x_0,y_0)}{\partial x}(x - x_0) + \frac{\partial V_y(x_0,y_0)}{\partial y}(y - y_0) \end{array}\right\}$$

de manera que, definiendo $x_1 = x - x_0$ y $x_2 = y - y_0$ se linealiza la ecuación diferencial (2.24) quedando de la forma

$$\left.\begin{array}{l} \dot{x}_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\ \dot{x}_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \end{array}\right\} A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial V_x(x_0,y_0)}{\partial x} & \frac{\partial V_x(x_0,y_0)}{\partial y} \\ \frac{\partial V_y(x_0,y_0)}{\partial x} & \frac{\partial V_y(x_0,y_0)}{\partial y} \end{pmatrix} \tag{2.25}$$

donde hemos definido la matriz Jacobiana de $\vec{V}$ en (x_0, y_0) como A. Este sistema linealizado de 2 dos EDOs de primer orden acopladas se puede llevar a una EDO lineal homogenea de segundo orden

$$\ddot{x}_{1,2} - \mathrm{tr}(A)\dot{x}_{1,2} + \det(A)x_{1,2} = 0$$

con coeficientes $\mathrm{tr}(A) = \vec{\nabla} \cdot \vec{V}(x_0, y_0)$ (la divergencia de $\vec{V}$ en (x_0, y_0)) y $\det(A) = J(\vec{V}(x_0, y_0))$ (el Jacobiano de $\vec{V}$ en (x_0, y_0)). Ensayando $x_{1,2}(t) = e^{\lambda t}$ tenemos:

$$\lambda = (\mathrm{tr}(A) \pm \sqrt{\mathrm{tr}(A)^2 - 4\det(A)})/2$$

de manera que tendremos estabilidad cuando $\mathrm{Real}(\lambda) < 0$ ya que entonces $x_{1,2}(\infty) \to 0$, o lo que es lo mismo, $x(\infty) \to x_0$ e $y(\infty) \to y_0$.

En la figura 2.20 se hace una representación gráfica de distintos tipos de puntos críticos en un diagrama $\mathrm{tr}(A) - \det(A)$. Los nodos límite y los vórtices no están completamente

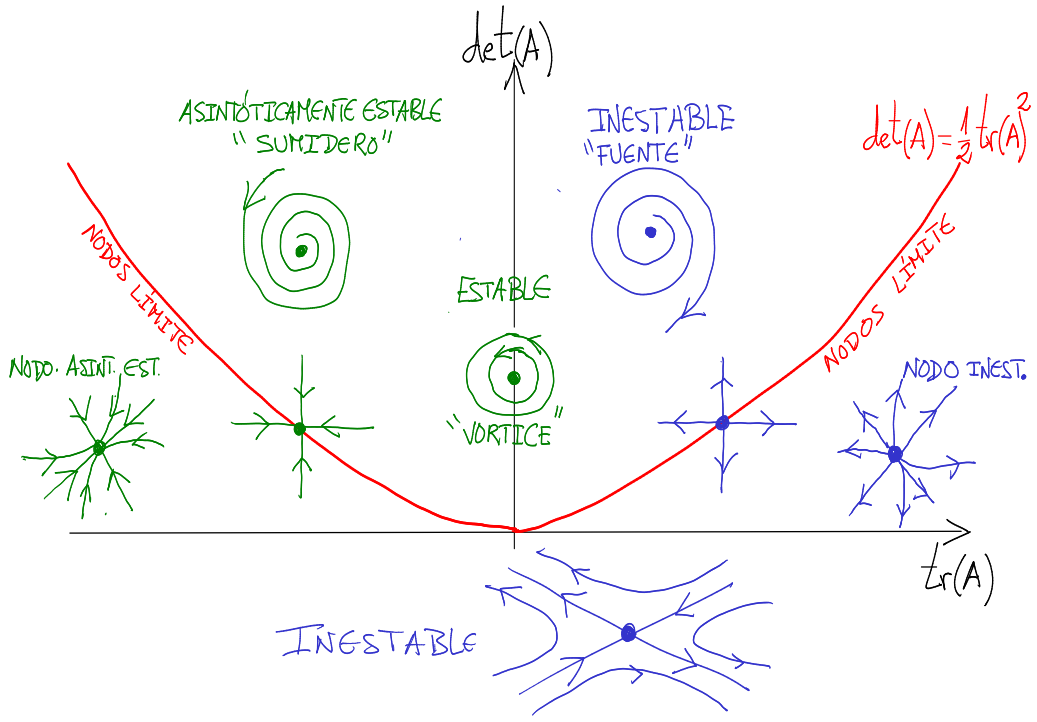


Figura 2.20: Tipos de puntos críticos en un diagrama $\mathrm{tr}(A) - \det(A)$

determinados. En particular:

1. Si (2.25) tiene un nodo límite en (x_0, y_0) entonces (2.24) tiene o bien un nodo o una espiral.

2. Si (2.25) tiene un vórtice en (x_0, y_0) entonces (2.24) tiene o bien un vórtice o una espiral.

Veamos algunos ejemplos concretos de puntos críticos y la representación de las trayectorias ("líneas de corriente") en un diagrama $y(x)$ superpuestas al campo de velocidades $\vec{V}(x, y)$.

Espirales

$$\left.\begin{array}{l}\dot{x} = x + 3y \\ \dot{y} = -x\end{array}\right\} A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \det(A) = 3, \mathrm{tr}(A) = 1.$$

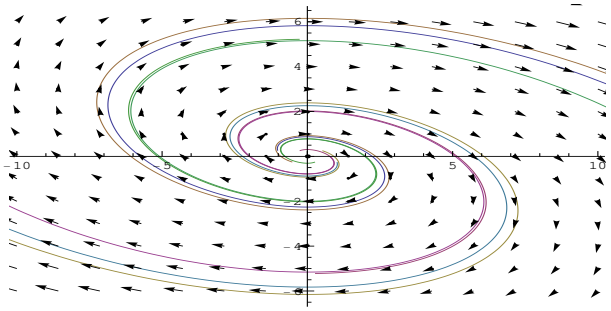


Figura 2.21: Espiral inestable

Vórtices

$$\left.\begin{array}{l}\dot{x} = -y \\ \dot{y} = x\end{array}\right\} A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \det(A) = 1, \mathrm{tr}(A) = 0.$$

Puntos de silla

$$\left.\begin{array}{l}\dot{x} = y \\ \dot{y} = x\end{array}\right\} A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \det(A) = -1, \mathrm{tr}(A) = 0.$$

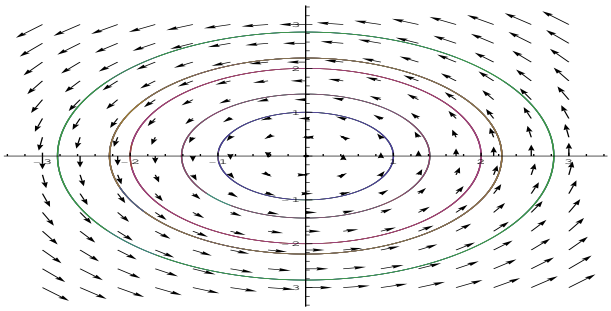


Figura 2.22: Vórtice

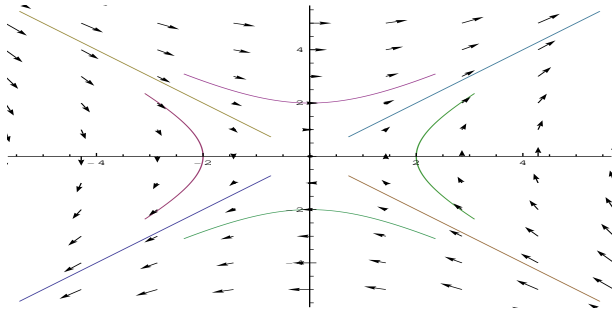


Figura 2.23: Silla inestable

Nodos

$$\left.\begin{array}{l}\dot{x}=x\\ \dot{y}=-x+2y\end{array}\right\} A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ -1 & 2\end{pmatrix}, \det(A)=2, \operatorname{tr}(A)=3.$$

Ejercicio 2.5.6. Dados los sistemas bidimensionales lineales,

$$a)\ \left.\begin{array}{l}\dot{x}=x\\ \dot{y}=-x+2y\end{array}\right\}\text{(nodo)} \qquad b)\ \left.\begin{array}{l}\dot{x}=-y\\ \dot{y}=x\end{array}\right\}\text{(vórtice)}$$

$$c)\ \left.\begin{array}{l}\dot{x}=y\\ \dot{y}=x\end{array}\right\}\text{(punto silla)} \qquad d)\ \left.\begin{array}{l}\dot{x}=ax-y\\ \dot{y}=x+ay\end{array}\right\}\text{(espiral)}$$

demuestre que el tipo de punto crítico en $(x, y) = (0, 0)$ es el que se especifica (nodo, vórtice, espiral o punto de silla) y diga si es estable, inestable o asintóticamente estable. □

Ejercicio 2.5.7. Demuestre que los puntos críticos de:

$$\left.\begin{array}{l}\dot{x}=3x-x^2-xy\\ \dot{y}=y+y^2-3xy\end{array}\right\}$$

son (0,0) y (1,2). Estudie la estabilidad alrededor de ambos puntos críticos. □

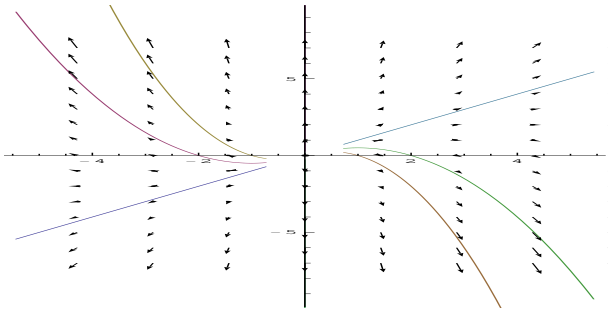


Figura 2.24: Nodo inestable

Ejercicio 2.5.8. Demuestre que (0,0) es un punto silla inestable del sistema bidimensional no lineal:

$$\left.\begin{aligned} \dot{x} &= 4x + 2y + 2x^2 - 3y^2 \\ \dot{y} &= 4x - 3y + 7xy \end{aligned}\right\}$$

□

2.6. Sistemas de EDOs lineales con coeficientes constantes: aplicaciones físicas

2.6.1. Oscilaciones acopladas: cuerda vibrante discreta

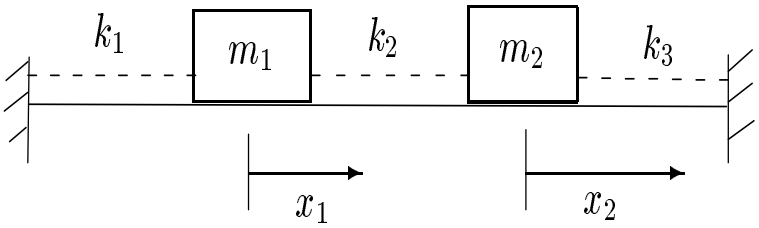


Figura 2.25: Dos masas conectadas entre sí y a dos paredes por tres resortes (líneas punteadas) y que se desplazan x_1 y x_2 desde su posición de equilibrio

La figura 2.25 muestra un sistema de dos bloques de masas m_1 y m_2 conectados entre sí y a dos paredes por medio de tres resortes de constantes k_1, k_2, k_3. Las ecuaciones diferenciales de movimiento se ve fácilmente que son:

$$\boxed{\begin{aligned} m_1\ddot{x}_1 &= -(k_2 + k_1)x_1 + k_2x_2 \\ m_2\ddot{x}_2 &= k_2x_1 - (k_2 + k_3)x_2 \end{aligned}} \tag{2.26}$$

Para resolverlas ensayamos una solución del tipo $x_i(t) = A_i e^{\lambda t}$, obteniendo un sistema:

$$\begin{pmatrix} m_1\lambda^2 + k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & m_2\lambda^2 + k_2 + k_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{2.27}$$

que tendrá solución no trivial $A_1, A_2 \neq 0$ si el determinante de la matriz de coeficientes (llamado *determinante característico o secular*) es:

$$\begin{vmatrix} m_1\lambda^2 + k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & m_2\lambda^2 + k_2 + k_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Consideremos el caso sencillo en que $m_1 = m_2 = m, k_1 = k_2 = k_3 = k$. Entonces tenemos una ecuación de cuarto grado con cuatro valores para

$$\lambda_{1\pm} = \pm i\sqrt{3k/m} = \pm i\omega_1, \quad \lambda_{2\pm} - = \pm i\sqrt{k/m} = \pm i\omega_2,$$

donde ω_1 y ω_2 se denominan *frecuencias naturales, características o normales* de vibración del sistema. La solución general será:

$$x_1(t) = C_1 \cos\omega_1 t + C_2 \operatorname{sen}\omega_1 t + C_3 \cos\omega_2 t + C_4 \cos\omega_2 t = E_1 \cos(\omega_1 t + \phi_1) + E_2 \cos(\omega_2 t + \phi_2)$$

y $x_2(t)$ puede ser hallado despejando de la primera ecuación en (2.26), obteniendo:

$$x_2(t) = C_1 \cos\omega_1 t + C_2 \operatorname{sen}\omega_1 t - C_3 \cos\omega_2 t - C_4 \cos\omega_2 t.$$

Las 4 constantes $C_{1,2,3,4}$ (o también E_1, E_2, ϕ_1, ϕ_2) se determinan con las condiciones iniciales: desplazamiento inicial $x_1(0)$ y $x_2(0)$, respecto a la posición de equilibrio, y velocidad inicial $\dot{x}_1(0)$ y $\dot{x}_2(0)$ de ambas masas.

Existen dos "movimientos básicos" o *modos normales de vibración* asociados a cada frecuencia normal $\omega_i, i = 1, 2$. Para determinar el modo normal correspondiente a $\omega = \omega_1$, se sustituye ésta en (2.27) y se encuentra que $A_1 = A_2$. En este caso, el modo normal de vibración corresponde pues al movimiento de las masas en la misma dirección (es decir, ambas a la derecha y ambas a la izquierda y así sucesivamente); se denomina *modo simétrico* (véase figura 2.26). Así, para "activar´´ este modo, las condiciones iniciales deben ser: $x_1(0) = x_2(0)$ y $\dot{x}_1(0) = \dot{x}_2(0)$.

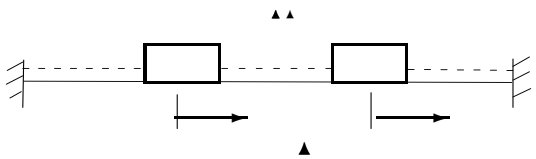


Figura 2.26: Modo normal simétrico

Similarmente encontramos el modo normal correspondiente a $\omega = \omega_2$, para el cual $A_1 = -A_2$. En este caso el modo normal de vibración corresponde al movimiento de las

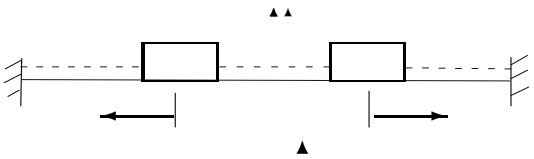


Figura 2.27: Modo normal antisimétrico

masas en direcciones opuestas: *modo antisimétrico* (véase figura 2.27). Para para "activar" este modo, las condiciones iniciales deben ser: $x_1(0) = -x_2(0)$ y $\dot{x}_1(0) = -\dot{x}_2(0)$.

Cualesquiera otras condiciones iniciales dan lugar a una superposición de ambos modos (simétrico y antisimétrico). Nótese que, ya que la energía de un oscilador es proporcional a su frecuencia al cuadrado, el modo antisimétrico tiene más energía que el simétrico. Esto es intuitivo, ya que en el caso antisimétrico los tres muelles están en "tensión", mientras que en simétrico, el muelle central juega el mismo papel que una barra rígida (no acumula energía elástica). En otras palabras, cuesta más excitar el modo antisimétrico que el simétrico.

Ejercicio 2.6.1. Determinar los modos normales para $k_1 = k_2 = k_3 = k$ pero $m_1 \neq m_2$. ¿Qué pasa cuando $m_1 >> m_2$?. □

Ejercicio 2.6.2. Repetir el problema para masas y constantes elásticas iguales añadiendo una fuerza externa $F_2(t) = \cos(3t)$ que actúa sobre la masa m_2. ¿Existe resonancia si $k = 3$ y $m = 1$? □

Ejercicio 2.6.3. Determinar la ecuación característica para el caso de masas y constantes elásticas iguales añadiendo ahora un amortiguador que ejerce una fuerza de rozamiento proporcional a la velocidad $F_r = 0{,}1\dot{x}$ sobre la masa m_1. □

Ejercicio 2.6.4. (*Absorbedor de vibraciones*). Plantear las ecuaciones diferenciales y escribir la ecuación característica del problema, en el caso general de constantes elásticas y masas distintas, cuando se elimina la pared derecha y sobre la masa m_1 actúa un amortiguador y una fuerza externa $F_1(t) = \cos(\omega t)$ ("terremoto"). Esto se conoce como un "absorbedor de vibraciones", donde la pared izquierda es el suelo (gírese la figura 90 grados en sentido antihorario), m_1 hace de equipo o mesa de trabajo y m_2 absorbe la vibración inducida por $F_1(t)$. Demuestre que, para el caso no amortiguado, la amplitud A_1 de la respuesta forzada $x_1 = A_1 \cos(\omega t + \phi_1)$ (solución particular) es cero siempre que $\omega = \sqrt{k_2/m_2}$. O sea, que bajo una vibración de frecuencia $\sqrt{k_2/m_2}$, la masa m_2 absorbe la vibración y el equipo (m_1) no se mueve. □

Ejercicio 2.6.5. (Práctica de ordenador). Considere un sistema de tres bloques de masas $m_1 = m_2 = m_3 = 1$ conectados entre sí y a dos paredes por medio de cuatro resortes de constantes iguales $k = 1$. Determinar las frecuencias naturales, los modos normales de vibración y las condiciones iniciales que se deben proporcionar para activar dichos modos normales. Nota: consulta la página 150 de la referencia [5]. □

Ejercicio 2.6.6. (Práctica de ordenador). (*Vibraciones inducidas por terremotos en edificios de muchos pisos*) Considere un bloque de 7 pisos en el que las oscilaciones transversales del terreno inducen un movimiento horizontal en cada uno de sus pisos, de forma que el piso número i está acoplado a el $i+1$ y al $i-1$ mediante la ecuación $m_i\ddot{x}_i = k(x_{i+1} - x_i) - k(x_i - x_{i-1})$. Cada piso pesa $m = 16$ toneladas y existe una fuerza horizontal interna restauradora entre cada piso con constante elástica $k = 160$ Ton/dm. Se pide:

1. Calcular las frecuencias naturales usando un programa informático como *Mathematica*.
2. Si ordenamos las frecuencias de mayor a menor, ¿Qué modo es el que entraría en resonancia si hay un temblor de tierra con frecuencia $\omega \approx 2seg^{-1}$? (en este caso, el edificio probablemente se derrumbaría...).
3. ¿Existe peligro de derrumbamiento para un temblor de tierra con frecuencia $\omega \approx 7seg^{-1}$?.

Una guía: la frecuencia natural más pequeña es $\omega_7 = 0{,}6611$ y la más grande es $\omega_1 = 6{,}1863seg^{-1}$ ¿cuál es el resto?. □

La cuerda vibrante discreta

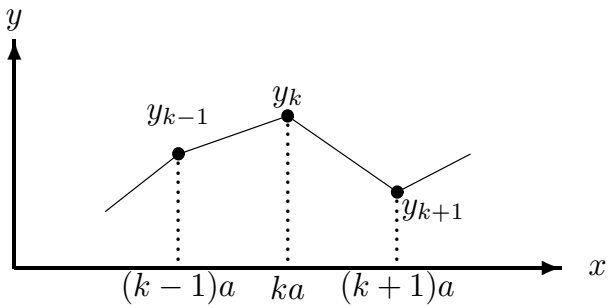


Figura 2.28: Cuerda vibrante discreta

Supongamos que tenemos N partículas de masa m unidas unas a otras por medio de cuerdas elásticas de masa despreciable y tensión T, separadas una distancia horizontal $x = a =$constante, cuyo movimiento se produce en la dirección del eje y, como el la figura 2.28. Sobre la partícula k actúa la fuerza debida a sus vecinas $(k-1)$ y $(k+1)$, de manera que la segunda ley de Newton dice que:

$$m\frac{d^2y_k}{dt^2} = -T\frac{y_k - y_{k-1}}{a} - T\frac{y_k - y_{k+1}}{a} = \frac{T}{ma}(y_{k-1} - 2y_k + y_{k+1}). \tag{2.28}$$

Si los extremos de la cuerda son fijos, tomaremos $y_0 = 0 = y_{N+1}$. En el límite al continuo de muchas partículas, $N \to \infty, a \to 0$, conservando la masa total $M = Nm$, de manera que

$\frac{m}{a} \to \sigma = \frac{M}{Na}$ =constante (densidad) se obtiene la *ecuación de ondas* para las oscilaciones transversales de una cuerda [véase también más adelante la ecuación (7.2) para otra derivación de la ecuación de ondas]:

$$\frac{\partial^2 y(t,x)}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 y(t,x)}{\partial x^2},$$

donde $c^2 = T/\sigma$ es la velocidad al cuadrado de la onda, y donde hemos usado la versión discreta de la derivada segunda:

$$\frac{y_{k-1} - 2y_k + y_{k+1}}{a^2} \simeq \left.\frac{\partial^2 y(t,x)}{\partial x^2}\right|_{x=ka}, \quad \text{para } a \to 0$$

Ejercicio 2.6.7. Discuta los modos normales de vibración para una cuerda discreta con $N = 2, 3, 4, \ldots$ masas. □

Ejercicio 2.6.8. (Práctica de ordenador) Consulte la página 169 de la referencia [5] para una animación gráfica del movimiento de la cuerda vibrante con Mathematica. □

2.6.2. Transformador eléctrico

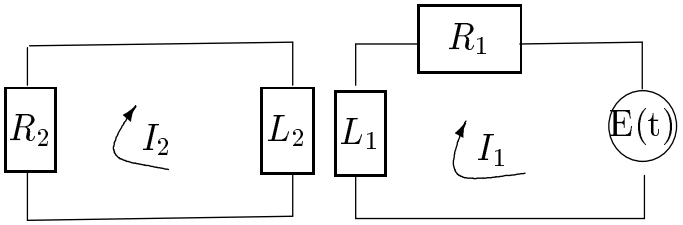


Figura 2.29: Transformador eléctrico

Ya hemos visto en la sección 2.3.5 las leyes de Kirchhoff. Un transformador eléctrico consiste básicamente en dos circuitos RL acoplados magnéticamente como en la figura 2.29. El flujo variable que genera la corriente primaria I_1 del circuito 1 (derecha) en el circuito 2 (izquierda) induce una tensión en el circuito 2 de la forma $L_{12}\frac{dI_1}{dt}$, y viceversa, donde L_{12} es la inductancia de acoplamiento (se asume que $L_{12}^2 < L_1 L_2$). Es decir, la variación de las corrientes I_1 e I_2 en el tiempo viene dada por el sistema de ecuaciones diferenciales:

$$\begin{aligned} L_{12}\frac{dI_1}{dt} + L_2\frac{dI_2}{dt} + R_2 I_2 &= 0 \\ L_{12}\frac{dI_2}{dt} + L_1\frac{dI_1}{dt} + R_1 I_1 &= E(t) \end{aligned}$$

Este sistema de ecuaciones de primer orden acopladas se puede escribir en forma compacta como $L[D]\vec{I} = \vec{E}(t)$ donde $\vec{I} = (I_1, I_2), \vec{E} = (0, E)$ y

$$L[D] = \begin{pmatrix} L_{12}D & L_2D + R_2 \\ L_1D + R_1 & L_{12}D \end{pmatrix}.$$

Para desacoplar el sistema podemos recurrir al método de triangulación de Gauss para la matriz ampliada

$$(L[D]|\vec{E}) = \left(\begin{array}{cc|c} L_{12}D & L_2D + R_2 & 0 \\ L_1D + R_1 & L_{12}D & E(t) \end{array}\right).$$

o también al método de Cramer:

$$\begin{vmatrix} L_{12}D & L_2D + R_2 \\ L_1D + R_1 & L_{12}D \end{vmatrix} I_1 = \begin{vmatrix} 0 & L_2D + R_2 \\ E(t) & L_{12}D \end{vmatrix}$$
$$\begin{vmatrix} L_{12}D & L_2D + R_2 \\ L_1D + R_1 & L_{12}D \end{vmatrix} I_2 = \begin{vmatrix} L_{12}D & 0 \\ L_1D + R_1 & E(t) \end{vmatrix}$$

donde, como ya comentamos en la sección 2.19, entendemos que $DE(t) = \dot{E}(t)$. Teniendo en cuenta esto las ecuaciones anteriores quedan:

$$\begin{aligned} (L_1L_2 - L_{12}^2)\ddot{I}_1 + (R_1L_2 + R_2L_1)\dot{I}_1 + R_1R_2I_1 &= R_2E(t) + L_2\dot{E}(t) \\ (L_1L_2 - L_{12}^2)\ddot{I}_2 + (R_1L_2 + R_2L_1)\dot{I}_2 + R_1R_2I_2 &= -L_{12}\dot{E}(t). \end{aligned}$$

Para el caso de fuerza electromotriz constante $E(t) = E_0$ (corriente continua) la solución general de este sistema de EDOs se puede ver que es (hágase como ejercicio):

$$\begin{aligned} I_1 &= C_1e^{\alpha t} + C_2e^{\beta t} + E_0/R_1 \\ I_2 &= \frac{1}{L_{12}R_2}\left((L_1L_2 - L_{12}^2)(\alpha C_1e^{\alpha t} + \beta C_2e^{\beta t}) + L_2R_1(C_1e^{\alpha t} + C_2e^{\beta t})\right) \\ \alpha, \beta &= \frac{1}{2}\frac{-(R_1L_2 + R_2L_1 \pm \sqrt{(R_1L_2 + R_2L_1)^2 + 4L_{12}^2R_1R_2}}{L_1L_2 - L_{12}^2} < 0 \end{aligned}$$

donde C_1, C_2 son constantes de integración arbitrarias. También se puede demostrar que $I_1(t \to \infty) = E_0/R_1,\ I_2(t \to \infty) = 0$ utilizando el hecho de que $L_{12}^2 < L_1L_2$.

Ejercicio 2.6.9. Repita el problema para una fuerza electromotriz variable $E(t) = E_0 \operatorname{sen}(\omega t)$ (corriente alterna). ¿Existe posibilidad de resonancia?.□

2.6.3. Mezclas múltiples

En el ejemplo 1.3.6 hemos discutido un modelo para la renovación de un liquido en un tanque. Consideremos ahora dos tanques de disolución conectados como se indica en la figura 2.30. El tanque 1 contiene $x_1(t)$ kilos de soluto en V_1 litros de disolución y el

tanque 2 tiene $x_2(t)$ kilos de soluto en V_2 litros de disolución. La disolución se bombea de un tanque a otro con velocidades k_{12} litros/min y k_{21} litros/min. Por otro lado, al tanque 1 se incorpora disolución con una concentración c_e a razón de k_1 litros/min y del tanque 2 escapa disolución a razón de k_2 litros/min. Se trata de calcular la cantidad de soluto en ambos tanques transcurrido un tiempo T si inicialmente había $x_1(0) = x_1^{(0)}$ y $x_2(0) = x_2^{(0)}$ kg de soluto.

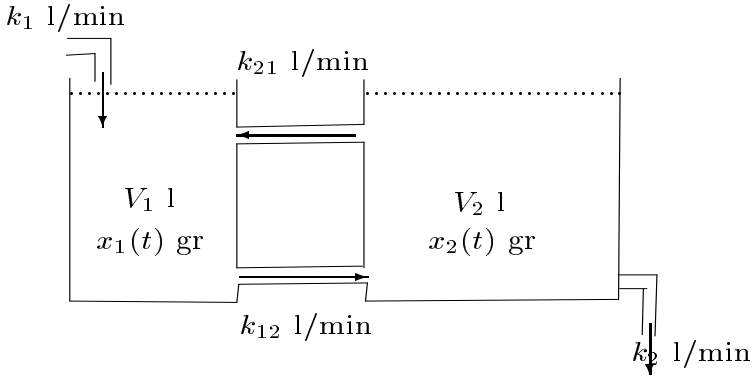


Figura 2.30: Mezclas en tanques de salmuera

La variación de la cantidad de gramos de soluto por unidad de tiempo en el recipiente 1 es igual a los gramos que entran menos los que salen por unidad de tiempo:

$$\frac{dx_1}{dt} = k_1 c_e + k_{21}\frac{x_2}{V_2(t)} - k_{12}\frac{x_1}{V_1(t)},$$

y análogamente para el recipiente 2:

$$\frac{dx_2}{dt} = k_{12}\frac{x_1}{V_1(t)} - (k_{21} + k_2)\frac{x_2}{V_2(t)}.$$

Éste constituye un sistema de dos ecuaciones diferenciales ordinarias lineales de primer orden acopladas. Simplifiquemos suponiendo que $k_{12} - k_{21} = k_2$ y $k_{21} + k_1 = k_{12}$, o sea, que los volúmenes V_2 y V_1 de los tanques 2 y 1 (respectivamente) se mantienen constantes (es decir, consideramos coeficientes constantes). Este sistema se puede escribir en forma compacta como $L[D]\vec{x} = \vec{E}$ donde $\vec{x} = (x_1, x_2)$, $\vec{E} = (k_1 c_e, 0)$ y

$$L[D] = \begin{pmatrix} D + \frac{k_{12}}{V_1} & -\frac{k_{21}}{V_2} \\ -\frac{k_{12}}{V_1} & D + \frac{k_{21}+k_2}{V_2} \end{pmatrix}.$$

Para desacoplar el sistema podemos recurrir al método de triangulación de Gauss para la matriz ampliada o, al igual que hicimos para el transformador eléctrico, al método de

Cramer:

$$\begin{vmatrix} D+\frac{k_{12}}{V_1} & -\frac{k_{21}}{V_2} \\ -\frac{k_{12}}{V_1} & D+\frac{k_{21}+k_2}{V_2} \end{vmatrix} x_1 = \begin{vmatrix} k_1c_e & -\frac{k_{21}}{V_2} \\ 0 & D+\frac{k_{21}+k_2}{V_2} \end{vmatrix}$$
$$\begin{vmatrix} D+\frac{k_{12}}{V_1} & -\frac{k_{21}}{V_2} \\ -\frac{k_{12}}{V_1} & D+\frac{k_{21}+k_2}{V_2} \end{vmatrix} x_2 = \begin{vmatrix} D+\frac{k_{12}}{V_1} & k_1c_e \\ -\frac{k_{12}}{V_1} & 0 \end{vmatrix}$$

donde ahora entendemos que $Dc_e(t) = \dot{c}_e(t)$.

Ejemplo 2.6.10. Considere dos tanques de salmuera conectados como se indica en la figura. El tanque 1 contiene $x_1(t)$ kilos de sal en $V_1 = 100$ litros de salmuera y el tanque 2 tiene $x_2(t)$ kilos de sal en $V_2 = 200$ litros de salmuera. La salmuera se bombea de un tanque a otro con velocidades $k_{12} = 30$ l/min y $k_{21} = 10$ l/min. Por otro lado, al tanque 1 se incorpora agua salada con una concentración dependiente del tiempo $c_e = te^{-t}$ kg/ℓ (represente gráficamente esta función e interprétela), a razón de $k_e = 20$ l/min y del tanque 2 escapa salmuera a razón de $k_s = 20$ l/min. Se trata de calcular la cantidad de sal en ambos tanques transcurridos 2 minutos si inicialmente había $x_1(0) = x_2(0) = 10$ kg de sal.
Solución: Sustituyendo los datos en las ecuaciones anteriores tenemos y multiplicando por 400 tenemos que la ecuación para $x_1(t)$ es:

$$400\ddot{x}_1 + 180\dot{x}_1 + 12x_1 = 8000e^{-t} - 6800te^{-t}$$

cuya ecuación característica tiene por raíces:

$$400\lambda^2 + 180\lambda + 12 = 0 \Rightarrow \lambda_\pm = \frac{-9 \pm \sqrt{33}}{40} \simeq -0{,}081, -0{,}3686.$$

Ensayando una solución particular del tipo $x_{1p}(t) = (A + Bt)e^{-t}$, resolviendo A y B por el método de los coeficientes indeterminados e imponiendo las condiciones iniciales se obtiene que:

$$\begin{aligned} x_1(t) &= \frac{1}{55506}\Big\{5(298881 + 33107\sqrt{33})e^{\lambda_- t} + 5(298881 - 33107\sqrt{33})e^{\lambda_+ t} \\ &\quad -1650(1475 + 986t)e^{-t}\Big\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_2(t) &= \frac{1}{9251}\Big\{-10(8162 + 8315\sqrt{33})e^{\lambda_- t} - 10(8162 - 8315\sqrt{33})e^{\lambda_+ t} \\ &\quad -1650(115 + 58t)e^{-t}\Big\}. \end{aligned}$$

Sustituyendo $t = 2$ tenemos: $x_1(2) \simeq 15{,}53, x_2(2) \simeq 14$. □

Ejercicio 2.6.11. Idem que el ejercicio anterior, pero ahora se incorpora agua pura al tanque 1. Calcule la cantidad de sal en ambos tanques transcurrida una hora si inicialmente había $x_1(0) = x_2(0) = 25$ kg de sal.
Solución: $x_1(60) \simeq 0{,}078, x_2(60) = 0{,}34$. Las raíces de la ecuación característica son $\lambda_+ = -0{,}081, \lambda_- = -0{,}3686$. □

Ejercicio 2.6.12. Idem que el ejercicio anterior, pero ahora $V_1 = 100$ y $V_2 = 300$, $k_{12} = 25$ ℓ/min y $k_{21} = 15$ ℓ/min. Por otro lado, al tanque 1 se incorpora agua salada, con una concentración dependiente del tiempo $c_e = e^{-t/2}$ kg/ℓ, a razón de $k_e = 10$ ℓ/min y del tanque 2 escapa salmuera a razón de $k_s = 10$ ℓ/min. Calcule la cantidad de sal en ambos tanques transcurridos 2 minutos si inicialmente había $x_1(0) = x_2(0) = 5$ kg de sal.
Solución: $x_1(2) \approx 13$ kg,$x_2(2) \approx 9$ kg □

Ejercicio 2.6.13. Idem que el ejercicio anterior, pero ahora $V_1 = 100$ y $V_2 = 200$ litros de salmuera, $k_{12} = 20$ ℓ/min y $k_{21} = 10$ ℓ/min. Por otro lado, al tanque 1 se incorpora agua salada, con una concentración dependiente del tiempo $c_e = \text{sen}(t/2)$ kg/ℓ, a razón de $k_e = 10$ ℓ/min y del tanque 2 escapa salmuera a razón de $k_s = 10$ ℓ/min. Calcule la cantidad de sal en ambos tanques transcurridos 2 minutos si inicialmente había $x_1(0) = x_2(0) = 10$ kg de sal.
Solución: $x_1(2) \approx 15{,}666$ kg,$x_2(2) \approx 12{,}423$ kg □

Ejercicio 2.6.14. (Practica de ordenador). Considere cuatro tanques de salmuera colocados en los vértices de un cuadrado y conectados por los lados del cuadrado, como muestra la figura 2.31, con volúmenes iniciales de $V_1 = 100, V_2 = 200, V_3 = 300$ y $V_4 = 400$ litros respectivamente. La salmuera se bombea de un tanque a otro en sentido horario con velocidades $k_{12} = 20$ ℓ/min, $k_{23} = 20$ ℓ/min, $k_{34} = 10$ ℓ/min y $k_{41} = 10$ ℓ/min. Por otro lado, al tanque 1 se incorpora agua salada, con una concentración dependiente del tiempo $c_e = te^{-t}$ kg/ℓ, a razón de $k_e = 10$ ℓ/min y del tanque 3 escapa salmuera a razón de $k_s = 10$ ℓ/min. Realize una representación gráfica de la cantidad de sal en cada tanque en los primeros 20 minutos, si inicialmente había $x_1(0) = x_2(0) = x_3(0) = x_4(0) = 10$ kg de sal. Ayuda: consulte la página 114 de la referencia [5] y use el comando NDSolve para la solución numérica de EDOs con *Mathematica*, descrito en la página 116 de la referencia [5] . □

2.6.4. Procesos de difusión

Consideramos problemas de difusión como, por ejemplo, flujos de calor entre zonas a distinta temperatura. Sabemos que el calor "fluye" de las zonas más calientes a las más frías, es decir, sigue la dirección contraria al gradiente de temperaturas:

$$\vec{J}(\vec{r}, t) = -\kappa \vec{\nabla} T(\vec{r}, t),$$

donde $\vec{J}$ denota el vector corriente de calor, κ la conductividad térmica del material[3] y $T(\vec{r}, t)$ el campo de temperaturas en cada punto $\vec{r}$ del espacio y cada instante de tiempo t. La ecuación de continuidad (que en este caso coincide con la ley de conservación de la energía)

$$\frac{\partial Q(\vec{r}, t)}{\partial t} = -\vec{\nabla} \cdot \vec{J}(\vec{r}, t)$$

[3]la conductividad térmica κ depende en general de la dirección y la posición (es decir, es una matriz o, mejor dicho, un "tensor"). No obstante, nosotros consideraremos sólo materiales homogéneos e isótropos para los cuales κ es escalar y constante

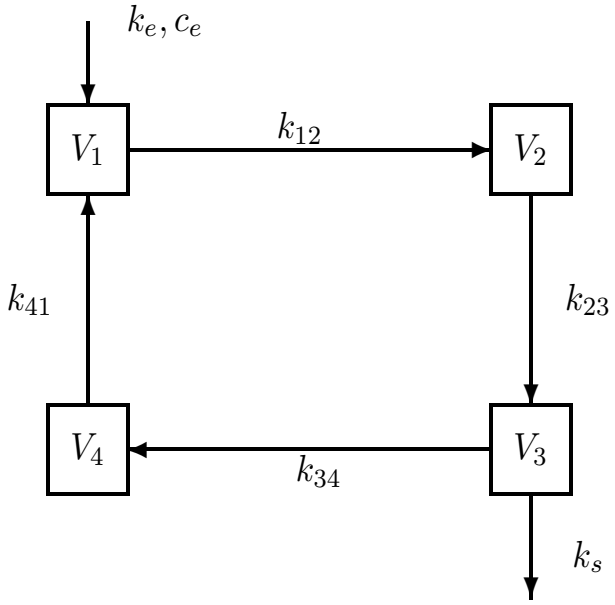


Figura 2.31: Mezclas múltiples

establece entonces que la cantidad de calor Q que ingresa o abandona por unidad de tiempo un elemento infinitesimal de volumen dado localizado en $\vec{r}$ es igual a la divergencia (flujo por unidad de volumen) del vector corriente de calor a través de las paredes. Sabiendo que la relación entre calor y temperatura viene dada a través de la expresión $Q = c\rho T$, donde ρ denota la densidad y c la capacidad calorífica del material, nos queda la siguiente Ecuación en Derivadas Parciales:

$$\frac{\partial T(\vec{r},t)}{\partial t} = -\frac{1}{c\rho}\vec{\nabla}\vec{J}(\vec{r},t) = \frac{\kappa}{c\rho}\vec{\nabla}^2 T(\vec{r},t)$$

que describe la evolución en el tiempo de la distribución de temperaturas en un material. A esta ecuación hay que unir condiciones iniciales y ciertas condiciones de contorno. Véase más adelante la sección 7.2 para una resolución exacta. Aquí abordaremos la aproximación discreta, que reduce la ecuación en derivadas parciales a un sitema de ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden.

En el ejemplo 1.2.10 hemos considerado el caso más simple que se corresponde con la ley de Newton para el enfriamiento de una sustancia, según la cual, la velocidad a la que se enfría una sustancia al aire libre es proporcional a la diferencia entre la temperatura de dicha sustancia T y la del aire T_a de la forma: $\frac{dT(t)}{dt} = \kappa(T_a - T(t))$. Estudiemos varios casos particulares más complicados.

Difusión del calor en un vástago

Para un vástago de longitud L, densidad lineal λ y capacidad calorífica c, la Ecuación en Derivadas Parciales a estudiar es:

$$\frac{\partial T(x,t)}{\partial t} = \frac{\kappa}{c\lambda}\frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial x^2} \tag{2.29}$$

con condiciones iniciales $T(x,0) = T^{(0)}(x)$ y de contorno, por ejemplo:

1. Extremos no aislados: $T(0,t) = a, T(L,t) = b$
2. Extremos aislados: $T'(0,t) = T'(L,t) = 0$ (variación nula de temperatura en los extremos)

La resolución analítica de este tipo de ecuaciones sale fuera de los objetivos de este volumen. No obstante, con vistas a soluciones numéricas, podemos dividir el vástago en N trozos de longitud L/N (es decir, fijarnos sólo en los $N+1$ puntos resultantes, contando los extremos) y sustituir derivadas por diferencias finitas:

$$\left.\frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial x^2}\right|_{x=\frac{L}{N}k} \simeq \frac{T_{k-1}(t) - 2T_k(t) + T_{k+1}(t)}{(L/N)^2}, \tag{2.30}$$

donde estamos denotando $T_k(t) \equiv T(kL/N, t)$, de manera que la Ecuación en Derivadas Parciales (2.29) queda reducida a un Sistema de $N-1$ Ecuaciones Diferenciales Ordinarias de primer orden como:

$$\boxed{\dot{T}_k(t) = \frac{\kappa N^2}{c\lambda L^2}(T_{k-1}(t) - 2T_k(t) + T_{k+1}(t))}, \; k = 1, \ldots, N-1, \tag{2.31}$$

con condiciones iniciales $T_k(0) = T_k^{(0)}, k = 1, \ldots, N-1$ y de contorno $T_0(t) = a, T_N(t) = b$ (para extremos en contacto con termostatos a temperaturas constantes a y b, respectivamente). Cuando se alcanza el *estado estacionario*

$$\dot{T}_k(t) = 0 \Rightarrow T_k = (T_{k-1} + T_{k+1})/2, \tag{2.32}$$

es decir, la temperatura en cada punto es la *media aritmética* de los puntos adyacentes.

Ejercicio 2.6.15. Considere un vástago con $L = 10, \kappa = 1, \lambda = 1, c = 1$, y tome $N = 3$ trozos (es decir, 2 puntos interiores). Describa la evolución de la temperatura en el tiempo en dichos puntos, tomando como condición inicial $T(x,0) = 10$ y como condición de contorno: extremo izquierdo a temperatura cero ($T(0,t) = T_0(t) = 0$) y extremo derecho a temperatura 100 ($T(L,t) = T_3(t) = 100$). ¿Cuál es la temperatura a largo plazo $t \to \infty$ (estado estacionario)?. □

Ejercicio 2.6.16. Repita el ejercicio anterior con extremo derecho a temperatura $T(L,t) = T_3(t) = 100\,\mathrm{sen}(t)$. □

Ejercicio 2.6.17. (Práctica de ordenador) Considere un vástago con $L = 10, \kappa = 1, \lambda = 1, c = 1$, tome $N = 6$ trozos (5 puntos interiores) y describa gráficamente la evolución de la temperatura en el tiempo, tomando como condición inicial $T(x, 0) = 10$ y como condición de contorno: extremo izquierdo a temperatura $T_0(t) = 0$ y extremo derecho a temperatura $T_6(t) = 100$. ¿Cuál es la temperatura a largo plazo (estado estacionario)?. □

Ejercicio 2.6.18. (Práctica de ordenador) Véase la página 173 de la referencia [5] para una animación gráfica de la difusión del calor en un vástago. □

Difusión del calor en una placa

La ecuación diferencial para la variación temporal de la temperatura en una placa rectangular de lados L_x, L_y, densidad superficial σ, conductividad térmica κ y capacidad calorífica c es:

$$\frac{\partial T(x,y,t)}{\partial t} = \frac{\kappa}{c\sigma}\left(\frac{\partial^2 T(x,y,t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T(x,y,t)}{\partial y^2}\right) \tag{2.33}$$

con condiciones iniciales $T(x, y, 0) = T_0(x, y)$ y ciertas condiciones de contorno en los bordes, como por ejemplo $T(0, y, t) = T(L_x, y, t) = 0 = T(x, 0, t) = T(x, L_y, t) = 0$. Con vistas a soluciones numéricas, podemos fijarnos en una malla de $(N_x - 1) \times (N_y - 1)$ puntos interiores de la placa y, denotando por $T(iL_x/N_x, jL_y/N_y, t) = T_{i,j}(t)$, sustituir derivadas por diferencias finitas:

$$\left.\frac{\partial^2 T(x,y,t)}{\partial x^2}\right|_{x=\frac{L_x}{N_x}i, y=\frac{L_y}{N_y}j} \simeq \frac{T_{i-1,j}(t) - 2T_{i,j}(t) + T_{i+1,j}(t)}{(L_x/N_x)^2}, \tag{2.34}$$

y, de manera análoga, para la derivada parcial segunda respecto de y. De esta forma, la Ecuación en Derivadas Parciales queda reducida a un Sistema de $(N_x - 1) \times (N_y - 1)$ Ecuaciones Diferenciales Ordinarias de primer orden como:

$$\boxed{\dot{T}_{i,j} = \frac{\kappa N_x^2}{c\sigma L_x^2}(T_{i-1,j} - 2T_{i,j} + T_{i+1,j}) + \frac{\kappa N_y^2}{c\sigma L_y^2}(T_{i,j-1} - 2T_{i,j} + T_{i,j+1}),} \tag{2.35}$$

$$i = 1, \ldots, N_x - 1,\ j = 1, \ldots, N_y - 1.$$

Tomando por ejemplo $L_x = L_y$ y $N_x = N_y$ (placa cuadrada), en el *estado estacionario* se verifica:

$$\dot{T}_{i,j}(t) = 0 \Rightarrow T_{i,j} = (T_{i+1,j} + T_{i-1,j} + T_{i,j+1} + T_{i,j-1})/4, \tag{2.36}$$

es decir, la temperatura en cada punto es la *media aritmética* de los puntos adyacentes.

Ejercicio 2.6.19. (Práctica de ordenador) Considérese la placa de la figura 2.32. Los lados de la placa coincidentes con los ejes X e Y se mantienen a temperatura de 100 grados centígrados, mientras que los dos lados restantes se mantienen a cero grados. Tomando como condición inicial $T_{i,j} = 50$ grados, $i, j = 1, 2$, y $L = 3, \sigma = \kappa = c = 1$, describa la evolución de la temperatura en el tiempo. ¿Cuál es la temperatura a largo plazo (estado estacionario)?. □

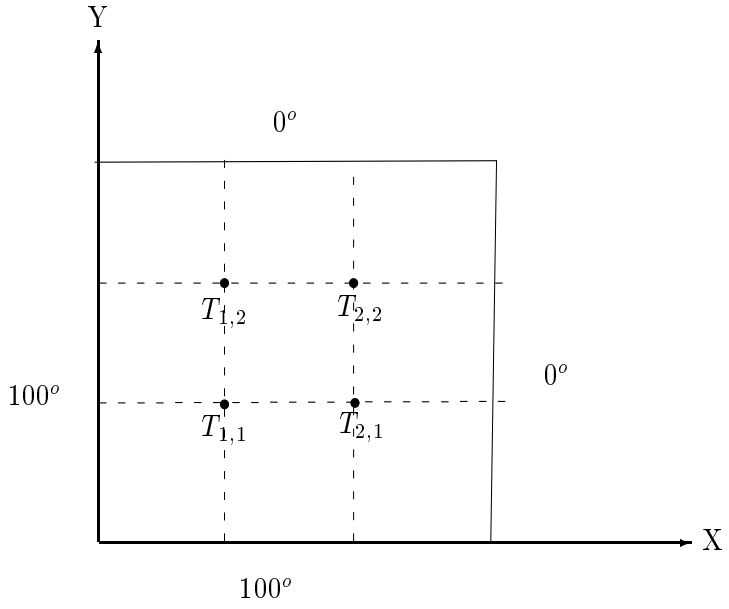


Figura 2.32: Distribución de temperaturas en una placa

Ejercicio 2.6.20. (Práctica de ordenador) Considérese ahora una placa como la de figura 2.32 pero con $(N_x - 1) * (N_y - 1) = 5 * 5 = 25$ puntos interiores, en vez de 4 como antes. Los lados de la placa coincidentes con los ejes X e Y se mantienen a temperatura de 100 grados centígrados, mientras que los dos lados restantes se mantienen a cero grados. Calcule la temperatura en el estado estacionario $T_{i,j}(\infty)$ y dibuje las isotermas con ayuda del comando ListContourPlot (en la página 40 de la referencia [5]). □

2.6.5. Modelo de Lotka-Volterra: dos especies en competencia

Vamos ahora a ver un modelo propuesto, independientemente, por Lotka y Volterra que describe la competencia entre dos especies. Se trata de dos especies que viven cerca y comparten necesidades básicas: espacio, recursos, etc. En ocasiones, sólo las más fuertes sobreviven, mientras que la especie competidora más débilv evoluciona hasta su extinción. Este es el denominado "Principio de exclusión competitiva". Una especie se impone porque sus miembros son más eficaces a la hora de encontrar y explotar los recursos, lo que conduce a un aumento de la población. Indirectamente, esto significa que la poblaciónn competidora encuentra con dificultad los mismos recursos y no puede crecer hasta su máximo tamaño como cuando está sola. El modelo de Lotka y Volterra describe la competencia entre las dos especies sin referencia directa a los recursos que comparten y descansa sobre los siguientes supuestos:

1. En ausencia de competidores, cada población sigue un modelo logístico

2. Cada especie contribuye al decrecimiento de la tasa de crecimiento relativo de la

otra en una cantidad proporcional a la población de la primera.

Los dos supuestos anteriores conducen al modelo siguiente:

$$\begin{aligned} \dot{P}_1 &= k_1 P_1(M_1 - P_1) - \beta_{12} k_1 P_1 P_2 \\ \dot{P}_2 &= k_2 P_2(M_2 - P_2) - \beta_{21} k_2 P_2 P_1 \end{aligned} \tag{2.37}$$

Haciendo los cambios de variable $x = P_1/M_1$, $y = P_2/M_2$, $\tau = k_1 M_1 t$, podemos poner

$$\begin{aligned} \dot{x} &= x(1 - x - \beta_{12}\frac{M_2}{M_1} y) \\ \dot{y} &= \frac{k_2 M_2}{k_1 M_1} y(1 - y - \beta_{21}\frac{M_1}{M_2} x) \end{aligned} \tag{2.38}$$

y llamando $q = \frac{k_2 M_2}{k_1 M_1}, b_{12} = \beta_{12}\frac{M_2}{M_1}, b_{21} = \beta_{21}\frac{M_1}{M_2}$ llegamos a

$$\begin{aligned} \dot{x} &= x(1 - x - b_{12} y) \\ \dot{y} &= qy(1 - y - b_{21} x). \end{aligned} \tag{2.39}$$

Los puntos de equilibrio son

$$(x, y) = (0,0), (0,1), (1,0), \left(\frac{1 - b_{12}}{1 - b_{12} b_{21}}, \frac{1 - b_{21}}{1 - b_{12} b_{21}}\right).$$

El último pertenece al primer cuadrante siempre que:

- $b_{12}, b_{21} < 1$
- $b_{12}, b_{21} > 1$

Capítulo 3

Resolución de ecuaciones diferenciales mediante series de potencias

Bibliografía: Ver Capítulo 5 de [1] y Capítulo 5 de [2]

3.1. Soluciones en torno a puntos ordinarios

Nos restringiremos fundamentalmente a ecuaciones diferenciales lineales homogeneas de orden 2

$$a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0, \tag{3.1}$$

con coeficientes variables a_j. Este tipo de ecuaciones surgen mayormente al reducir ecuaciones en derivadas parciales por el método de separación de variables (véase capítulo 7) a una sola variable independiente x, generalmente en coordenadas curvilineas (cilíndricas, esfericas, etc) como por ejemplo un radio $x = r$. En este capítulo denotaremos por $y(x)$ a la variable dependiente. Dividiendo por $a_2(x)$ (en la región donde a_2 sea diferente de cero), escribiremos la anterior ecuación en forma estándar:

$$\boxed{y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0}. \tag{3.2}$$

Definición 3.1.1. *(Puntos ordinarios y singulares)* Se dice que x_0 es un punto ordinario de (3.2) si tanto P como Q son analíticas en x_0, es decir, si ambas pueden representarse mediante series de potencias en $(x - x_0)$ con un radio de convergencia $R > 0$. Un punto que no es ordinario, se denomina singular.

Para resolver la ecuación (3.2) en torno a un punto ordinario x_0, ensayaremos una serie de potencias de la forma

$$\boxed{y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x - x_0)^n}, \tag{3.3}$$

con c_n ciertos coeficientes a calcular. Antes de ello, hagamos un breve repaso de las series de potencias.

3.1.1. Repaso de series de potencias

Se define una serie de potencias centrada en x_0 como $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x - x_0)^n$. Por ejemplo, todos recordamos el desarrollo en serie de Taylor de una función analítica $f(x)$ en torno a x_0 donde los coeficientes c_n se calculan en términos derivadas sucesivas de f evaluadas en x_0, más precisamente $c_n = f^{(n)}(x_0)/n!$. Por ejemplo, para la función exponencial, el desarrollo de Taylor en torno a $x_0 = 0$ (desarrollo de Maclaurin) es $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$.

- **Convergencia**: Una serie $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x - x_0)^n$ es convergente en x si existe el límite $\lim_{N\to\infty} S_N$ de la sucesión $S_N = \sum_{n=0}^{N} c_n(x - x_0)^n$ de sumas parciales.
- **Convergencia absoluta**: Una serie $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-x_0)^n$ converge absolutamente en x si $\sum_{n=0}^{\infty} |c_n(x - x_0)^n|$ converge. Convergencia absoluta implica convergencia ya que $|\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x - x_0)^n| < \sum_{n=0}^{\infty} |c_n(x - x_0)^n|$
- **Intervalo de convergencia**: es el intervalo de todos los valores de x para los cuales la serie converge.

- **Radio de convergencia**: El criterio del cociente o D' Alembert nos indica que una condición para que $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-x_0)^n$ converja absolutamente es que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|c_{n+1}(x-x_0)^{n+1}|}{|c_n(x-x_0)^n|} < 1 \Rightarrow |x-x_0| < \lim_{n\to\infty} \frac{|c_n|}{|c_{n+1}|} = R$$

  donde R denota el radio de convergencia. El criterio de la raiz o de Cauchy proporciona la cota

$$\lim_{n\to\infty} |c_n(x-x_0)^n|^{1/n} < 1 \Rightarrow |x-x_0| < 1/\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|} = R$$

- **Una serie de potencias define una función** $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-x_0)^n$ cuyo dominio es el intervalo de convergencia de la serie. Si el radio de convergencia es $R > 0$, entonces f es continua, diferenciable e integrable en el intervalo (x_0-R, x_0+R) y f' e $\int f$ pueden calcularse derivando e integrando término a término la serie.

- **Una función f es analítica en un punto** x_0 si ésta puede representarse mediante una serie de potencias centrada en x_0 con un radio de convergencia $R > 0$. Un ejemplo de función no analítica en $x_0 = 0$ es $f(x) = e^{-1/x^2}$, ya que todas las derivadas $f^{(n)}(0) = 0$ son nulas en $x_0 = 0$, con lo cual la serie de Taylor es cero, pero $f(x) \neq 0$ en general.

- **Dos series son iguales** dentro de su radio de convergencia si son iguales término a término. Por lo tanto, una serie es cero si todos sus coeficientes c_n son cero

- **Suma de series**. Sea $n_0 < n_1$, entonces:

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n + \sum_{n=n_1}^{\infty} b_n(x-x_0)^n = \sum_{n=n_0}^{n_1-1} a_n(x-x_0)^n + \sum_{n=n_1}^{\infty} (b_n+c_n)(x-x_0)^n. \quad (3.4)$$

  El radio de convergencia de la suma es el menor de los radios de convergencia de los sumandos.

- **Producto de series**.

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n \sum_{n=n_1}^{\infty} b_n(x-x_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-x_0)^n, \;\; c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}. \quad (3.5)$$

  El radio de convergencia del producto es el menor de los radios de convergencia de los factores.

3.1.2. Soluciones en serie de potencias

Nosotros tomaremos siempre $x_0 = 0$ sin pérdida de generalidad. En efecto, en el caso de que $x_0 \neq 0$, haremos un cambio de variable independiente $z = x - x_0$ de manera que $z_0 = 0$.

Teorema 3.1.2. (Existencia de soluciones en forma de serie de potencias) *Si $x = x_0$ es un punto ordinario de la ecuación* (3.2)*, siempre podemos encontrar dos soluciones linealmente independientes en forma de serie de potencias* (3.3)*. Una solución de este tipo converge al menos en algun intervalo definido por $|x - x_0| < R$, donde R es la distancia entre x_0 y el punto singular más cercano (real o complejo).*

Ejemplo 3.1.3. *(Ecuación de Airy)* Sea la ecuación $y'' + xy = 0$, que ya ha aparecido en (2.14) al estudiar el movimiento de un oscilador con un resorte que se endurece. Esta ecuación no tiene puntos singulares, ya que $P(x) = 0$ y $Q(x) = x$ son analíticas en todo $\mathbb{R}$. Por lo tanto, el teorema anterior garantiza la existencia de dos soluciones en serie centradas en $x_0 = 0$ con radio de convergencia infinito. En efecto, sustituyendo (3.3) en

$$y'' + xy = \sum_{n=2}^{\infty} c_n n(n-1)x^{n-2} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+1}.$$

Hacemos $n - 2 = m$ en la primera suma y $n + 1 = m$ en la segunda, de manera que

$$y''+xy = \sum_{m=0}^{\infty} c_{m+2}(m+2)(m+1)x^m + \sum_{m=1}^{\infty} c_{m-1}x^m = 2c_2 + \sum_{m=1}^{\infty}[c_{m+2}(m+2)(m+1)+c_{m-1}]x^m = 0$$

lo cual implica que

$$c_2 = 0,\ [c_{m+2}(m+2)(m+1) + c_{m-1}] = 0,\ m = 1, 2, 3, \ldots$$

dando una relación de recurrencia para

$$c_{m+2} = -\frac{c_{m-1}}{(m+2)(m+1)}, \quad c_2 = 0.$$

Es decir, los coeficientes c se determinan en pasos de 3. Por ejemplo, c_3 se determina en términos de c_0, mientras que c_4 se determina en términos de c_1. Tomemos entonces primeramente $m + 2 = 3k$, de manera que $m - 1 = 3k - 3 = 3(k - 1)$, y renombremos $c_{3k} \equiv a_k$. La recurrencia anterior nos dice en este caso

$$a_k = \frac{-a_{k-1}}{3k(3k-1)} = \frac{(-1)^2 a_{k-2}}{[3k(3k-1)][3(k-1)(3(k-1)-1)]} = \cdots = ?a_0.$$

Para obtener una expresión cerrada de a_k en términos de a_0 usamos una especie de generalización del factorial $k! = k(k-1)\ldots 1$ que se define como

$$(\alpha)_n = \alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+n-1), \quad (\alpha)_0 := 1, \tag{3.6}$$

para cualquier número real (incluso complejo) α, y que se denomina *símbolo de Pochhammer*. La condición de consistencia $(\alpha)_0 := 1$ es parecida a $0! = 1$ y, en particular, se tiene

que $(1)_n = n!$. [1] Sacando el 3 factor común, la recurrencia queda

$$a_k = \frac{-a_{k-1}}{3^2 k(k-1/3)} = \frac{(-1)^2 a_{k-2}}{[9k(k-1/3)][9(k-1)(k-1-1/3)]} = \cdots = (-1)^k \frac{a_0}{9^k k!(2/3)_k},$$

donde hemos identificado el símbolo de Pochhammer $(2/3)_k$ al identificar $(k-1/3) = (\alpha+k-1) \Rightarrow \alpha = 2/3$. Tomemos ahora $m+2 = 3k+1$, de manera que $m-1 = 3k-2 = 3(k-1)+1$, y renombremos $c_{3k+1} = b_k$. La recurrencia nos dice en este caso

$$b_k = \frac{-b_{k-1}}{9(k+1/3)k} = \frac{(-1)^2 b_{k-2}}{[9(k+1/3)k][9((k-1)+1/3)(k-1)]} = \cdots = \frac{(-1)^k b_0}{9^k (4/3)_k k!}$$

donde hemos identificado el símbolo de Pochhammer $(4/3)_k$ al identificar $(k+1/3) = (\alpha+k-1) \Rightarrow \alpha = 4/3$. Combinando ambos resultados, la solución es una combinación lineal $y(x) = a_0 y_1(x) + b_0 y_2(x)$ con

$$y_1(x) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{9^k k!(2/3)_k} x^{3k},\ y_2(x) = x + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{9^k (4/3)_k k!} x^{3k+1},$$

donde las potencias x^{3k} y x^{3k+1} han surgido de condiderar los casos $n = 3k$ y $n = 3k+1$ en la solución original ensayada $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$. Nótese que los términos con $n = 3k+2$ no han sido considerados; esto es porque teníamos primeramente que $c_2 = 0$, con lo cual todos los términos c_{2+3k} que surgen de éste por la recurrencia son idénticamente nulos. Lo raro hubiese sido obtener tres soluciones independientes y_1, y_2, y_3 para una ecuación de orden 2 (imposible). □

Ejemplo 3.1.4. *(Relación de recurrencia a tres términos)* Resolvamos $y'' - (1+x)y = 0$ en torno a $x_0 = 0$. Sustituyendo (3.3) obtenemos

$$c_{m+2} = \frac{c_m + c_{m-1}}{(m+2)(m+1)},\ m = 1, 2, 3, \ldots.$$

Tomando primero $c_0 \neq 0$ y $c_1 = 0$ obtenemos

$$c_2 = c_0/2, c_3 = (c_1 + c_0)/(2*3) = c_0/6, c_4 = (c_2 + c_1)/(3*4) = c_0/24, c_5 = c_0/30, \ldots$$

Tomando despues $c_0 = 0$ y $c_1 \neq 0$ obtenemos

$$c_2 = c_0/2 = 0, c_3 = c_1/6, c_4 = c_1/12, c_5 = c_1/120, \ldots$$

Combinando ambos resultados, la solución es una combinación lineal $y(x) = c_0 y_1(x) + c_1 y_2(x)$ con

$$y_1(x) = 1 + x^2/2 + x^3/6 + x^4/24 + \ldots,\ y_2(x) = x + x^3/6 + x^4/12 + \ldots.$$

En estos casos no es sencillo encontrar expresiones generales para c_n en términos de factoriales o símbolos de Pochhammer. □

[1] El símbolo de Pochhammer se puede escribir a su vez en términos de la función Gamma como $(\alpha)_n = \Gamma(\alpha+n)/\Gamma(\alpha)$ que, para argumento n entero positivo, coincide con $\Gamma(n+1) = n!$. El símbolo de Pochhammer nos será de mucha utilidad para expresar de forma cerrada los términos generales de las recurrencias. El paquete *Mathematica* dispone del comando Pochhammer[a,n] y del comando RSolve para resolver recurrencias.

3.2. Soluciones en torno a puntos singulares

Haremos ahora una distinción entre puntos singulares.

Definición 3.2.1. *(Puntos singulares regulares, o normales, e irregulares)* Se dice que un punto x_0 es un punto singular regular de la ecuación $y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$ si las funciones $p(x) = (x - x_0)P(x)$ y $q(x) = (x - x_0)^2 Q(x)$ son analíticas en x_0. En caso contrario, x_0 es un punto singular irregular.

Nos interesan funciones P y Q racionales de manera que, en la práctica, x_0 es singular regular si el factor $(x - x_0)$ aparece elevado como mucho: a la primera potencia en el denominador de P y a la segunda potencia en el denominador de Q. No analizaremos el caso irregular.

Teorema 3.2.2. (Teorema de Frobenius) *Si x_0 es un punto singular regular de $y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$, existe entonces* **al menos** *una solución de la forma*

$$\boxed{y(x) = (x - x_0)^r \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^{n+r}} \tag{3.7}$$

donde r es una constante a determinar (raiz indicial o exponente de la singularidad en x_0). La serie converge al menos en algun intervalo $|x - x_0| < R$

Ejemplo 3.2.3. Resolvamos la ecuación $3xy'' + y' - y = 0$ en torno a $x_0 = 0$. Sustituyendo (3.7), sacando factor comun x^r y reorganizando series obtenemos

$$x^r [r(3r - 2)c_0 x^{-1} + \sum_{k=0}^{\infty} [(k + r + 1)(3k + 3r + 1)c_{k+1} - c_k] x^k] = 0$$

lo cual implica

$$r(3r - 2) = 0, \;\; [(k + r + 1)(3k + 3r + 1)c_{k+1} - c_k] = 0, k = 0, 1, 2, \ldots$$

De la **ecuación indicial** $r(3r - 2) = 0$ se obtienen dos valores $r_1 = 0$ y $r_2 = 2/3$. Para $r = r_1$ obtenemos

$$c_{k+1} = \frac{c_k}{(3k + 1)(k + 1)} \Rightarrow c_k^{(1)} = \frac{c_0}{3^k (1/3)_k k!}$$

y para $r = r_2$ obtenemos

$$c_{k+1} = \frac{c_k}{(3k + 5)(k + 1)} \Rightarrow c_k^{(2)} = \frac{c_0}{3^k k! (5/3)_k}$$

Tomando $c_0 = 1$ tenemos dos soluciones $y_j(x) = x^{r_j} \sum_{n=0}^{\infty} c_n^{(j)} x^n$, $j = 1, 2$, linealmente independientes (una no se puede escribir como un múltiplo constante de la otra) con radio de convergencia infinito (comprobar), de manera que la solución general es $y = K_1 y_1 + K_2 y_2$, con K_1, K_2 constantes arbitrarias. □

Se puede comprobar que la **ecuación indicial** para $y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$ se puede escribir en forma general como

$$\boxed{r(r-1) + p(x_0)r + q(x_0) = 0} \tag{3.8}$$

donde $p(x)$ y $q(x)$ están en la definición 3.2.1. Si las raíces r_1 y r_2 son iguales, entonces surge el problema de cómo encontrar otra solución y_2 linealmente independiente. Este problema puede surgir curiosamente también cuando las raíces r_1 y r_2 difieren en un entero. Veamos un ejemplo.

Ejemplo 3.2.4. Al resolver $xy'' + y = 0$ obtenemos la ecuación indicial $r(r-1) = 0$, con soluciones $r_1 = 0$ y $r_2 = 1$. En este caso se puede ver (comprobar) que las relaciones de recurrencia producen exactamente el mismo resultado

$$y_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!(n+1)!} x^{n+1}.$$

Es decir, el procedimiento de Frobenius solo proporciona una solución. La referencia [1] aconseja empezar iterando la raiz más pequeña, en este caso $r_1 = 0$. □

Observación 3.2.5. Si ya tenemos una solución y_1, se puede demostrar que

$$y_2(x) = y_1(x) \int \frac{e^{-\int P(x)dx}}{y_1^2(x)} dx, \tag{3.9}$$

es también solución. En efecto, ensayando $y_2(x) = c(x)y_1(x)$ y nombrando $c'(x) = u(x)$, nos queda una ecuación lineal de primer orden para u de la forma $u' + (2y_1'/y_1 + P)u = 0$ que admite un factor integrante $\exp[\int (P + 2y_1'/y_1)dx] = y_1^2 \exp(\int P dx)$, de manera que $c(x) = \int [exp(-\int P(x)dx)/y_1^2(x)]dx$, dando el resultado (3.9).

No obstante, el cálculo de y_2 de esta forma suele ser bastante tedioso. Veamos una forma más operativa, ensayando una segunda solución que contiene un logaritmo, algo que ya se intuye en la ecuación (3.9). Haremos un cambio $(x - x_0) \to x$ para desplazar el punto singular a $x = 0$. Los resultados se resumen en el siguiente teorema.

Teorema 3.2.6. *Consideremos la ecuación $y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$ donde $x_0 = 0$ es un punto singular regular, es decir, las funciones $p(x) = xP(x)$ y $q(x) = x^2Q(x)$ son analíticas en $x = 0$ y admiten un desarrollo convergente en serie de potencias*

$$p(x) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n x^n, \; q(x) = \sum_{n=0}^{\infty} q_n x^n,$$

para $|x| < R$ donde $R > 0$ es el mínimo radio de convergencia de ambas series. Sean $r_1 \geq r_2$ (consideraremos solo el caso real) las raíces de la ecuación indicial

$$r(r-1) + p_0 r + q_0 = 0.$$

Entonces, bien en el intervalo $-R < x < 0$ o bien en $0 < x < R$, existe una solución de la forma

$$y_1(x) = |x|^{r_1} \sum_{n=0}^{\infty} c_n^{(1)} x^n, \tag{3.10}$$

donde $c_n^{(1)}$ se obtiene de la recurrencia con $r = r_1$ y $c_0^{(1)} = 1$. Ahora pueden darse tres casos:

1. **Raíces indiciales distintas que no difieren en un entero**. *Si $r_1 - r_2 \neq 0$ y no entero, entonces existe una segunda solución, válida bien en el intervalo $-R < x < 0$ o bien en $0 < x < R$, dada por*

$$y_2(x) = |x|^{r_2} \sum_{n=0}^{\infty} c_n^{(2)} x^n, \tag{3.11}$$

   donde $c_n^{(2)}$ se obtiene de la recurrencia con $r = r_2$ y $c_0^{(2)} = 1$. Este es el caso tratado en el ejemplo 3.2.3. En este caso está siempre asegurada la existencia de dos soluciones y_1 e y_2 linealmente independientes que convergen al menos para $|x| < R$.

2. **Raíces indiciales iguales**. *En este caso, la segunda solución se encuentra ensayando*

$$y_2(x) = y_1(x) \ln(x) + x^{r_1} \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n, \tag{3.12}$$

   en la ecuación diferencial $y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$ y resolviendo la recurrencia para b_n.

3. **Raíces indiciales distintas que difieren en un entero** $r_1 - r_2 = N > 0$. *En este caso se ensaya*

$$y_2(x) = C y_1(x) \ln(x) + x^{r_2} \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n,$$

   donde C es una constante que podría ser cero, en cuyo caso no habría término logaritmico en la solución.

En los tres casos, las dos soluciones y_1 e y_2 forman un conjunto fundamental de soluciones de $y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$ en torno a $x = 0$ que convergen al menos para $|x| < R$ y definen funciones analíticas en algun entorno de $x = 0$.

Ejercicio 3.2.7. Encuentre otra solución linealmente independiente para el ejercicio (3.2.4). □

Ejercicio 3.2.8. Resolver $2xy'' + (1+x)y' + y = 0$ en torno a $x = 0$. ¿Dónde está definida la solución? □

Ejercicio 3.2.9. La **Ecuación de Cauchy-Euler** de orden n es en general

$$a_n x^n y^{(n)} + a_{n-1} x^{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_1 x y' + a_0 y = 0, \tag{3.13}$$

donde a_j son coeficientes constantes. Estas ecuaciones presentan soluciones de la forma $y_1(x) = x^m$, donde m se obtiene ensayando dicha solución y resolviendo la ecuación auxiliar. En caso de raices repetidas, se puede usar facilmente (3.9) para obtener una segunda solución. Resolver la ecuación

$$4x^2 y'' + 8xy' + y = 0$$

por este procedimiento y por desarrollo en serie de potencias en torno al punto singular regular $x = 0$ y verificar que se llega a soluciones equivalentes. Resolver también

$$4x^2 y'' + 17y = 0$$

con raices $m_\pm = \frac{1}{2} \pm 2\mathrm{i}$ complejas. □

Ejercicio 3.2.10. Demostrar que el cambio de variable $x = e^t$ transforma la ecuación de Cauchy-Euler en una ecuación lineal con coeficientes constantes, cuyas soluciones son del tipo $y(t) = Ce^{mt}$.

Ejercicio 3.2.11. Realizando el cambio de variable $x = e^t$, encuentra la solución general de la ecuación diferencial de Euler no homogenea

$$x^2 y'' - 3xy' + 5y = x^2 \ln(x) \qquad (x > 0)$$

Parte II

Funciones Especiales

Capítulo 4

Funciones especiales elementales

Bibliografía: Ver Capítulo 5 de [1], Capítulo 5 de [2] y referencia [3]

4.1. Ecuación y funciones de Hermite

Sea la ecuación

$$\boxed{y'' - 2xy' + 2\nu y = 0} \tag{4.1}$$

que aparece al resolver la ecuación de Schrödinger para el oscilador armónico cuántico. Esta ecuación no tiene puntos singulares, ya que $P(x) = -2x$ y $Q(x) = 2\nu$ son analíticas en todo $\mathbb{R}$. Por lo tanto, tendremos asegurda la existencia de dos soluciones en serie centradas en $x_0 = 0$ con radio de convergencia infinito. En efecto, sustituyendo (3.3) en

$$y'' - 2xy' + 2\nu y = \sum_{n=2}^{\infty} c_n n(n-1)x^{n-2} - \sum_{n=1}^{\infty} 2c_n n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} 2\nu c_n x^n.$$

Hacemos $n - 2 = m$ en la primera suma de manera que

$$y'' - 2xy' + 2\nu y = 2c_2 + 2\nu c_0 + \sum_{m=1}^{\infty} [c_{m+2}(m+2)(m+1) - 2mc_m + 2\nu c_m]x^m = 0$$

lo cual implica que

$$c_2 = -\nu c_0,\ c_{m+2} = \frac{2m - 2\nu}{(m+2)(m+1)} c_m,\ m = 1, 2, 3, \ldots$$

Nótese que $c_2 = -\nu c_0$ se corresponde en este caso con $m = 0$, de manera que los coeficientes c se determinan en pasos de 2. Por ejemplo, c_2 se determina en términos de c_0, mientras que c_3 se determina en términos de c_1. Tomemos entonces primeramente $m + 2 = 2k \Rightarrow m = 2k - 2 = 2(k-1)$ y llamemos $c_{m+2} = c_{2k} = a_k$, con lo cual $c_m = c_{2(k-1)} = a_{k-1}$. La recurrencia nos dice en este caso

$$c_{2k} = a_k = \frac{4(k-1) - 2\nu}{2k(2k-1)} a_{k-1} = \frac{(k-1) - \nu/2}{k(k-1/2)} a_{k-1} = \cdots = \frac{(-\nu/2)_k}{k!(1/2)_k} a_0,\ a_0 = c_0$$

donde hemos hecho uso del símbolo de Pochhammer definido en (3.6).

Tomemos ahora $m + 2 = 2k + 1 \Rightarrow m = 2k - 1 = 2(k-1) + 1$ y llamemos $c_{m+2} = c_{2k+1} = b_k$, con lo cual $c_m = c_{2(k-1)+1} = b_{k-1}$. La recurrencia nos dice en este caso

$$c_{2k+1} = b_k = \frac{4k - 2 - 2\nu}{(2k+1)2k} b_{k-1} = \frac{k - 1/2 - \nu/2}{(k+1/2)k} b_{k-1} = \cdots = \frac{(1-\nu)/2)_k}{k!(3/2)!} b_0,\ b_0 = c_1.$$

Combinando ambos resultados, la solución es una combinación lineal

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = \sum_{k=0}^{\infty} c_{2k} x^{2k} + \sum_{k=0}^{\infty} c_{2k+1} x^{2k+1} = c_0 y_1(x) + c_1 y_2(x)$$

con

$$y_1(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-\nu/2)_k}{k!(1/2)_k} x^{2k},\ y_2(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(1-\nu)/2)_k}{k!(3/2)!} x^{2k+1}.$$

Para ν entero positivo, las series anteriores se truncan dando lugar a los polinomios de Hermite. Si ν es par, $y_1(x)$ proporciona una solución polinómica par. Si ν es impar, $y_2(x)$ proporciona una solución polinómica impar.

4.2. Ecuación y funciones de Laguerre

$$\boxed{xy'' + (1 + \alpha - x)y' + \lambda y = 0} \tag{4.2}$$

Desarrollar en torno a $x_0 = 0$. Haced primero el caso $\alpha = 0$ (funciones de Laguerre) y ver que existen soluciones que son polinomios $L_n(x)$ de grado n para $\lambda = n = 0, 1, 2, 3, \ldots$. Para $\alpha = 1, 2, 3, \ldots$, ver que las soluciones polinómicas se pueden escribir como $L_n^\alpha(x) = \frac{1}{n!}\frac{d^\alpha}{dx^\alpha}L_n(x)$, con $\alpha \leq n$ (estos son los denominados polinomios asociados de Laguerre).

Véase también el siguiente tema para una relación con la ecuación hipergeométrica confluente y sus soluciones.

4.3. Ecuación y funciones de Jacobi

$$\boxed{(1 - x^2)y'' + (\beta - \alpha - (\alpha + \beta + 2)x)y' + n(n + \alpha + \beta + 1)y = 0} \tag{4.3}$$

Véase siguiente tema para una relación con la ecuación hipergeométrica y sus soluciones.

4.3.1. Ecuación y funciones de Legendre

La ecuación de Legendre

$$\boxed{(1 - x^2)y'' - 2xy' + \alpha(\alpha + 1)y = 0} \tag{4.4}$$

apareció en 1784 en el estudio de la atracción de esferoides. Podemos restringirnos al caso $\alpha > -1$ porque si $\alpha \leq -1$, siempre podemos hacer el cambio $\alpha = -(1 + \gamma)$, con $\gamma \geq 0$, que lleva al mismo tipo de ecuación. Resolveremos en torno al punto ordinario $x = 0$. Como las singularidades más cercanas se encuentran en $x = \pm 1$ (los ceros de $(1 - x^2) = 0$), entonces la región de convergencia es $|x| < 1$. se puede demostrar (hacerlo) que la soluciones independientes son:

$$y_1(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-\alpha/2)_k(\frac{\alpha+1}{2})_k}{k!(1/2)_k}x^{2k}, \tag{4.5}$$

$$y_2(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\frac{1-\alpha}{2})_k(1 + \frac{\alpha}{2})_k}{k!(3/2)_k}x^{2k+1}. \tag{4.6}$$

Si $\alpha = 2N \geq 0$ (cero o entero par positivo), la función y_1 se reduce a un polinomio de grado $2N$ que contiene solo potencias pares de x. De la misma forma, si $\alpha = 2N + 1 > 0$ (entero impar positivo) la serie y_2 se reduce a un polinomio de grado $2N + 1$ que contiene solo potencias impares de x. Los *polinomios de Legendre* $P_n(x)$ se definen entonces como las soluciones de la ecuación de Legendre con $\alpha = n$ y que están normalizados de manera

que $P_n(1) = 1$. Se puede demostrar que existe una fórmula general para P_n dada por (fórmula de Rodrigues)

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{[n/2]} \frac{(-1)^k(2n-2k)!}{k!(n-k)!(n-2k)!}x^{n-2k} = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n,\ n = 0, 1, 2, \ldots. \quad (4.7)$$

donde $[n/2]$ denota aquí el entero mayor más pequeño o igual que $n/2$.

Nótese que, haciendo uso de la ecuación diferencial $[(1-x^2)y']' = -\alpha(\alpha+1)y = 0$ de donde se sigue que

$$[(1-x^2)P_n']' = -n(n+1)P_n = 0,\ \text{ y }\ [(1-x^2)P_m']' = -m(m+1)P_m = 0.$$

Multiplicando la primera ecuación por P_m y la segunda por P_n, integrando por partes y sustrayendo una ecuación de la otra, se llega a la **propiedad de ortogonalidad** para los polonomios de Legendre

$$\int_{-1}^{1} P_n(x)P_m(x)dx = \frac{2}{2n+1}\delta_{n,m}. \quad (4.8)$$

Es más, cualquier polinomio $f(x)$ de grado n se puede expresar como combinación de polinomios de Legendre con coeficientes dados por

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k P_k(x),\ \ a_k = \frac{2k+1}{2}\int_{-1}^{1} f(x)P_k(x)dx. \quad (4.9)$$

Esta es la denominada *Serie de Fourier-Legendre*. La ecuación de Legendre surge al resolver la ecuación de Laplace (véase más tarde sección 7.2.3) en coordenadas esféricas, haciendo el cambio $x = \cos(\theta)$, con $0 < \theta < \pi$ el ángulo polar.

Relación con los armónicos esféricos

...

4.3.2. Ecuación y funciones de Chebyshev

De primer

$$\boxed{(1-x^2)y'' - xy' + \alpha^2 y = 0} \quad (4.10)$$

y segundo

$$\boxed{(1-x^2)y'' - 3xy' + \alpha(\alpha+2)y = 0} \quad (4.11)$$

tipo. Desarrollar en torno a $x_0 = 0$ (radio de convergencia $R = 1$) y demostrar que, para $\alpha = 0, 1, 2, 3, \ldots$ existen soluciones polinómicas $T_\alpha(x)$ (primer tipo) y $U_\alpha(x)$ (segundo

tipo) de grado α. Comprobar que los polinomios de primer y segundo tipo también resultan de las identidades trigonométricas

$$T_\alpha(x) = \cos(\alpha \arc\cos x),\ U_\alpha(x) = \frac{\operatorname{sen}((\alpha+1)\arc\cos x)}{\operatorname{sen}(\arc\cos x)}.$$

Nótese que

$$\cos(\alpha\theta) = \frac{1}{2}(e^{\mathrm{i}\alpha\theta} + e^{-\mathrm{i}\alpha\theta}) = \frac{1}{2}((\cos\theta + \mathrm{i}\operatorname{sen}\theta)^\alpha + (\cos\theta - \mathrm{i}\operatorname{sen}\theta)^\alpha).$$

Poniendo $\cos\theta = x$ y $\operatorname{sen}\theta = \sqrt{1-x^2}$, es fácil obtener la expresión de los polinomios $T_\alpha(x)$ y $U_\alpha(x)$ para un cierto α.

4.3.3. Ecuación y funciones de Gegenbauer

Ecuación de Gegenbauer o "ultraesférica"

$$\boxed{(1-x^2)y'' - (2\alpha+1)xy' + n(n+2\alpha)y = 0.} \tag{4.12}$$

Cuando $\alpha = 1/2$, se reduce a la ecuación de Legendre. Cuando $\alpha = 1$, se reduce a la de Chebyshev de segundo tipo. Relacionarlo con la ecuación y soluciones de Jacobi.

Capítulo 5

Funciones hipergeométricas y funciones de Bessel

Bibliografía: Ver [3]

5.1. Ecuación y funciones hipergeométricas

Los polinomios ortogonales clásicos y las funciones de Bessel satisfacen ecuaciones diferenciales que son casos especiales de la ecuación generalizada de tipo hipergeométrico

$$u'' + \frac{p_1(z)}{p_2(z)}u' + \frac{\tilde{p}_2(z)}{p_2^2(z)}u = 0, \tag{5.1}$$

donde p_j y $\tilde{p}_j$ son polinomios de grado a lo sumo j en z. Con un cambio de variable $u = \phi(z)y$ adecuado, se puede reducir la ecuación (5.1) a (véase [3], capítulo 1, página 2)

$$p_2(z)y'' + q_1(z)y' + \lambda y = 0, \tag{5.2}$$

donde q_1 es un polinomio de grado a lo sumo uno y λ es una constante.

1. Supongamos primeramente que $p_2(z)$ tiene dos raices a, b distintas (véase después para el caso de raiz doble) y que $p_2(x) = (z-a)(b-z)$. Cambiando de variable independiente $z = a + (b-a)x$, siempre podremos llevar la ecuación (5.2) a la llamada *ecuación hipergeométrica o de Gauss*

$$\boxed{x(1-x)y'' + (\gamma - (\alpha+\beta+1)x)y' - \alpha\beta y = 0.} \tag{5.3}$$

Estudiemos soluciones en torno al punto singular regular $x_0 = 0$. La ecuación indicial (3.8) es $r(r-1)+\gamma r = 0$, que tiene dos soluciones $r_1 = 0$ y $r_2 = 1-\gamma$ (para $\gamma \neq 1$). Para $r_1 = 0$, una solución de esta ecuación en torno al punto singular $x_0 = 0$ es la llamada *serie hipergeométrica* (comprobadlo)

$$y_1(x) = F(\alpha, \beta, \gamma; x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_n(\beta)_n}{(\gamma)_n n!}x^n, \tag{5.4}$$

donde $(\alpha)_n = \alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+n-1) = \Gamma(\beta+n)/\Gamma(\beta)$ es el símbolo de Pochhammer con $(\alpha)_0 = 1$. Otra forma de denotar la serie hipergeométrica es ${}_2F_1(\alpha, \beta, \gamma; x)$, con dos parámetros α y β en el numerador y uno γ en el denominador. Esta definición se extiende a la función hipergeométrica generalizada ${}_pF_q$. En *Mathematica* está implementada la serie hipergeométrica con el comando Hypergeometric2F1[a, b, c, x].

Para $r_2 = 1-\gamma$ la solución tiene la misma estructura que y_1 con tal de reemplazar $\alpha \to \alpha - \gamma + 1$, $\beta \to \beta - \gamma + 1$ y $\gamma \to 2 - \gamma$. Es decir

$$y_2(x) = x^{1-\gamma}F(\alpha - \gamma + 1, \beta - \gamma + 1, 2 - \gamma, x) \tag{5.5}$$

es también solución de (5.3). Se puede comprobar también que un cambio de variable $v = \phi(x)y$, con $\phi(x) = (1-x)^{\gamma-\alpha-\beta}$ lleva la ecuación (5.3) a otra con la misma estructura pero redefiniendo α, β y γ tal que la solución es $y_3(x) = (1-x)^{\gamma-\alpha-\beta}F(\gamma-\alpha, \gamma-\beta, \gamma; x)$. Las soluciones y_1 e y_2 son linealmente independientes para γ no entero. En este caso, y_3 depende linealmente de y_1 e y_2; por ejemplo, para $\gamma \neq 1$ se puede comprobar que $y_3 = y_1$. Si γ es entero, bien y_1 o bien y_2 contienen expresiones sin sentido. En este caso hay que sustituir $y \to y/\Gamma(\gamma)$ y eliminar la indeterminación por la regla de L'Hopital (véase [3], capítulo 4, pag. 277).

2. Si $p_2(z) = (x-a)^2$ (raiz doble) en (5.2), hacemos el cambio de variable $z - a = 1/x$ de manera que...

3. Si $p_2(z) = z - a$ (de grado 1) en (5.2) y $q_1' \neq 0$ entonces, haciendo el cambio $z = a + bx$, se llega a la *ecuación hipergeométrica confluente* o de Kummer

$$\boxed{xy'' + (\gamma - x)y' - \alpha y = 0.} \tag{5.6}$$

La ecuación indicial es la misma que la de la hipergeométrica. Para $r_1 = 0$, la solución en torno al punto singular $x_0 = 0$ es la llamada *serie hipergeométrica confluente de primera especie* (comprobadlo)

$$y_1(x) = F(\alpha, \gamma; x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_n}{(\gamma)_n n!} x^n, \tag{5.7}$$

también denotada ${}_1F_1(\alpha, \gamma; x)$. En *Mathematica* está implementada la serie hipergeométrica confluente con el comando Hypergeometric1F1[a, b, x]. Para $r_2 = 1 - \gamma$, la solución es $y_2 = x^{1-\gamma} F(\alpha - \gamma + 1, 2 - \gamma; x)$ (comprobadlo). Con una combinación de estas dos se construye la llamada *serie hipergeométrica confluente de segunda especie* (también función de Kummer de segunda especie, de Tricomi o de Gordon)

$$\tilde{y}_2(x) = U(\alpha, \gamma; x) = \frac{\Gamma(1-\gamma)}{\Gamma(\alpha - \gamma + 1)} F(\alpha, \gamma; x) + \frac{\Gamma(1-\gamma)}{\Gamma(\alpha - \gamma + 1)} x^{1-\gamma} F(\alpha - \gamma + 1, 2 - \gamma; x). \tag{5.8}$$

En *Mathematica* está implementada con el comando HypergeometricU[a, b, z]. La solución general de (5.6) es una combinación lineal de y_1 e $\tilde{y}_2$.

4. Si $p_2(z) = 1$ (de grado cero) en (5.2) y $q_1' \neq 0$ entonces, haciendo el cambio $z = a + bx$, se llega a la *ecuación de Hermite*

$$y'' - 2xy' + 2\nu y = 0. \tag{5.9}$$

Una solución es $y_1(x) = F(-\nu/2, 1/2, x^2)$ y otra $y_2(x) = xF(-(\nu-1)/2, 3/2, x^2) = H_\nu(x)$ que coincide con los polinomios de Hermite. Cuando ν es entero, ésta es la ecuación de autovalores del oscilador armónico cuántico y sus soluciones son los polinomios de Hermite.

5.1.1. Representación de funciones especiales como hipergeométricas

Polinomios de Jacobi

Recordamos que los polinomios de Jacobi $P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$ son solución de

$$(1 - x^2)y'' + (\beta - \alpha - (\alpha + \beta + 2)x)y' + n(n + \alpha + \beta + 1)y = 0. \tag{5.10}$$

Haciendo el cambio de variable $x = 1 - 2s$, obtenemos la ecuación hipergeométrica

$$s(1-s)y'' + (\gamma_1 - (\alpha_1 + \beta_1 + 1)s)y' - \alpha_1\beta_1 y = 0, \tag{5.11}$$

con $\alpha_1 = -n, \beta_1 = n + \alpha + \beta + 1, \gamma_1 = \alpha + 1$. Las soluciones polinómicas de esta ecuación son

$$y(s) = F(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, s) = F(-n, n + \alpha + \beta + 1, \alpha + 1; s) \tag{5.12}$$

Por lo tanto, encontramos que

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(x) = C_n F(-n, n + \alpha + \beta + 1, \alpha + 1; (1 - x)/2), \tag{5.13}$$

donde C_n es una constante de normalización que se determina evaluando en $x = 1$, dando $C_n = \frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{n!\Gamma(\alpha+1)}$. Para el caso $\alpha = 0 = \beta$ obtenemos los polinomios de Legendre.

Polinomios de Laguerre

Recordamos que los polinomios de Laguerre $L_n^\alpha(x)$ satisfacen la ecuación

$$xy'' + (1 + \alpha - x)y' + ny = 0 \tag{5.14}$$

que se puede llevar fácilmente a la hipergeométrica confluente (5.6) dando (la constante de normalización se determina evaluando en $x = 0$)

$$L_n^\alpha(x) = \frac{\Gamma(n + \alpha + 1)}{n!\Gamma(\alpha + 1)} F(-n, 1 + \alpha, x) \tag{5.15}$$

donde C_n es una constante de normalización que se determina evaluando en $x = 0$, dando $C_n = \frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{n!\Gamma(\alpha+1)}$

Polinomios de Hermite

Recordamos que los polinomios de Hermite $H_n(x)$ satisfacen la ecuación

$$y'' - 2xy' + 2ny = 0 \tag{5.16}$$

Haciendo el cambio $s = x^2$ se puede comprobar que se llega a la hipergeométrica confluente (5.6) dando (las constantes de normalización se determinan evaluando en $x = 0$)

$$H_{2n}(x) = \frac{2^{2n}\sqrt{\pi}}{\Gamma(1/2 - n)} F(-n, 1/2, x^2), \quad H_{2n+1}(x) = \frac{2^{2n+2}\sqrt{\pi}}{\Gamma(-1/2 - n)} F(-n, 3/2, x^2). \tag{5.17}$$

5.2. Ecuación y funciones de Bessel

La ecuación de Bessel es

$$\boxed{x^2y'' + xy' + (x^2 - \nu^2)y = 0.} \tag{5.18}$$

con $x = 0$ un punto singular regular. La ecuación indicial

$$r^2 - \nu^2 = 0 \Rightarrow r = \pm\nu$$

tiene dos raices $r = \pm\nu$. Para $r = \nu$ obtenemos la recurrencia

$$c_{m+2} = \frac{-c_m}{(m+2)(m+2+2\nu)},\ m = 0, 1, 2, \ldots$$

Es decir, los coeficientes c se determinan en pasos de 2. Tomemos entonces primeramente $m + 2 = 2k$ y $m = 2k - 2 = 2(k-1)$ y llamemos $c_{2k} = a_k$. La recurrencia nos dice en este caso

$$a_k = \frac{-a_{k-1}}{2k(2k+2\nu)} = \frac{-a_{k-1}}{2^2k(k+\nu)} = \cdots = (-1)^k \frac{a_0}{2^{2k}k!(1+\nu)_k}.$$

Teniendo en cuenta la relación $(1+\nu)_k = \Gamma(1+\nu+k)/\Gamma(1+\nu)$ entre el Pochhammer y la función gamma, se suele elegir la normalización $a_0 = 2^{-\nu}/\Gamma(1+\nu)$, que se corresponde con la llamada *función de Bessel de primera especie de orden* ν y se escribe como:

$$J_\nu(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\Gamma(1+\nu+k)} (\frac{x}{2})^{2k+\nu}. \tag{5.19}$$

Si $\nu \geq 0$, la serie converge al menos en el intervalo $[0, \infty)$. Para $r = -\nu$ obtenemos la *función de Bessel de primera especie de orden* $-\nu$

$$J_{-\nu}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\Gamma(1-\nu+k)} (\frac{x}{2})^{2k-\nu}, \tag{5.20}$$

que puede tener potencias negativas de x y ser convergente solo en $(0, \infty)$. La independencia de ambas funciones está asegurada siempre que 2ν no sea un entero. Tamién, si $\nu \notin \mathbb{Z}$, la llamada *función de Bessel de segunda especie de orden* ν

$$Y_\nu(x) = \frac{\cos(\nu\pi)J_\nu(x) - J_{-\nu}(x)}{\operatorname{sen}(\nu\pi)} \tag{5.21}$$

es linealmente indepndiente de J_ν. Para $\nu = m$ entero, se puede ver que $Y_m(x) = \lim_{\nu\to m} Y_\nu(x)$ existe (salvo en $\lim_{x\to 0^+} Y_m(x) = -\infty$) y que es independiente de J_m. Sin embargo $J_{-m}(x) = (-1)^m J_m(x)$. También se puede ver que $J_m(-x) = (-1)^m J_m(x)$, es decir, tiene la paridad de m y puede extenderse por tanto a los $x < 0$. También, a partir de la ecuación diferencial, se puede deducir la relación de recurrencia:

$$xJ'_\nu(x) = \nu J_\nu(x) - xJ_{\nu+1}(x). \tag{5.22}$$

Ejercicio 5.2.1. *Ecuación paramétrica de Bessel de orden* ν. Dada la ecuación

$$x^2y'' + xy' + (\alpha^2x^2 - \nu^2)y = 0. \tag{5.23}$$

hacer un cambio de variable $x \to \alpha x$ para llevarla a la forma (5.18) y escribir la solución general. □

Ejercicio 5.2.2. *Ecuación modificada de Bessel.* Dada la ecuación

$$x^2y'' + xy' - (\alpha^2x^2 + \nu^2)y = 0. \tag{5.24}$$

hacer el cambio de variable $s = \mathrm{i}\alpha x$ (imaginario puro) para llevarla a la forma (5.18) y escribir la solución general en términos de las *funciones de Bessel modificadas de primera y segunda clase*

$$I_\nu = \mathrm{i}^{-\nu}J_\nu(\mathrm{i}x), \quad K_\nu(x) = \frac{\pi}{2}\frac{I_{-\nu}(x) - I_\nu(x)}{\operatorname{sen}\nu\pi}. \tag{5.25}$$

□

Ejercicio 5.2.3. Dada la ecuación

$$y'' + \frac{1-2a}{x}y' + (b^2c^2x^{2c-2} + \frac{a^2 - p^2c^2}{x^2})y = 0,\ p \geq 0. \tag{5.26}$$

hacer el cambio de variable $s = bc^c$ e $y(x) = u(x)(s/b)^{a/c}$ para llevarla a la forma (5.18) y demostrar que la solución general se puede escribir como

$$y(x) = x^a[c_1J_p(bx^c) + c_2Y_p(bx^c). \tag{5.27}$$

□

Ejemplo 5.2.4. Recuerde que, al principio de la sección 2.3 estudiamos el caso de un *Resorte desgastable* que "pierda brío" conforme pasa el tiempo; por ejemplo, de la forma $k_1(t) = ke^{-\alpha t}$, $k, \alpha > 0$. En este caso, la EDO del sistema "masa-resorte"

$$m\ddot{x} + ke^{-\alpha t}x = 0$$

se transforma en una ecuación de Bessel de orden cero (demostrar)

$$s^2\frac{d^2x}{ds^2} + s\frac{dx}{ds} + s^2x = 0. \tag{5.28}$$

mediante el cambio de variable

$$s = \frac{2}{\alpha}\sqrt{\frac{k}{m}}e^{-\alpha t/2}.$$

La solución de esta ecuación puede escribirse entonces en términos de las funciones de Bessel de primera y segunda clase de orden $\nu = 0$ como

$$x(t) = c_1J_0\left(\frac{2}{\alpha}\sqrt{\frac{k}{m}}e^{-\alpha t/2}\right) + c_2Y_0\left(\frac{2}{\alpha}\sqrt{\frac{k}{m}}e^{-\alpha t/2}\right).$$

□

Ejercicio 5.2.5. *Funciones esféricas de Bessel.* Cuando $\nu = \pm 1/2, \pm 3/2, \pm 5/2, \ldots$ La función de Bessel J_ν se denomina "esférica" porque puede expresarse en términos de $\operatorname{sen}(x), \cos(x)$ y potencias de x. Demostrar que (véase página 266 de [1]) por ejemplo

$$J_{1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \operatorname{sen}(x), \; J_{-1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos(x).$$

□

Véase la sección 7.1.3 donde surge la ecuación de Bessel al estudiar las vibraciones radiales de un tambor en coordenadas polares. Para la resolución de la correspondiente ecuación en derivadas parciales será de utilidad la denominada serie de Fourier-Bessel que describimos a continuación.

5.2.1. Serie de Fourier-Bessel

Sea una función f en el intervalo $[0, R]$ y supongamos que admite un desarrollo en serie dado por

$$f(x) = \sum_{j=1}^{\infty} c_j J_n(\alpha_j x), \tag{5.29}$$

donde $J_n(\alpha_j R) = 0$, es decir, $\alpha_j R$ son los ceros de la función de Bessel J_n. Entonces, se puede demostrar que los coeficientes c_j del desarrollo se pueden calcular mediante la siguiente expresión:

$$c_j = \frac{2}{R^2 J_{n+1}^2(\alpha_j R)} \int_0^R x J_n(\alpha_j x) f(x) dx. \tag{5.30}$$

Parte III

Ecuaciones en Derivadas Parciales (EDPs)

Capítulo 6

Ecuaciones en derivadas parciales clásicas de interés en física: método de separación de variables

Bibliografía: Ver Capítulos 10, 11, 12 y 13 de [1] y Capítulo 10 de [2]

6.1. Introducción a las EDPs

Hemos estudiado EDOs para funciones $y(t)$ y sistemas de EDOs para funciones vectoriales $\vec{y}(t) = (y_1(t), \ldots, y_N(t))$. Las EDPs podrían interpretarse como un paso al contínuo, $i \in \mathbb{N} \to x \in \mathbb{R}$ en $y_i(t) \to y_x(t) = y(t,x)$ (vector de "infinitas componentes"). De hecho ya hemos visto cómo un sistema de EDOs para la cuerda discreta (2.28) se transforma en una EDP en el paso al continuo. También hemos visto el proceso inverso al estudiar la difusión del calor en un vástago (2.31), es decir, cómo una EDP se puede discretizar para dar lugar a un sistema de EDOs. En este capítulo abordaremos la resolución de EDPs de forma exacta, sin hacer uso de discretizaciones.

Estudiaremos sólo EDPs lineales, mayormente de orden 2 como por ejemplo:

$$A\frac{\partial^2 y(t,x)}{\partial t^2} + B\frac{\partial^2 y(t,x)}{\partial x \partial t} + C\frac{\partial^2 y(t,x)}{\partial x^2} + D\frac{\partial y(t,x)}{\partial t} + E\frac{\partial y(t,x)}{\partial x} + Fy(t,x) = G, \quad (6.1)$$

donde los coeficientes $A, B, \ldots, G$ son funciones dadas de (t,x), en particular constantes. Estas ecuaciones se clasifican en tres tipos dependiendo del determinante de la matriz de coeficientes A, B, C de las derivadas de segundo orden [las derivadas solo afectan a $y(t,x)$].

$$A\frac{\partial^2 y(t,x)}{\partial t^2} + B\frac{\partial^2 y(t,x)}{\partial x \partial t} + C\frac{\partial^2 y(t,x)}{\partial x^2} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial t} & \frac{\partial}{\partial x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B/2 \\ B/2 & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial t} \\ \frac{\partial}{\partial x} \end{pmatrix} y(t,x)$$

de manera que la ecuación se denomina

$$\det \begin{pmatrix} A & B/2 \\ B/2 & C \end{pmatrix} = AC - B^2/4 \begin{cases} < 0 & \Rightarrow \text{ hiperbólica} \\ = 0 & \Rightarrow \text{ parabólica} \\ > 0 & \Rightarrow \text{ elíptica} \end{cases} \quad (6.2)$$

Cuando la variable independiente t representa el "tiempo", las ecuaciones que estudiaremos son de tipo hiperbólico (ondas) o parabólico (difusión). A la EDP (6.1) se le suelen imponer también ciertas condiciones de contorno e iniciales, que suelen depender del tipo de ecuación: parbólico, hiperbólico o elíptico.

6.2. Método de separación de variables

El método de separación de variables consiste en buscar soluciones de la forma $y(t,x) = T(t)X(x)$, donde T y X son funciones de solo t y x, respectivamente. Introduciendo este tipo de solución en (6.1) y denotando por $X' = dX/dx$ y por $\dot{T} = dT/dt$ tenemos:

$$AX\ddot{T} + BX'\dot{T} + CX''T + DX\dot{T} + EX'T + FXT = G. \quad (6.3)$$

Dividiendo todo por $y = XT$ (válido en la región donde $y \neq 0$) obtenemos

$$A\frac{\ddot{T}}{T} + B\frac{X'\dot{T}}{XT} + C\frac{X''}{X} + D\frac{\dot{T}}{T} + E\frac{X'}{X} + F = \frac{G}{XT}. \quad (6.4)$$

Intentamos que esta ecuación se separe en dos sumandos de la forma $S_1(t) = S_2(x)$ de manera que, siendo funciones distintas y de diferente variable, la única forma de que se cumpla esta ecuación es que ambas sean constantes e iguales, es decir, $S_1(t) = \lambda = S_2(x)$, con λ una constante. En efecto, si fijamos $t = t_0$ en $S_1(t_0) = S_2(x)$ y variamos x, obtenemos que $S_2(x)$ es constante y viceversa. En nuestro caso, para simplificar, supondremos que $A, B, ;F$ son constantes y que $B = G = 0$. De esta forma nuestra EDP se nos reduce a dos EDOs en variables t y x separadas como:

$$S_1(t) = A\frac{\ddot{T}}{T} + D\frac{\dot{T}}{T} + F = \lambda = -C\frac{X''}{X} - E\frac{X'}{X} = S_2(x). \tag{6.5}$$

La constante λ no es arbitraria en general, sino que se ve sometida a restricciones al imponer condiciones de contorno como por ejemplo $y(t, 0) = 0 = y(t, L)$. Pensemos por ejemplo en extremos $x = 0$ y $x = \ell$ de una cuerda sujetos al eje x o en extremos de una varilla de longitud ℓ a tempertura $y = 0$, etc, en cualquier instante de tiempo. Consideremos por simplicidad el caso $C = 1, E = 0$, de manera que

$$S_2(x) = -\frac{X''}{X} = \lambda, \tag{6.6}$$

que tiene como solución general $X(x) = c_1 \operatorname{sen}(kx) + c_2 \cos(kx)$, para $k^2 = \lambda > 0$ (consideraremos solo este caso por simplicidad). La condición de contorno $y(t, 0) = 0 = y(t, \ell)$ implica $X(0) = 0 = X(\ell)$. La primera condición $X(0) = 0 \Rightarrow c_2 = 0$, mientras que $X(\ell) = 0 \Rightarrow c_1 \operatorname{sen}(k\ell) = 0$ lo que implica que, o bien $c_1 = 0$ (solución trivial que no nos interesa), o bien $k\ell = n\pi$ para cualquier $n \in \mathbb{Z}$. Esto último quiere decir que los valores de k están "cuantizados", tomando los *valores propios*

$$k_n = n\pi/\ell, \quad n \in \mathbb{Z}. \tag{6.7}$$

A las soluciones $X_n(x) = \operatorname{sen}(k_n x)$ se les denomina *funciones propias* (o "modos normales" de vibración, en el caso de la ecuación de ondas). De echo, la ecuación $-\frac{X''}{X} = \lambda$ puede verse como un problema de autovalores $-X'' = \lambda X$ del operador derivada segunda $-d^2/dx^2$ ("momento lineal al cuadrado en Mecánica Cuántica"). Como $X_{-n} = -X_n$ y $X_0 = 0$, solo el conjunto $\{X_n, n \in \mathbb{N}$ es linealmente independiente. Es más, cualquier función combinación lineal de las X_n del tipo

$$X(x) = \sum_{n\in\mathbb{N}} B_n \operatorname{sen}(k_n x) \tag{6.8}$$

es también solución de (6.6) y verifica las condiciones de contorno $X(0) = 0 = X(\ell)$. Esta solución en serie nos es de utilidad a la hora de resolver condiciones iniciales del tipo $y(0, x) = y_0(x)$, que daterminan el perfil de y, como función de solo x, en el instante inicial. Esto significa $X(x) = y_0(x)/T(0)$ y nos interesa obtener los coeficientes B_n del desarrollo (6.8) para un perfil inicial $y_0(x)$ dado. Esto va a ser fácil cuando nos demos cuenta de que el conjunto de funciones propias $\{X_n, n \in \mathbb{N}$ es un conjunto ortogonal, hecho ya notado por Jean Baptiste Joseph Fourier (1768-1830) en sus estudios matemáticos sobre la propagación del calor, especialmente sobre el entendimiento de la distribución global de la temperatura terrestre.

6.3. Series de Fourier

Las series de Fourier estudian la representación de funciones periódicas en general (como la de la figura 6.1) en términos de senos y cosenos.

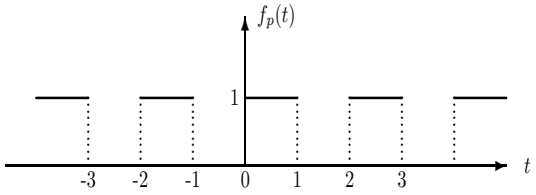


Figura 6.1: Tren de pulsos

Las soluciones (6.8) que hemos obtenido son impares, $X(-x) = -X(x)$, por la condición de contorno $X(0) = 0$, que elimina las soluciones de tipo coseno. Otro tipo de condiciones de contorno, como las condiciones periódicas $X(x_0) = X(x_0 + \ell)$, tienen en cuenta ambas soluciones: seno y coseno. Es más, la condición $\operatorname{sen}(kx) = \operatorname{sen}(k(x + \ell))$ o $\cos(kx) = \cos(k(x + \ell))$, se cumple ahora para

$$k_n = \frac{2\pi}{\ell} n,\ n = 0, 1, 2, \ldots$$

[Nótese el factor 2 de diferencia respecto a (6.7)]. Una solución arbitraria $X(x)$ se podrá escribir como combinación lineal de soluciones de tipo seno y coseno como

$$\boxed{X(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(k_n x) + B_n \operatorname{sen}(k_n x),} \tag{6.9}$$

donde los coeficientes A_n y B_n se denominan *representación de X en el dominio de momentos k_n*. Dada una función $X(x)$, los coeficientes ("espectrales") A_n y B_n pueden determinarse teniendo en cuenta las propiedades de ortogonalidad de $\cos(k_n x)$ y $\operatorname{sen}(k_n x)$ que describimos seguidamente.

6.3.1. Propiedades de ortogonalidad de los senoides

Usando las identidades trigonométricas

$$\begin{aligned}
\operatorname{sen} a \cos b &= \frac{1}{2}(\operatorname{sen}(a+b) + \operatorname{sen}(a-b)), \\
\cos a \cos b &= \frac{1}{2}(\cos(a+b) + \cos(a-b)), \\
\operatorname{sen} a \operatorname{sen} b &= \frac{1}{2}(\cos(a-b) - \cos(a+b)),
\end{aligned}$$

podemos calcular fácilmente las siguientes integrales (hágase como ejercicio):

$$\begin{aligned}\int_{x_0}^{x_0+\ell}\cos(\frac{2\pi n}{\ell}x)dx=\int_{x_0}^{x_0+\ell}\operatorname{sen}(\frac{2\pi n}{\ell}x)dx &= 0\ \forall n\in\mathbb{N},\\ \int_{x_0}^{x_0+\ell}\cos(\frac{2\pi n}{\ell}x)\operatorname{sen}(\frac{2\pi m}{\ell}x)dx &= 0,\ \forall n,m\in\mathbb{N}\\ \int_{x_0}^{x_0+\ell}\cos(\frac{2\pi n}{\ell}x)\cos(\frac{2\pi m}{\ell}x)dx &= \frac{\ell}{2}\delta_{n,m}\\ \int_{x_0}^{x_0+\ell}\operatorname{sen}(\frac{2\pi n}{\ell}x)\operatorname{sen}(\frac{2\pi m}{\ell}x)dx &= \frac{\ell}{2}\delta_{n,m}\end{aligned}$$

donde $\delta_{n,m}=\begin{cases}0,\ \text{si } n\neq m\\ 1,\ \text{si } n=m\end{cases}$ es el símbolo delta de Krönecker.

6.3.2. Cálculo de coeficientes de Fourier

Conociendo estas propiedades de ortogonalidad para funciones trigonométricas, multiplicando a izquierda y derecha de la igualdad (6.9) por $\cos(\frac{2\pi m}{\ell}x)$ (respectivamente por $\operatorname{sen}(\frac{2\pi n}{\ell}x)$) e integrando término a término la serie (suponiendo que X cumple las condiciones de Dirichlet que se dan en la siguiente sección 6.3.3) obtenemos fácilmente la expresión

$$\boxed{A_n=\frac{2}{\ell}\int_{x_0}^{x_0+\ell}X(x)\cos(k_nx)dx,\ \ B_n=\frac{2}{\ell}\int_{x_0}^{x_0+\ell}X(x)\operatorname{sen}(k_nx)dx,\ n=1,2,\dots} \quad (6.10)$$

para los coeficientes espectrales A_n (resp. B_n). Hágase como ejercicio. [1] La elección de x_0 no afecta (por ser X periódica) y normalmente se toma $x_0=0$. El término:

$$\boxed{\frac{A_0}{2}=\frac{1}{\ell}\int_{x_0}^{x_0+\ell}X(x)dx}$$

no es ni más ni menos que la *media de X en un periodo ℓ*. Nótese que, mientras que la función coseno es *par*, $\cos(-kx)=\cos(kx)$, la función seno es *impar*, $\operatorname{sen}(-kx)=-\operatorname{sen}(kx)$. Podemos ahorrarnos pues cálculos innecesarios en la determinación de los coeficientes espectrales (6.10) observando previamente la *paridad* de la función X, de manera que:

1. Si $X(-x)=X(x)$ (X es par) entonces $B_n=0$, $n=1,2,3\dots$
2. Si $X(-x)=-X(x)$ (X es impar) entonces $A_n=0$, $n=0,1,2,3\dots$

[1] Nótese el paralelismo que existe entre las funciones trigonométricas y las bases ortonormales, donde ahora nuestro producto escalar es la integral $\langle f,g\rangle=\int_{x_0}^{x_0+\ell}f(x)g(x)dx$.

Veamos unos ejemplos.

Ejemplo 6.3.1. *(Tren de pulsos)* Calcula los coeficientes de Fourier (6.10) para el tren de pulsos de la figura 6.1.
Solución: Como el periodo es $\ell = 2$, tenemos que $k_n = n\pi$. Eligiendo por ejemplo $x_0 = 0$ en (6.10) y dado que $X(x) = 1$ en el intervalo $[0, 1[$ y $X(x) = 0$ en el intervalo $[1, 2[$, tenemos que los coeficientes espectrales son:

$$\begin{aligned} A_n &= \int_0^1 \cos(\pi n x)dx = \left[\frac{\operatorname{sen}(\pi n x)}{\pi n}\right]_{t=0}^{t=1} = \frac{\operatorname{sen}(\pi n)}{\pi n} = 0,\ n \neq 0, \\ B_n &= \int_0^1 \operatorname{sen}(\pi n x)dx = \frac{1-(-1)^n}{\pi n} = \begin{cases} 0, \text{ si } n = 2m \text{ (par)} \\ \frac{2}{\pi n}, \text{ si } n = 2m+1 \text{ (impar)} \end{cases}. \end{aligned}$$

La primera expresión no está determinada para $n = 0$, de manera que el coeficiente A_0 (la *media* de X en un periodo) lo calculamos aparte:

$$A_0 = \frac{2}{\ell}\int_0^\ell X(x)dx = \int_0^1 dx = 1.$$

Así, la expresión (6.9) para el tren de pulsos queda finalmente como:

$$X(x) = \frac{1}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2}{\pi(2m+1)} \operatorname{sen}((2m+1)\pi x).$$

Nótese que los coeficientes B_n decrecen con n de la forma $B_n \sim \frac{1}{n}$, de manera que las funciones propias con n grande contribuyen cada vez menos a la serie de Fourier. Este tipo de comportamiento $\frac{1}{n}$ es típico de los desarrollos de Fourier funciones continuas a trozos, como es el tren de pulsos. En la práctica, algunas veces no es necesario considerar los infinitos términos de la serie (6.9), ya que los primeros términos (primeros *armónicos*) retienen ya una información considerable sobre la función X, como puede comprobarse en la figura 6.2, donde se compara el tren de pulsos con su desarrollo de Fourier hasta orden $N = 1, 3, 5$ y 7.

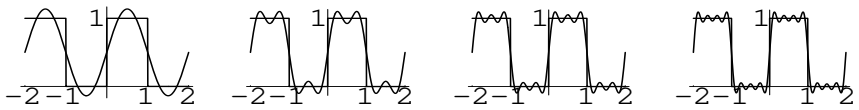


Figura 6.2: Aproximaciones de Fourier de ordenes $N = 1, 3, 5$ y 7 al tren de pulsos

Ejemplo 6.3.2. *(Diente de sierra)* Calcula la serie de Fourier de la función "diente de sierra" (véase figura 6.3), que surge como extensión periódica de periodo $\ell = 1$ del trozo de recta $X(x) = x$ en el intervalo $[0, 1[$.

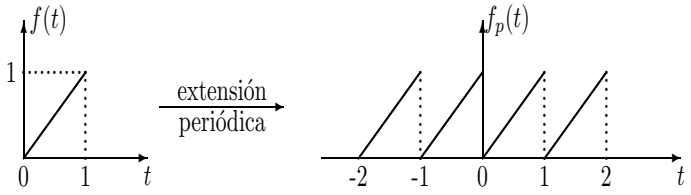


Figura 6.3: Diente de sierra

Solución: Como el periodo es $\ell = 1$, tenemos que $k_n = 2\pi n$. Eligiendo por ejemplo $x_0 = 0$ en (6.10) e integrando por partes, tenemos que los coeficientes espectrales son:

$$\begin{aligned} A_n &= 2\int_0^1 t\cos(2\pi nx)dx = 0,\ n \neq 0 \\ B_n &= 2\int_0^1 t\,\mathrm{sen}(2\pi nx)dx = -\frac{1}{\pi n}, \end{aligned}$$

La primera expresión no está determinada para $n = 0$, de manera que el coeficiente A_0 (la *media* de X en un periodo) lo calculamos aparte:

$$A_0 = \frac{2}{\ell}\int_0^\ell X(x)dx = \int_0^1 xdx = \frac{1}{2}.$$

Así, la expresión (6.9) para el diente de sierra queda finalmente como:

$$X(x) = \frac{1}{2} - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\pi n}\,\mathrm{sen}(2\pi nx).$$

Véase la figura 6.4, donde se compara el diente de sierra con su desarrollo de Fourier

$$X(x) = \frac{1}{2} - \sum_{n=1}^{N}\frac{1}{\pi n}\,\mathrm{sen}(2\pi nx) \tag{6.11}$$

hasta orden $N = 1, 3$ y 5.

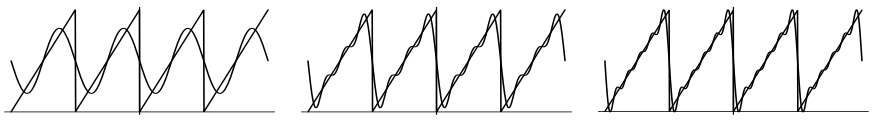


Figura 6.4: Aproximaciones de Fourier de ordenes $N = 1, 3$ y 5 al diente de sierra

Nótese otra vez que los coeficientes B_n decrecen con n de la forma $B_n \sim \frac{1}{n}$, comportamiento típico, como hemos dicho antes, de los desarrollos de funciones continuas a trozos. Daremos un teorema que especifica el tipo de comportamiento de los coeficientes de Fourier para distintos tipos de funciones:

Teorema 6.3.3. *Dada una función $f(x)$ que verifica las condiciones de Dirichlet (véase después) en un intervalo $[x_0, x_0+\ell]$, los coeficientes de Fourier (6.10) tienen un comportamiento asintótico de la forma:*

1. *Si $f(x)$ es continua a trozos, entonces: $A_n, B_n \sim \frac{1}{n}$.*
2. *Si $f(x)$ es continua con derivada discontinua, entonces: $A_n, B_n \sim \frac{1}{n^2}$.*
3. *Si $f(x)$ es de clase C^r , entonces: $A_n, B_n \sim \frac{1}{n^{r+2}}$.*

Ejercicio 6.3.4. Representa gráficamente y calcula el desarrollo de Fourier de la extensión periódica de periodo $\ell = 2\pi$ las siguientes funciones en el intervalo $[-\pi, \pi[$:

1. $f(t) = \begin{cases} -1 & \text{si} \quad -\pi < t < 0 \\ 1 & \text{si} \quad 0 \le t \le \pi \end{cases}$
   Solución: $\frac{4}{\pi}\left(\frac{\operatorname{sen} t}{1} + \frac{\operatorname{sen} 3t}{3} + \frac{\operatorname{sen} 5t}{5} + \ldots\right)$
2. $f(t) = |t|, -\pi < t < \pi$
   Solución: $\frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\left(\frac{\cos t}{1^2} + \frac{\cos 3t}{3^2} + \frac{\cos 5t}{5^2} + \ldots\right)$
3. $f(t) = t, -\pi < t < \pi$
   Solución: $2\left(\frac{\operatorname{sen} t}{1} - \frac{\operatorname{sen} 2t}{2} + \frac{\operatorname{sen} 3t}{3} - \ldots\right)$
4. $f(t) = |\operatorname{sen} t|, -\pi < t < \pi$
   Solución: $\frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\left(\frac{\cos 2t}{1\cdot 3} + \frac{\cos 4t}{3\cdot 5} + \frac{\cos 6t}{5\cdot 7} + \ldots\right)$
5. $f(t) = \begin{cases} -\cos t & \text{si} \quad -\pi < t < 0 \\ \cos t & \text{si} \quad 0 \le t \le \pi \end{cases}$
   Solución: $\frac{8}{\pi}\left(\frac{\operatorname{sen} 2t}{1\cdot 3} + \frac{2\operatorname{sen} 4t}{3\cdot 5} + \frac{3\operatorname{sen} 6t}{5\cdot 7} + \ldots\right)$
6. $f(t) = t^2, \ -\pi < t < \pi$
   Solución: $\frac{\pi^2}{3} - 4\left(\frac{\cos t}{1^2} - \frac{\cos 2t}{2^2} + \frac{\cos 3t}{3^2} - \ldots\right)$

Ejercicio 6.3.5. (Práctica de ordenador) Utilize los comandos Mathematica explicados en la página 77 de la referencia [5] para calcular los coeficientes espectrales de las funciones del ejercicio anterior. Haga una representación gráfica comparativa de dichas funciones y de sus aproximaciones de Fourier de órdenes $N = 1, 2, 3$ como en la figura 6.4.

6.3.3. Existencia y convergencia del desarrollo de Fourier

Las condiciones que debe de cumplir una función periódica para que exista su desarrollo de Fourier y las propiedades de convergencia se resumen en los siguientes teoremas.

Teorema 6.3.6. ***(Teorema de Dirichlet)*** *Si la función periódica $X(x)$ de periodo ℓ es acotada, tiene sólo un número finito de discontinuidades (que serán de salto finito) y un número finito de máximos y mínimos en el intervalo $[x_0, x_0+\ell]$, entonces $X(x)$ coincide con su desarrollo en serie $S(x)$ en (6.9) excepto en los puntos de salto x_s donde*

$S(x_s) = \frac{1}{2}(X(x_s^-) + X(x_s^+))$ *(media aritmética de los valores de* X *a izquierda y derecha del salto). Se dice entonces que* X *y su serie de Fourier* S *coinciden en media y se pone simplemente* $X = S$.

Teorema 6.3.7. ***(Integración término a término)*** *Siempre que* X *cumpla las condiciones de Dirichlet, puede intercambiarse suma por integral en su desarrollo en serie:*

$$\int_{x_1}^{x_2} X(x)dx = \frac{A_0}{2}(x_1 - x_2) + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \int_{x_1}^{x_2} \cos(k_n x)dx + B_n \int_{x_1}^{x_2} \operatorname{sen}(k_n x)dx. \tag{6.12}$$

Teorema 6.3.8. ***(Derivación término a término)*** *Siempre* X *sea continua y su derivada* X' *cumpla las condiciones de Dirichlet, se tiene que* X' *y la derivada término a término de su serie de Fourier* S *coinciden en media, es decir:*

$$X'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} -k_n A_n \operatorname{sen}(k_n x) + k_n B_n \cos(k_n x). \tag{6.13}$$

6.3.4. Forma compleja de la serie de Fourier

Existe una forma más compacta de representar la serie (6.9) utilizando números complejos:

$$\boxed{X(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{\mathrm{i}k_n x}, \;\; k_n = \frac{2\pi}{\ell} n, \; n \in \mathbb{Z},} \tag{6.14}$$

con $c_n = a_n + \mathrm{i}b_n = |c_n|e^{-\mathrm{i}\phi_n}$ ciertos coeficientes complejos por determinar [$|c_n| = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$ denota el módulo y $\phi_n = \arctan(b_n/a_n)$ el argumento]. Como se puede comprobar fácilmente, las exponenciales complejas verifican las *propiedades de ortogonalidad* siguientes:

$$\boxed{\int_{x_0}^{x_0+\ell} e^{\mathrm{i}(k_n - k_m)x} dx = \ell \delta_{n,m}.} \tag{6.15}$$

Multiplicando ambos lados de la igualdad (6.14) por $e^{-\mathrm{i}k_m t}$ e integrando término a término la serie (se supone que X verifica las condiciones de Dirichlet), utilizando las propiedades de ortogonalidad (6.15), se llega una expresión para los coeficientes espectrales complejos:

$$\boxed{c_m = \frac{1}{\ell} \int_{x_0}^{x_0+\ell} X(x) e^{-\mathrm{i}k_m x} dx.} \tag{6.16}$$

Al ser la función $X(x)$ real, ésta coincide con su conjugada $\bar{X}(x)$, lo que quiere decir que:

$$X(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{\mathrm{i}k_n x} = \bar{X}(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \bar{c}_m e^{-\mathrm{i}k_m x}.$$

Haciendo $m = -n$ en la expresión anterior y comparando término a término (nótese que las exponenciales complejas con diferente k son funciones independientes) se tiene que:

$$\boxed{c_{-n} = \bar{c}_n.}$$

Utilizando ésta propiedad y la fórmula de Euler, $e^{\mathrm{i}x} = \cos x + \mathrm{i}\,\mathrm{sen}\, x$, podemos escribir la serie compleja (6.14) como:

$$X(x) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (c_n + \bar{c}_n)\cos(k_n x) + \mathrm{i}(c_n - \bar{c}_n)\,\mathrm{sen}(k_n x),$$

y comparando con la serie real (6.9) llegamos a una relación entre los coeficientes espectrales reales y complejos:

$$A_n = c_n + \bar{c}_n,\ B_n = i(c_n - \bar{c}_n),\ c_0 = \frac{A_0}{2} \Rightarrow c_n = \frac{A_n - \mathrm{i}B_n}{2}.$$

En el siguiente Capítulo aplicaremos estas técnicas a la resolución de algunas EDPs de interés en Física.

Capítulo 7

Las ecuaciones de ondas, del calor y de Laplace

Bibliografía: Ver Capítulos 10, 11 y 12 de [1] y Capítulo 10 de [2]

7.1. Ecuación de ondas: cuerdas, vigas y membranas vibrantes

7.1.1. Ecuación de las oscilaciones verticales de una cuerda

Formulación del problema básico con condiciones de contorno

En la figura 7.1 representamos la oscilación vertical (dirección del eje Y) de una cuerda de extremos $x = 0$ y $x = \ell$ fijos. Un elemento diferencial ("pequeño") de longitud $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$ de dicha cuerda se encuentra sometido a tensión $\vec{T}$; se supone que el peso está ya compensado en la situación de equilibrio (cuerda en horizontal) y no se tiene en cuenta. Las ecuaciones de movimiento de Newton para este elemento diferencial de cuerda

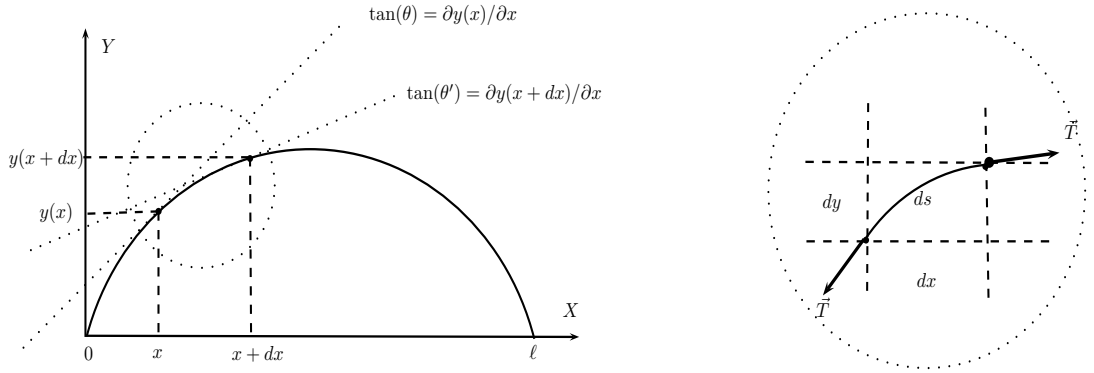


Figura 7.1: Cuerda vibrante

de longitud ds y masa $dm = \rho ds$ (ρ denota la densidad lineal de masa) son

$$\begin{aligned} T\cos\theta' - T\cos\theta &= dm\ddot{x}, \\ T\,\mathrm{sen}\,\theta' - T\,\mathrm{sen}\,\theta &= dm\ddot{y}, \end{aligned} \tag{7.1}$$

respectivamente en el eje X y en el eje Y. Supondremos que no hay desplazamiento en el eje X, con lo cual $\ddot{x} = 0$. También supondremos ángulos $\theta \ll 1$ pequeños (desplazamientos pequeños de la cuerda respecto de la horizontal) y usaremos las aproximaciones $\cos\theta \simeq 1$, $\mathrm{sen}\,\theta \simeq \tan\theta = y'(x)$ con lo cual, la ecuación de Newton (7.1) en el eje Y queda:

$$T\frac{\partial y(t, x+dx)}{\partial x} - T\frac{\partial y(t,x)}{\partial x} = dm\frac{\partial^2 y(t,x)}{\partial t^2}.$$

Además, a primer orden de aproximación, tenemos también que $\frac{\partial y(t,x+dx)}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(y(x) + \frac{\partial y(t,x)}{\partial x}dx$ y que $ds = \sqrt{1+y'^2}dx \simeq dx$, con lo cual simplificando nos queda

$$T\frac{\partial^2 y(t,x)}{\partial x^2} = \rho\frac{\partial^2 y(t,x)}{\partial t^2}.$$

Definiendo $v^2 = T/\rho$ (comprobar que v tiene dimensiones de velocidad), nos queda finalmente la ecuación de las oscilaciones verticales de una cuerda

$$\boxed{\frac{\partial^2 y(t,x)}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 y(t,x)}{\partial x^2}.} \tag{7.2}$$

A esta EDP hay que añadirle las

$$\text{condiciones de contorno: } \boxed{y(t,0) = 0 = y(t,\ell),} \tag{7.3}$$

que significan que los extremos de la cuerda permanecen fijos, sujetos al eje X en los puntos $x = 0$ y $x = \ell$. Además, existen también

$$\text{condiciones iniciales: } \boxed{y(t,x)|_{t=0} = y_0(x), \ \left.\frac{\partial y(t,x)}{\partial t}\right|_{t=0} = \dot{y}_0(x),} \tag{7.4}$$

que establecen el perfil inicial $y_0(x)$ que adopta la cuerda en cada punto x y su velocidad inicial $\dot{y}_0(x)$. Esta es la versión continua de la cuerda discreta discutida en (2.28) y que interpreta la ecuación de ondas como un sistema "grande" de osciladores acoplados, aproximando la derivada segunda por

$$\frac{\partial^2 y(t,x)}{\partial x^2} \simeq (y(t,x-h) - 2y(t,x) + y(t,x+h)/h^2.$$

Los métodos de discretización, que sustituyen un conjunto de $\mathbb{R}^n$ por un retículo de espaciado h pequeño, consiguen aproximar en general la EDP por un sistema grande (pero no infinito) de EDOs. También puede discretizarse el tiempo, resultando en un sistema algebraico de ecuaciones lineales. Existen otros métodos de reducción de una EDP a un sistema algebraico, como el Método de los Elementos Finitos, muy popular en ingeniería pero imposible de abordar aquí. La ecuación de ondas es lineal y homogenea y puede abordarse por el método de separación de variables y series de Fourier explicado en el tema anterior.

Separación de variables y método de Fourier

Ensayemos una solución del tipo $y(t,x) = T(t)X(x)$, que introducida en (7.2) nos lleva a

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \alpha = \frac{\ddot{T}(t)}{v^2 T(t)}, \tag{7.5}$$

donde α es una constante. Nosotros consideraremos solo el caso $\alpha = -k^2$ negativo, donde la constante k se denomina *número de ondas*, que lleva a soluciones oscilatorias no triviales.

Ejercicio 7.1.1. Pruébese con constante $\alpha \geq 0$ y véase que la única solución compatible con las condiciones de contorno es la trivial $y = 0$.

Las soluciones de ambas ecuaciones son

$$X''(x) - k^2 X(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad X(x) = A\cos kx + B\,\mathrm{sen}\, kx, \tag{7.6}$$

$$\ddot{T}(t) - v^2 k^2 T(t) \quad \Rightarrow \quad T(t) = C\cos vkt + D\,\mathrm{sen}\, vkt. \tag{7.7}$$

La condición de contorno (7.3) se escribe $X(0) = 0 = X(\ell)$, que implica $A = 0$ y los valores propios $k = k_n = n\pi/\ell$, de manera que las funciones propias (o modos normales de oscilación) son $X_n(x) = B_n \,\mathrm{sen}\, k_n x$. Nótese que n representa el número de nodos ("armónicos") de la onda X_n. Para la parte temporal tenemos $T_n(t) = C_n \cos\omega_n t + D_n \,\mathrm{sen}\,\omega_n t$, donde $\omega_n = vk_n$ se denominan *frecuencias propias* de oscilación. La solución general se escribe como un desarrollo en funciones propias

$$y(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t)X_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty}(A_n\cos\omega_n t + B_n\,\mathrm{sen}\,\omega_n t)\,\mathrm{sen}\, k_n x. \tag{7.8}$$

Las constantes A_n y B_n se obtienen a partir de las condiciones iniciales y las propiedades de ortogonalidad estudiadas para las series de Fourier en la sección (6.3.1), en particular

$$\int_0^\ell \mathrm{sen}(\frac{\pi n}{\ell}x)\,\mathrm{sen}(\frac{\pi m}{\ell}x)dx = \frac{\ell}{2}\delta_{n,m} \tag{7.9}$$

En efecto, multiplicando en (7.8) y su derivada por $\mathrm{sen}(k_m x)$ e integrando obtenemos

$$y(0,x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \,\mathrm{sen}\, k_n x = y_0(x) \quad \Rightarrow \quad A_n = \frac{2}{\ell}\int_0^\ell y_0(x)\,\mathrm{sen}\, k_n x dx, \tag{7.10}$$

$$\frac{\partial y(0,x)}{\partial t} = \sum_{n=1}^{\infty} \omega_n B_n \,\mathrm{sen}\, k_n x = \dot{y}_0(x) \quad \Rightarrow \quad B_n = \frac{2}{\omega_n \ell}\int_0^\ell \dot{y}_0(x)\,\mathrm{sen}\, k_n x dx, \tag{7.11}$$

Ejercicio 7.1.2. *Cuerda pulsada.* Obtener la solución general para una cuerda de longitud L pulsada en su centro y que parte del reposo, como la de la figura 7.2.

1. ¿Qué armónico n_0 domina sobre los demás?, es decir, ¿cuándo $|A_{n_0}| > |A_n|, \forall n$.?
2. ¿Cómo habrá que pulsar la cuerda para estimular el armónico $n = 2$ como modo dominante?, es decir, ¿qué tipo de condición inicial lineal a trozos hace que $|A_2| > |A_n|, \forall n$.
3. ¿Qué tipo de condición inicial lineal a trozos estimula el armónico $n = 3$ como modo dominante?.

Ejercicio 7.1.3. *Vibraciones longitudinales de una varilla.* La ecuación de movimiento para las vibraciones longitudinales de una varilla de densidad ρ, longitud L y módulo de Young E es:

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = \frac{E}{\rho}\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}$$

Obtener la solución general para las vibraciones de una varilla con una pequeña masa m en su extremo con condiciones iniciales:

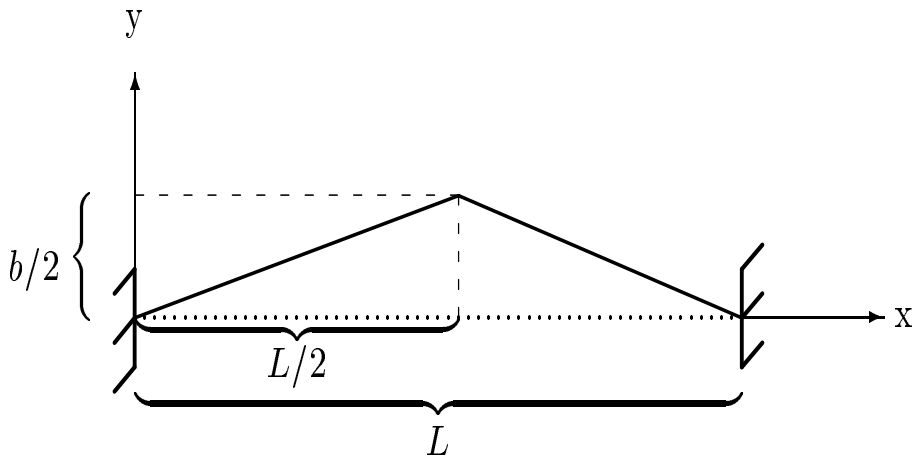


Figura 7.2: Cuerda pulsada.

1. $u(0,t) = 0$ (extremo izquierdo fijo)
2. $u(x,0) = bx$ (desplazamiento inicial u en x proporcional a x)
3. $u_t(x,0) = 0$ (parte del reposo)
4. $mu_{tt} = -AEu_x(L,t)$ (ecuación diferencial para el movimiento armónico de la masita m, donde A es el área de la sección de la varilla)

Ejercicio 7.1.4. *Membrana vibrante.* La ecuación diferencial que describe las vibraciones verticales de una membrana cuadrada de lados L_x, L_y es:

$$\frac{\partial^2 z(t,x,y)}{\partial t^2} = v^2 \left(\frac{\partial^2 z(t,x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z(t,x,y)}{\partial y^2} \right)$$

Hallar la solución general para las siguientes condiciones de contorno:

1. $z(x,0,t) = z(x,L_y,t) = z(0,y,t) = z(L_x,y,t) = 0$ (borde fijo)
2. $z(x,y,0) = z_0(x,y)$ (forma inicial de la membrana)
3. $\dot{z}(x,y,0) = \dot{z}_0(x,y) = 0$ (parte del reposo)

Pulse la membrana (elija $z_0(x,y)$) para estimular los modos (m,n): a) (1,0), b) (0,1), c) (1,1), como modos dominantes.

Solución de d'Alembert: ondas con movimiento hacia la derecha y hacia la izquierda

Haciendo el cambio de variable $x_\pm = x \pm vt$, la acuación de ondas (7.2) se puede escribir simplemente como

$$\frac{\partial^2 y(x_-,x_+)}{\partial x_- \partial x_+} = 0, \tag{7.12}$$

que tiene como solución general

$$y(x_-, x_+) = F(x_-) + G(x_+), \tag{7.13}$$

donde F y G son funciones diferenciables arbitrarias. $F(x_-) = F(x - vt)$ representa una onda moviéndose hacia la derecha, mientras que $G(x_+) = G(x + vt)$ lo hace hacia la izquierda, con velocidad v. En efecto, supongamos que F es una onda con "cresta" en $(x_-^*, F(x_-*))$. Dicha cresta se desplaza al variar t y x de manera que $x_-* = x - vt$. Derivando obtenemos $dx/dt = v$, la velocidad de la onda. Un razonamiento similar lleva a que $dx/dt = -v$ para la onda G.

7.1.2. Oscilaciones verticales de una viga: vibráfonos

La ecuación diferencial que describe las oscilaciones verticales de una viga de longitud L, módulo de Young E, densidad ρ y momento de inercia de la sección transversal de la viga I es:

$$\rho \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} = -EI \frac{\partial^4 y(x,t)}{\partial x^4}.$$

Esta ecuación se reduce a (2.16) en el caso estático, donde se sustituye la fuerza de inercia $\rho \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2}$ por la densidad de carga $q(x)$ (en el caso dinámico se entiende que la carga $q(x)$ está compensada en la posición de equilibrio $y = 0$). Veamos cómo hallar la solución general para una viga apoyada con soporte simple (véase la figura 2.14 para las distintas condiciones de contorno correspondinetes a distintos soportes de la viga) cuyas condiciones de contorno vienen dadas por

1. $y(0,t) = 0,\ y(L,t) = 0$ (la viga esta fija en sus extremos)

2. $y''(0,t) = 0,\ y''(L,t) = 0$ (el momento flexor en los estremos es cero)

y condiciones iniciales

1. $y(x,0) = y_0(x) = ay(y - L)$ (forma inicial de la viga)

2. $\dot{y}(x,0) = \dot{y}_0(x) = 0$ (la viga parte del reposo)

Separando variables $y(t,x) = T(t)X(x)$ y denotando por $a^4 = EI/\rho$, tenemos que

$$\frac{X^{IV}(x)}{X(x)} = \alpha = -\frac{\ddot{T}(t)}{a^4 T(t)},$$

donde α es una constante. Tomemos el caso de $\alpha = k^4$ positivo.

Ejercicio 7.1.5. Pruébese con constante $\alpha \leq 0$ y véase que la única solución compatible con las condiciones de contorno es la trivial $y = 0$.

La solución general de $X^{IV}(x) = k^4 X(x)$ es

$$X(x) = A\cos kx + B\,\mathrm{sen}\,kx + C\cosh kx + D\,\mathrm{senh}\,kx.$$

Las condiciones de contorno $X(0) = 0 = X''(0)$ implican que $A = C = 0$, mientras que las condiciones $X(L) = 0 = X''(L)$ implican $D = 0$ y $k = k_n = n\pi/L$. Por lo tanto, para la parte espacial tenemos soluciones $X_n(x) = \mathrm{sen}\,k_n x$. Para la parte temporal, la ecuación $\ddot{T}(t) = -\omega_n^2 T(t)$ con $\omega_n = k_n^2 a^2 = n^2\omega_1$ la frecuencia del armónico n-ésimo y $\omega_1 = \frac{\pi^2}{L^2}\sqrt{\frac{EI}{\rho}}$ la frecuencia fundamental dl vibráfono. Nótese que, como $\omega_n = n^2\omega_1$, los armónicos en el vibráfono están más espaciados que en la cuerda, donde $\omega_n = n\omega_1$, lo que hace que el sonido sea "más puro" (sonido musical "no disonante"). La solución de $\ddot{T}(t) = -\omega_n^2 T(t)$ es

$$T_n(t) = A\cos\omega_n t + B\,\mathrm{sen}\,\omega_n t$$

y la condición inicial $\dot{T}_n(0) = 0$ (velocidad inicial nula) implica $B = 0$, con lo cual, la solución general del vibráfono es

$$y(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t)X_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos\omega_n t\,\mathrm{sen}\,k_n x.$$

Para calcular las constantes A_n se utilizará la condición inicial $y(x,0) = y_0(x) = ay(y-L)$, que da la forma inicial de la viga. Usando las relaciones de ortogonalidad de los senos (7.9), tenemos (calculad la integral)

$$A_n = \frac{2}{L}\int_0^L y_0(x)\,\mathrm{sen}\,k_n x dx$$

Ejercicio 7.1.6. Considérese el caso de soporte interconstruído, con condiciones de contorno

1. $y(0,t) = 0,\ y(L,t) = 0$ (la viga esta fija en sus extremos)
2. $y'(0,t) = 0,\ y'(L,t) = 0$ (viga empotrada en sus dos extremos)

y calcúlese por algún procedimiento numérico (por ejemplo, usando el comando "FindRoot"de Mathematica) la frecuencia fundamental. Aplicar al caso en que $L = 120$ pies (1 pie≈30.48 cm), $\rho = 7{,}75 gr/cm^3$, $E = 2\times 10^{12} dinas/cm^2$, $I = 9000 cm^4$ y demostrar que unos soldados marchando a unos 120 pasos por minuto encima de esta viga (puente) podrían romperlo (es decir, el puente entraría en "resonancia").

7.1.3. Vibraciones radiales de un tambor y ecuación de Bessel

La geometría circular de un tambor de radio R nos sugiere usar coordenads polares $x = x(r,\theta) = r\cos\theta, y = y(r,\theta) = r\,\mathrm{sen}\,\theta$. El Laplaciano de z en coordenadas polares es

$$\frac{\partial^2 z(t,x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z(t,x,y)}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 u(t,r,\theta)}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u(t,r,\theta)}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u(t,r,\theta)}{\partial \theta^2}, \tag{7.14}$$

donde $u(t,r,\theta) = z(t, x(r,\theta), y(r,\theta))$. Consideremos el caso en que existe simetría angular, es decir, el caso en que u no depende de θ. Separando variables $u(t,r) = \tau(t)\rho(r)$ y sustituyendo en la ecuación de ondas obtenemos

$$\frac{\rho'' + \rho'/r}{\rho} = \lambda = \frac{\ddot{T}}{v^2 T}, \tag{7.15}$$

donde λ es una constante que tomaremos negativa $\lambda = -\alpha^2$ (compruébese que el caso $\lambda > 0$ no conduce a soluciones oscilatorias). Identificamos la ecuación radial

$$r\rho'' + \rho' + r\alpha^2\rho = 0 \tag{7.16}$$

con la ecuación paramétrica de Bessel (5.23) de orden $\nu = 0$, cuya solución general viene dada por

$$\rho(r) = c_1 J_0(\alpha r) + c_2 Y_0(\alpha r).$$

Como $\lim_{x\to 0} Y_0(x) = -\infty$, eliminaremos esta solución tomando $c_2 = 0$. La condición de contorno $u(t,R) = 0$ impone $J_0(\alpha R) = 0$, de manera que $\alpha = \alpha_n = x_n/R$, dodne x_n son los ceros de la función de Bessel $J_0(x)$ (se calculan numéricamente). La solución de la parte temporal $\ddot{\tau}_n = -\alpha_n v^2 \tau_n$ es $\tau_n(t) = A_n \cos\omega_n t + B_n \operatorname{sen}\omega_n t$, donde $\omega_n = \alpha_n v$ son las frecuencias del tambor (encontrar la frecuencia fundamental ω_1). La solución general es

$$u(t,r) = \sum_{n=1}^{\infty} \tau_n(t)\rho_n(r) = \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos\omega_n t + B_n \operatorname{sen}\omega_n t) J_0(\alpha_n r).$$

Las constantes A_n y B_n se calculan con las condiciones iniciales $u(0,r) = u_0(r)$ y $\dot{u}(0,r) = v_0(r)$ y las relaciones de ortogonalidad de las funciones de Bessel en la sección 5.2.1, de manera que

$$\begin{aligned} A_n &= \frac{2}{R^2 J_1^2(\alpha_n R)} \int_0^R r J_0(\alpha_n r) u_0(r) dr, \\ B_n &= \frac{2}{\omega_n R^2 J_1^2(\alpha_n R)} \int_0^R r J_0(\alpha_n r) v_0(r) dr. \end{aligned} \tag{7.17}$$

7.1.4. Ondas esféricas y polinomios de Legendre

7.2. Ecuación de la difusión del calor

7.2.1. Formulación del problema básico con condiciones de contorno

Como segunda aplicación física de las EDPs consideramos problemas de difusión como, por ejemplo, flujos de calor entre zonas a distinta temperatura. En la sección 2.6.4 ya discutimos el caso discreto. Aquí trataremos el caso continuo. Motivemos físicamente de

nuevo la EDP a estudiar. Sabemos que el calor "fluye" de las zonas más calientes a las más frías, es decir, sigue la dirección contraria al gradiente de temperaturas:

$$\vec{J}(\vec{r},t) = -\kappa\vec{\nabla}T(\vec{r},t),$$

donde $\vec{J}$ denota el vector corriente de calor, κ la conductividad térmica del material[1] y $T(\vec{r},t)$ el campo de temperaturas en cada punto $\vec{r}$ del espacio y en cada instante de tiempo t. La ecuación de continuidad (que en este caso coincide con la ley de conservación de la energía)

$$\frac{\partial Q(\vec{r},t)}{\partial t} = -\vec{\nabla}\cdot\vec{J}(\vec{r},t)$$

establece entonces que la cantidad de calor Q que ingresa o abandona por unidad de tiempo un elemento infinitesimal de volumen dado localizado en $\vec{r}$ es igual a la divergencia (flujo por unidad de volumen) del vector corriente de calor a través de las paredes. Sabiendo que la relación entre calor y temperatura viene dada a través de la expresión $Q = c\rho T$, donde ρ denota la densidad y c la capacidad calorífica del material, nos queda la siguiente Ecuación en Derivadas Parciales:

$$\frac{\partial T(\vec{r},t)}{\partial t} = -\frac{1}{c\rho}\vec{\nabla}\vec{J}(\vec{r},t) = \frac{\kappa}{c\rho}\vec{\nabla}^2T(\vec{r},t)$$

que describe la evolución en el tiempo de la distribución de temperaturas en un material. A cociente $a^2 = \frac{\kappa}{c\rho}$ se le denomina constante de difusión.

Para una varilla (una dimensión) de longitud L, densidad λ y capacidad calorífica c, la EDP a estudiar es:

$$\frac{\partial T(x,t)}{\partial t} = \frac{\kappa}{c\lambda}\frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial x^2}$$

con condiciones iniciales y de contorno

$$T(x,0) = T_0(x),\ T(0,t) = T_1(t),\ T(L,t) = T_2(t)$$

para extremos en contacto con dos focos caloríficos a temperaturas T_1 y T_2 y

$$T(x,0) = T_0(x),\ \partial_x T(0,t) = \partial_x T(L,t) = 0$$

para extremos aislados.

Separación de variables y método de Fourier

Consideremos el caso de una varilla en contacto con termostatos a temperatura $T_1 = T_2 = 0$. El método de separación de varialbes $T(x,t) = \chi(x)\tau(t)$ nos lleva a

$$\frac{\chi''}{\chi} = \lambda = \frac{\dot{\tau}}{a^2\tau}. \tag{7.18}$$

[1] la conductividad térmica κ depende en general de la dirección y la posición (es decir, es una matriz o, mejor dicho, un "tensor"). No obstante, nosotros consideraremos sólo materiales homogéneos e isótropos para los cuales κ es escalar y constante

Tomemos el caso $\lambda = -k^2$ negativo (comprobad que el caso positivo conduce a una solución trivial). La solución de $\chi'' = -k^2\chi$ es $\chi(x) = c_1 \operatorname{sen} kx + c_2 \cos kx$. Las condiciones de contorno $\chi(0) = 0 = \chi(L)$ (temperatura cero en los extremos) implican $c_2 = 0$ y $k = k_n = n\pi/L$ de manera que las soluciones de la parte espacial son $\chi_n(x) = A_n \operatorname{sen} k_n x$. La solución de la parte temporal $\dot{\tau}_n = -k_n^2 a^2 \tau_n$ es $\tau_n(t) = C \exp(-k_n^2 a^2 t)$. Juntando todo, la solución general es:

$$T(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \chi_n(x)\tau_n(t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \exp(-k_n^2 a^2 t) \operatorname{sen} k_n x. \tag{7.19}$$

Las constantes A_n se calculan a partir de la condición inicial $T(x,0) = T_0(x)$

$$A_n = \frac{2}{L}\int_0^L T_0(x) \operatorname{sen} k_n x dx.$$

Ejercicio 7.2.1. Calculad A_n para $T_0(x) = 100$ y para $T_0(x) = x(L-x)$.

Observación 7.2.2. *Soluciones aproximadas: método de las diferencias finitas.* En la sección 2.6.4 estudiamos la versión discreta de la ecuación del calor. Recuérdese que, en el estado estacionario (independiente del tiempo), la discretización del Laplaciano (2.30) llevaba al resultado (2.32) que establecía que la temperatura en un punto era la media aritmética de la temperatura de los vecinos más próximos.

Ejercicio 7.2.3. Obtener la solución general para la distribución de temperaturas en el tiempo con condiciones de contorno $T(0,t) = T_1$ (extremo izquierdo a temperatura T_1) y $T(L,t) = T_2$ (extremo derecho a temperatura T_2). Ayuda: Ensayad una solución de la forma $\tilde{T}(x,t) = T(x,t) + \psi(x)$, donde ψ no depende del tiempo, de manera que $\psi(0) = T_1$ y $\psi(L) = T_2$, con lo cual $T(0,t) = 0 = T(L,t)$ y por lo tanto la solución para T coincide con la de extremos a temperatura cero discutida en (7.19). La temperatura $\psi(x)$ coincide entonces con la temperatura en el estado estacionario ($t \to \infty$). Calculadla haciendo uso de la condición $\psi''(x) = 0$ y $\psi(0) = T_1$ y $\psi(L) = T_2$. Imponed la condición inicial $T(x,0) = T_0(x) = x(L-x)$ y calculad los coeficientes de Fourier A_n.

Ejercicio 7.2.4. *(Extremos aislados)* Obtener la solución general para la distribución de temperaturas en el tiempo con condiciones de contorno $T'(0,t) = T'(L,t) = 0$ (corriente de calor $\vec{J}$ nula en los extremos). Calculad los coeficientes de Fourier A_n tomando como temperatura inicial $T(x,0) = \operatorname{sen}^2(\pi x/L)$.

Ejercicio 7.2.5. *Difusión del calor en una placa.* La ecuación diferencial para la variación temporal de la temperatura en una placa rectangular de lados L_x, L_y, densidad ρ, conductividad térmica κ y capacidad calorífica c ya la escribimos en (2.33). La reproducimos aquí también por comodidad:

$$\frac{\partial T(x,y,t)}{\partial t} = \frac{\kappa}{c\sigma}\left(\frac{\partial^2 T(x,y,t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T(x,y,t)}{\partial y^2}\right) \tag{7.20}$$

Allí consideramos soluciones aproximadas usando el método de las diferencias finitas donde, la discretización del Laplaciano (2.34) reducía la EDP (7.20) a un sistema de EDOs de primer orden (2.35). La temperatura en el estado estacionario en cada punto se obtenía como la media de la temperatura de los puntos adyacentes (2.36).

Obtener ahora, por separación de variables y el método de Fourier, la solución general (exacta) para la distribución de temperaturas en el tiempo con condiciones iniciales:

1. $T(0,y,t) = T(L_x,y,t) = 0 = T(x,0,t) = T(x,L_y,t) = 0$ (temperatura nula en los bordes)

2. $T(x,y,0) = T_0(x,y) = \operatorname{sen}(2\pi x/L_x)\operatorname{sen}(4\pi y/L_y)$ (temperatura inicial)

Ejercicio 7.2.6. Calcule la temperatura en el estado estacionatio $\psi(x,y) = \lim_{t\to\infty} T(x,y,t)$ del ejercicio anterior si las condiciones de contorno son ahora $T(0,y,t) = T_1$, $T(L_x,y,t) = T_2$, $T(x,0,t) = T_1$, $T(x,L_y,t) = T_2$.

7.2.2. Temperatura estacionaria en un círculo: ecuación de Cauchy-Euler

Consideremos ahora el caso de una placa circular e introduzcamos coordenadas polares como en (7.14). Consideremos el caso estacionario (independiente del tiempo), de manera que la ecuación de difusión de difusión (7.20) se reduce a la *ecuación de Laplace* en un círculo

$$\frac{\partial^2 T(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T(x,y)}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 u(r,\theta)}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u(r,\theta)}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u(r,\theta)}{\partial \theta^2} = 0, \tag{7.21}$$

donde $u(r,\theta) = T(x(r,\theta), y(r,\theta))$. Abusaremos de notación y denotaremos de nuevo por $T(r,\theta) = u(r,\theta)$, simplemente para acordarnos de que u es la *temperatura* en la placa circular. Separando variables $T(r,\theta) = \rho(r)\Phi(\theta)$ y sustituyendo en la ecuación de Laplace (7.21) obtenemos

$$\frac{r^2\rho''(r) + r\rho'(r)}{\rho(r)} = \lambda = -\frac{\Phi''(\theta)}{\Phi(\theta)}, \tag{7.22}$$

donde λ es una constante que tomaremos positiva $\lambda = \alpha^2$ (compruébese que el caso $\lambda < 0$ no conduce a soluciones periódicas en θ).

1. La parte angular conduce a la ecuación $\Phi''(\theta) = -\alpha^2\Phi(\theta)$ que tiene como solución general $\Phi(\theta) = A\cos\alpha\theta + B\operatorname{sen}\alpha\theta$. La condición de periodicidad $\Phi(\theta+2\pi m) = \Phi(\theta)$ implica que $\alpha = n \in \mathbb{Z}$ (debe ser entero)

2. La parte radial, tomando $\alpha = n$, queda

$$r^2\rho'' + r\rho' - n^2\rho = 0, \tag{7.23}$$

que tiene la forma de una ecuación de Cauchy-Euler (3.13). Ensayando $\rho(r) = r^m$ obtenemos $m(m-1)+m-n^2 = 0$ que conduce a $m = \pm n$. Aquí hay que considerar dos casos:

a) Si $n \neq 0$, entonces tenemos dos soluciones independientes, y la solución general es $\rho(r) = c_1 r^n + c_2 r^{-n}$.

b) Si $n = 0$ entonces la solución de $r^2\rho'' + r\rho' = 0$ es $\rho(r) = c_3 + c_4 \ln(r)$ [comprobadlo, reduciendo primero mediante el cambio $\rho' = q$ y $\rho'' = q'$ a una ecuación de primer orden]

Tomando $n > 0$, las soluciones $c_2 r^{-n}$ y $c_4 \ln r$ no están definidas en $r = 0$ de manera que tomaremos $c_2 = 0 = c_4$. Resumiendo, las soluciones básicas de la ecuación de Laplace son $u_n(r, \theta) = r^n(A_n \cos n\theta + B_n \operatorname{sen} n\theta)$ con $n = 0, 1, 2, \ldots$ [se ha incluído el caso $n = 0$ como $T_0(r\theta) = A_0$ constante, ya que en este caso era $\rho(r) = c_3$ constante]. Cualquier solución de la ecuación de Laplace (7.21) puede escribirse entonces como superposición de soluciones básicas:

$$T(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} T_n(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} r^n(A_n \cos n\theta + B_n \operatorname{sen} n\theta). \tag{7.24}$$

Las constantes A_n y B_n se obtienen a partir de las condiciones de contorno (no hay condiciones iniciales en el caso estacionario), que tomaremos como $T(R, \theta) = \psi(\theta)$ [temperatura $\psi(\theta)$ en el borde exterior de la placa circular de radio R]. Teniendo en cuenta las relaciones de ortogonalidad para senos y cosenos:

$$\int_0^{2\pi} \operatorname{sen} n\theta \operatorname{sen} m\theta d\theta = \pi\delta_{m,n} = \int_0^{2\pi} \cos n\theta \cos m\theta d\theta, \tag{7.25}$$

[y cero para productos de senos por cosenos] podemos calcular facilmente las constantes A_n y B_n multiplicando ambos lados de (7.24) por $\operatorname{sen} n\theta$ y $\cos n\theta$, poniendo $T(R, \theta) = \psi(\theta)$ e integrando, de manera que

$$A_n = \frac{1}{R^n \pi} \int_0^{2\pi} \cos n\theta \psi(\theta) d\theta, B_n = \frac{1}{R^n \pi} \int_0^{2\pi} \operatorname{sen} n\theta \psi(\theta) d\theta, n \in \mathbb{N}, \tag{7.26}$$

junto con $A_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \psi(\theta) d\theta$ [temperatura media en el borde]. Este problema se denomina también *problema de Dirichlet para el círculo de radio R.*

Ejercicio 7.2.7. Hallar la solución general del problema de Dirichlet para un círculo de radio R con condición de contorno $T(R, \theta) = \psi(\theta) = (\theta - \pi)(\theta + \pi)$.

Ejercicio 7.2.8. Demostrar que la distribución estacionaria de temperaturas para una tubería cilíndrica de radio interior R_1 y exterior R_2 por la que circula un fluido a temperarura T_1 viene dada por:

$$T(r, \theta, z) = T_1 + \frac{\ln(r/R_1)}{\ln(R_2/R_1)}(T_2 - T_1)$$

donde T_2 es la temperatura exterior. Ayuda: nótese que se ha eliminado el punto $r = 0$ haciendo un agujero en el círculo (sección transversal de la tubería), de manera que el argumento que eliminaba las soluciones $\rho(r) = c_2 r^{-n}$ y $\rho(r) = c_4 \ln r$ de la ecuación

(7.23) ya no aplica en este caso. Es más, al ser la temperatura interior T_1 y exterior T_2 independientes de θ, la solución estacionaria no dependerá de θ (en efecto, comprobad que $A_n = 0 = B_n, \forall n \neq 0$). Es decir, debemos tomar sólo el caso $n = 0$ de (7.23), siendo entonces la solución $T(r,\theta) = \rho(r) = c_3 + c_4 \ln(r)$, a falta de imponer condiciones de contorno.

Ejercicio 7.2.9. Consideremos un semicírculo de radio R, con temperatura en el borde curvo $T(R,\theta) = T_0$ si $0 < \theta < \pi$ y en el borde recto $T(r,0) = 0 = T(r,\pi)$ para todo $0 \leq r \leq R$. Demostrar que la distribución estacionaria de temperaturas viene dada en este caso por $T(r,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} r^n B_n \operatorname{sen} n\theta$ con

$$B_n = \frac{2}{R^n \pi} \int_0^{\pi} T_0 \operatorname{sen} n\theta d\theta = \frac{2T_0}{R^n \pi} \frac{1-(-1)^n}{n}.$$

7.2.3. Temperatura estacionaria en una esfera: Ecuación de Legendre

La geometría esférica nos sugiere usar coordenadas esféricas r (distancia al centro) θ (ángulo polar norte) y ϕ (ángulo azimutal), relacionadas con las coordenadas cartesianas por $x(r,\theta,\phi) = r \operatorname{sen}\theta \cos\phi, y(r,\theta,\phi) = r \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\phi$ y $z(r,\theta,\phi) = r\cos\theta$. Consideremos el caso estacionario (independiente del tiempo), de manera que la ecuación de difusión en el espacio se reduce a la *ecuación de Laplace* en una esfera. El Laplaciano de T en coordenadas esféricas es:

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2 \operatorname{sen}\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\operatorname{sen}\theta \frac{\partial}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{r^2 \operatorname{sen}^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial \phi^2}. \quad (7.27)$$

Consideremos la condición de contorno para la esfera de radio R dada por $T(R,\theta,\phi) = \psi(\theta)$, es decir, la temperatura en el borde solo depende del ángulo polar θ y no del azimutal ϕ. Con esta simplificación, buscaremos soluciones del tipo $T(r,\theta) = \rho(r)\Theta(\theta)$ que, insertadas en la ecuación de Laplace $\Delta T = 0$ conducen a

$$\frac{r^2\rho''(r) + 2r\rho'(r)}{\rho(r)} = \lambda = -\frac{\Theta''(\theta) + \cot(\theta)\Theta'(\theta)}{\Theta(\theta)}, \quad (7.28)$$

donde λ es una constante, que tomaremos positiva (estudiese el caso negativo). Veamos la parte radial y la parte angular.

1. La parte radial, escribiendo $\lambda = n(n+1)$, queda

$$r^2\rho'' + 2r\rho' - n(n+1)\rho = 0, \quad (7.29)$$

que tiene la forma de una ecuación de Cauchy-Euler (3.13). Ensayando $\rho(r) = r^m$ obtenemos $m(m-1) + 2m - n(n+1) = 0$ que conduce a $m = \pm n$ (es por esto que se ha elegido escribir $\lambda = n(n+1)$). La solución general es $\rho(r) = c_1 r^n + c_2 r^{-n}$. Tomaremos $c_2 = 0$ ya que r^{-n} no está definida en el origen $r = 0$.

2. La parte angular conduce a la ecuación $\operatorname{sen}\theta\Theta'' + \cos\theta\Theta' + \lambda \operatorname{sen}\theta\Theta = 0$. Haciendo el cambio de variable $q = \cos\theta$ y $\Theta(\operatorname{arc}\cos q) = P(q)$, se puede comprobar que se llega a la *ecuación de Legendre* (4.4) en la variable q, es decir

$$(1-q^2)P'' - 2qP' + n(n+1)P = 0$$

cuyas soluciones son los polinomios de Legendre (4.7).

Las soluciones básicas son entonces $T_n(r,\theta) = A_n r^n P_n(\cos\theta)$ y la solución general $T(r,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} T_n(r,\theta)$. Haciendo uso de las relaciones de ortogonalidad (4.8) entre polinomios de Legendre y de la condición de contorno $T(R,\theta,\phi) = \psi(\theta)$, se pueden calcular los coeficientes A_n mediante la integral

$$A_n = \frac{2n+1}{2R^n}\int_0^{\pi} \psi(\theta)P_n(\cos\theta)\operatorname{sen}\theta d\theta. \tag{7.30}$$

7.3. Ecuación de Laplace

Existen numerosos problemas en física que conducen a la resolución de la ecuación de Laplace $\Delta\Phi(x,y,z) = 0$, donde Δ denota el operador laplaciano, en un determinado volumen Ω con frontera $\partial\Omega$ y con condiciones de contorno de tipo Dirichlet $\Phi|_{\partial\Omega} = \Psi(m)$, $m \in \partial\Omega$ o de tipo Neumann $\frac{\partial\Phi}{\partial\vec{n}}|_{\partial\Omega} = \bar{\Psi}(m)$, $m \in \partial\Omega$. Por ejemplo, ya hemos estudiado en la sección anterior el problema de la distribución estacionaria de temperatura $\Phi = T$ en un cuerpo homogéneo que ocupa una región Ω con frontera $\partial\Omega$, donde las condiciones de contorno de tipo Neuman se corresponden con bordes aislados, como en el ejercicio 7.2.4. Otros problemas descritos por la ecuación de Laplace son también:

1. La distribución de presión $\Phi = P$ en un fluido en los casos de flujo irrotacional $\vec{\nabla}\times\vec{V} = \vec{0}$ e incompresible $\vec{\nabla}\cdot\vec{V} = 0$ y "filtración" $\vec{V} = -\frac{\kappa}{\rho}\vec{\nabla}P$, donde κ es el "coeficiente de permeabilidad". La ecuación de continuidad lleva a $\Delta P(x,y,z) = 0$.

2. El potencial de una corriente eléctrica estacionaria $\Rightarrow \vec{\nabla}\cdot\vec{J} = 0$, que junto con $\vec{\nabla}\times\vec{E} = \vec{0} \Rightarrow \vec{E} = \vec{\nabla}\varphi$ y la ley de Ohm $\vec{J} = \sigma\vec{E}$ nos lleva a $\Delta\varphi = 0$

Capítulo 8

Introducción a los problemas de Sturm-Liouville

Bibliografía: Ver Capítulo 10.5 de [1] y Capítulo 11 de [2]

Parte IV

Apéndices

Apéndice A

Demostración del Teorema de Picard

Teorema A.0.1. Teorema de Picard. *Si en la ecuación*

$$y^{(n)} = f(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)}). \tag{A.1}$$

la función $f(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)})$ *y sus derivadas parciales* $\partial_y f, \partial_{y'} f, \ldots, \partial_{y^{(n-1)}} f$ *son continuas en un cierto dominio* $\Omega = \mathcal{E}_h(x_0) \times B_r(\vec{z}_0)$, *donde* $\mathcal{E}_h(x_0) = [x_0 - h, x_0 + h]$ *y* $B_r(\vec{z}_0) \subset \mathbb{R}^n$ *es la bola cerrada de radio* r *y centro* $\vec{z}_0 = (y_0, y_0', \ldots, y_0^{(n-1)})$, *existe una solución única* $y = y(x)$ *de la ecuación (A.1) que satisface las condiciones:*

$$y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_0', \ldots, y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}, \tag{A.2}$$

definida en el intervalo $\mathcal{E}_a(x_0)$, *donde* $a \leq \min\{h, r/M\}$ *y* $M = \sup\{\|\vec{f}(x, \vec{z})\| : (x, \vec{z}) \in \Omega\}$.

Las condiciones (A.2) se llaman *condiciones iniciales*, y el problema se denomina *problema de valor inicial o de Cauchy*, por contraposición al *problema de valor en la frontera*.

Demostración: Las directrices a seguir para la prueba del teorema se apoyan en el *método de las aproximaciones sucesivas de Picard*, que proporciona también una línea de ataque para la resolución de EDOs de forma iterativa. La clave del método consiste en advertir que si $\vec{z}(x)$ es una función continua en el intervalo $\mathcal{E}_h(x_0)$, entonces ésta es solución del problema de Cauchy

$$\vec{z}'(x) = \vec{f}(x, \vec{z}(x)), \quad \vec{z}(x_0) = \vec{z}_0, \tag{A.3}$$

si y sólo si cumple la ecuación integral

$$\vec{z}(x) - \vec{z}_0 = \int_{x_0}^{x} \vec{f}(t, \vec{z}(t))dt, \tag{A.4}$$

para cada $x \in \mathcal{E}_h(x_0)$. En efecto, si $\vec{z}(x)$ es solución de (A.3) entonces

$$\vec{z}(x) - \vec{z}_0 = \vec{z}(x) - \vec{z}(x_0) = \int_{x_0}^{x} \vec{z}'(t)dt = \int_{x_0}^{x} \vec{f}(t, \vec{z}(t))dt.$$

Recíprocamente, si si $\vec{z}(x)$ es una función continua que verifica (A.4), entonces $\vec{z}(x_0) = \vec{z}_0$; además (A.4) implica que $\vec{z}(x)$ es derivable y su derivada es

$$\vec{z}'(x) = \vec{f}(x, \vec{z}(x)).$$

Parece ahora plausible suponer que si definimos la sucesión de funciones $\{\vec{z}_n\}_{n=0}^{\infty}$ mediante

$$\vec{z}_{m+1}(x) - \vec{z}_0 = \int_{x_0}^{x} \vec{f}(t, \vec{z}_m(t))dt, \; x \in I_a \tag{A.5}$$

comenzando por la función constante $\vec{z}_0(x) \equiv \vec{z}_0$, dicha sucesión convergerá a la solución buscada. En efecto, veamos que dicha iteración $\{\vec{z}_n\}_{n=0}^{\infty}$ converge uniformemente a la solución $\vec{z}(x)$ siempre que $\vec{f}(x, \vec{z})$ y $\partial_{z_k} \vec{f}(x, \vec{z})$, $k = 0, 1, \ldots n-1$ estén acotadas en el

recinto cerrado Ω, lo cual se cumple efectivamente al ser ambas continuas por hipótesis (teorema de Weierstrass). Es decir, la continuidad de $\vec{f}$ y $\partial_{z_k}\vec{f}$ en un cerrado Ω implica que:

$$\|\vec{f}(x,\vec{z})\| \leq M, \;\; \|\partial_{z_k}\vec{f}(x,\vec{z})\| \leq K_k \leq \max_{k=0,\ldots,n-1}\{K_k\} \equiv K. \tag{A.6}$$

Apréciese que para que la familia $\{\vec{z}_n\}_{n=0}^{\infty}$ esté bien definida necesitamos que $\|\vec{z}_m(x) - \vec{z}_0\| \leq r$ para cada $x \in \mathcal{E}_h(x_0)$, para que así pueda evaluarse $\vec{f}(x,\vec{z}_m(x))$ a la hora de calcular $\vec{z}_{m+1}$. Esto no es problema porque $\vec{z}_0$ cumple trivialmente esta propiedad y, procediendo por inducción, si $\vec{z}_m(x)$ la cumple, entonces

$$\|\vec{z}_{m+1}(x) - \vec{z}_0\| = \left\| \int_{x_0}^{x} \vec{f}(t,\vec{z}_m(t))dt \right\| \leq M|x - x_0| \leq Ma \leq r,$$

lo que quiere decir que $\vec{z}_{m+1}(x)$ también la cumple.[1]

La convergencia de la sucesión $(\vec{z}_n)_{n=0}^{\infty}$ es equivalente a la de la serie $\sum_{m=0}^{\infty}(\vec{z}_{m+1} - \vec{z}_m)$ ya que las sumas parciales son los términos de la sucesión, salvo $\vec{z}_0$:

$$\vec{z}_{n+1} = \vec{z}_0 + \sum_{m=0}^{n}(\vec{z}_{m+1} - \vec{z}_m). \tag{A.7}$$

Para demostrar la convergencia de la serie, debemos cerciorarnos de que el término m-ésimo $(\vec{z}_{m+1} - \vec{z}_m)$ tiende a cero suficientemente rápido cuando $m \to \infty$. La distancia entre la primera iteración y la segunda es (para $x \geq x_0$):

$$\begin{aligned}
\|\vec{z}_2(x) - \vec{z}_1(x)\| &= \left\| \int_{x_0}^{x} \vec{f}(t,\vec{z}_1(t)) - \vec{f}(t,\vec{z}_0(t))dt \right\| \\
&\leq \int_{x_0}^{x} \|\vec{f}(t,\vec{z}_1(t)) - \vec{f}(t,\vec{z}_0(t))\|dt \\
&= \int_{x_0}^{x} \|(\vec{z}_1(t) - \vec{z}_0(t)) \cdot \partial_{\vec{z}}\vec{f}(t,\vec{z}^*(t))\|dt \\
&\leq \int_{x_0}^{x} \|(\vec{z}_1(t) - \vec{z}_0(t))\|\|\partial_{\vec{z}}\vec{f}(t,\vec{z}^*(t))\|dt \\
&\leq Kc(x - x_0),
\end{aligned}$$

donde $c \equiv \sup_{t\in\mathcal{E}_a(x_0)} \|\vec{z}_1(t) - \vec{z}_0(t)\|$ y donde se ha utilizado el teorema del valor medio

$$\vec{f}(t,\vec{z}_1(t)) - \vec{f}(t,\vec{z}_0(t)) = (\vec{z}_1(t) - \vec{z}_0(t)) \cdot \partial_{\vec{z}}\vec{f}(t,\vec{z}^*(t)),$$

y la acotación $\|\partial_{z_k}\vec{f}(x,\vec{z})\| \leq K$, $\forall(x,\vec{z}) \in \Omega$ dada por la segunda desigualdad en (A.6). La combinación del teorema del valor medio y la acotación implica la llamada *condición de Lipschitz*[2] en la variable $\vec{z}$

$$\|\vec{f}(x,\vec{z}_1(x)) - \vec{f}(x,\vec{z}_0(x))\| \leq K\|\vec{z}_1(x) - \vec{z}_0(x)\|. \tag{A.8}$$

[1] Se ha utilizado que $\left\|\int_a^b \vec{f}(t)dt\right\| \leq \int_a^b \|\vec{f}(t)\|dt$ para una función $\vec{f}: [a,b] \to \mathbb{R}^n$ continua, junto con la primera desigualdad en (A.6).

[2] Véase la observación A.0.2 a la conclusión de la demostración

Razonando por inducción se obtiene que la distancia entre la m-ésima y la $(m+1)$-ésima iteración es

$$\|\vec{z}_{m+1}(x) - \vec{z}_m(x)\| \leq \frac{K^m c}{m!}|x - x_0|^m$$

para cada m y por tanto

$$\sup_{x\in\mathcal{E}_a(x_0)} \|\vec{z}_{m+1}(x) - \vec{z}_m(x)\| \leq \frac{K^m a^m c}{m!}.$$

De aquí se deduce la convergencia uniforme en $\mathcal{E}_a(x_0)$ de la sucesión $(\vec{z}_n)_{n=0}^{\infty}$ a una cierta función continua $\vec{z}:\mathcal{E}_a(x_0)\to B_r(\vec{z}_0)$. Más aún, la convergencia uniforme de las funciones $\vec{z}_m$ y la continuidad uniforme de $\vec{f}$ (recuérdese que toda función continua definida en un compacto es uniformemente continua) implican que (fijo x) las funciones $\vec{f}(t,\vec{z}_m(t))$, restringidas al intervalo de extremos t y t_0, convergen uniformemente a $\vec{f}(t,\vec{z}(t))$. Esto permite tomar límites bajo el signo integral en (A.5) y deducir (A.4) para todo $x\in\mathcal{E}_a(x_0)$, con lo que $\vec{z}(x)$ será solución de (A.3). Finalmente, para demostrar la unicidad, supongamos que $\vec{q}(x)$ es solución de (A.3) en $\mathcal{E}_a(x_0)$, entonces definiendo

$$p \equiv \sup_{t\in\mathcal{E}_a(x_0)} \|\vec{q}(t) - \vec{z}_0(t)\|,$$

encontramos que:

$$\|\vec{q}(x) - \vec{z}_m(x)\| \leq \frac{K^m p}{m!}|x - x_0|^m$$

para todo m y $t\in\mathcal{E}_a(x_0)$ y, en consecuencia, $\vec{q}(x)=\vec{z}(x)$.■

Observación A.0.2. Siguiendo la demostración del teorema anterior, vemos que se puede debilitar la hipótesis de continuidad de $\partial_{z_k}\vec{f}$ sustituyéndola por la condición de Lipschitz (A.8), llegando a un enunciado más potente del teorema A.0.1, ya que hay muchas funciones con derivadas parciales no continuas que, no obstante, verifican la condición de Lipschitz. Si abandonamos la condición de Lipschitz y suponemos tan sólo que $\vec{f}(x,\vec{z})$ es continua en Ω, todavía es posible probar que el problema de valores iniciales (A.1,A.2) tiene solución (*teorema de Peano*), pero no necesariamente única. A título de ejemplo, consideremos el problema

$$y' = 3y^{2/3},\ \ y(0)=0, \tag{A.9}$$

y sea $\Omega=[-1,1]\times[-1,1]$. Aquí $f(x,y)=3y^{2/3}$ es obviamente continua en Ω. Además, $y_1(x)=x^3$ e $y_2(x)=0$ son soluciones diferentes de (A.9) válidas para todo $x\in\Omega$, así que ciertamente el problema de valores iniciales (A.9) admite solución, pero ésta no es única. La explicación de la no unicidad reposa en el hecho de que $\partial_y f(x,y)=2y^{-1/3}$ no es continua en Ω, y tampoco $f(x,y)$ satisface la condición de condición de Lipschitz (A.8) sobre el rectángulo $\Omega=[-1,1]\times[-1,1]$, ya que el cociente de incrementos $\frac{f(0,y)-f(0,0)}{y-0}=3y^{-1/3}$ no es acotado en cualquier entorno del origen.

Apéndice B

Método de los coeficientes indeterminados

Teorema B.0.1. *Dada la EDO lineal con coeficientes constantes* $L(y(x)) = b(x)$ *o* $D\vec{z}(x) = A\vec{z} + \vec{b}(x)$, [1] *supongamos que*

$$b(x) = e^{\beta x}(p(x)\cos(\omega x) + q(x)\,\mathrm{sen}(\omega x)),$$

donde $p(x)$ *y* $q(x)$ *son polinomios de grado a lo sumo* $k \geq 0$. *Sea* $\mu = \beta + i\omega$. *Entonces se tienen las siguientes posibilidades:*

(i) Si μ *NO es raíz del polinomio característico* $L(\lambda) = 0$ *en (2.10), entonces* $L(y) = b(x)$ *tiene una solución particular de la forma* $y_p(x) = e^{\beta x}(r(x)\cos(\omega x) + s(x)\,\mathrm{sen}(\omega x))$, *con* $r(x)$ *y* $s(x)$ *polinomios de grado a lo sumo* k.

(ii) Si μ *es raíz del polinomio característico (2.10) con multiplicidad* m, *entonces* $L(y) = b(x)$ *tiene una solución particular de la forma* $y_p(x) = e^{\beta x}x^m(r(x)\cos(\omega x) + s(x)\,\mathrm{sen}(\omega x))$, *con* $r(x)$ *y* $s(x)$ *polinomios de grado a lo sumo* k.

Demostración: utilizaremos la versión compleja

$$L(\bar{y}) = \bar{y}^{(n)} + a_{n-1}\bar{y}^{(n-1)} + \cdots + a_1\bar{y}' + a_0\bar{y} = e^{\mu x}v(x) = \bar{b}(x), \tag{B.1}$$

de la ecuación real $L(y) = b(x)$, donde $v(x) = p(x) - iq(x)$ es un polinomio de grado menor o igual que k con coeficientes complejos. Demostraremos que existe una solución compleja $\bar{y}_p : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ de (B.1) de la forma $\bar{y}_p(x) = x^m e^{\mu x}w(x)$, donde m es la multiplicidad de μ como solución de

$$\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0 = 0$$

($m = 0$ si μ no es raíz de la ecuación) y $w(x) = r(x) - is(x)$ es un polinomio de grado menor o igual que k con coeficientes complejos. La parte real $y_p(x) \equiv \Re(\bar{y}_p(x)) = e^{\beta x}x^m(r(x)\cos(\omega x) + s(x)\,\mathrm{sen}(\omega x))$ será pues solución de $L(y) = b(x)$ con $b(x) = \Re(\bar{b}(x)) = \Re(e^{\mu x}v(x)) = e^{\beta x}(p(x)\cos(\omega x) + q(x)\,\mathrm{sen}(\omega x))$.

Nótese que la ecuación (B.1) se puede reescribir en términos de la descomposición en producto de monomios $(D - \gamma_j)^{m_j}$, con γ_j una raíz de (2.10) de multiplicidad m_j, de la siguiente forma:

$$(D - \gamma_1)^{m_1}(D - \gamma_2)^{m_2}\ldots(D - \gamma_r)^{m_r}(D - \mu)^m\bar{y} = e^{\mu x}v(x), \tag{B.2}$$

donde admitimos la posibilidad de que μ sea o no sea una raíz, poniendo en este último caso: $m = 0 \Rightarrow (D - \mu)^0 = 1$. Procedamos por partes:

a) Comencemos por el caso $m = 0$, o sea, cuando μ no es raíz de (2.10). Bastará probar que existe un polinomio $w(x)$ de grado $\leq k$ tal que $\bar{y}_p(x) = e^{\mu x}w(x)$ es solución de

$$(D - \gamma_j)\bar{y}(x) = e^{\mu x}\tilde{v}(x) \tag{B.3}$$

para algún polinomio $\tilde{v}(x)$ de grado $\leq k$. En efecto, sustituyendo $\bar{y}_p(x)$ en (B.3)

$$e^{\mu x}\tilde{v}(x) = \bar{y}_p'(x) - \gamma_j\bar{y}_p(x) = e^{\mu x}(w'(x) + \mu w(x) - \gamma_j w(x)) \Rightarrow \tilde{v}(x) = (\mu - \gamma_j)w(x) + w'(x).$$

[1] Cambiamos ligeramente de notación respecto al Capítulo 2 y denotamos por $y(x)$ la variable dependiente y por x la independiente

Poniendo $\tilde{v}(x) = \tilde{v}_0 + \tilde{v}_1 x + \cdots + \tilde{v}_k x^k$ y $w(x) = w_0 + w_1 x + \cdots + w_k x^k$ e igualando coeficientes de igual grado:

$$\begin{aligned} \tilde{v}_0 &= (\mu - \gamma_j) w_0 + w_1, \\ \tilde{v}_1 &= (\mu - \gamma_j) w_1 + 2w_2, \\ &\cdots \\ \tilde{v}_{k-1} &= (\mu - \gamma_j) w_{k-1} + k w_k, \\ \tilde{v}_k &= (\mu - \gamma_j) w_k, \end{aligned}$$

que obviamente tiene solución por ser $\mu \neq \gamma_j$ (μ no es raíz). Procediendo de forma iterada llegamos a que existe $w(x)$ tal que $\bar{y}_p(x) = e^{\mu x} w(x)$ es solución de (B.2) con $m = 0$.

b) Analizamos a continuación el caso en que μ sea una raíz con multiplicidad $m = n \Rightarrow m_j = 0$. Se trata de comprobar que $\bar{y}_p(x) = x^n e^{\mu x} w(x)$ es una solución de $(D - \mu)^n \bar{y} = e^{\mu x} v(x)$ con $w(x)$ un polinomio de grado $\leq k$. De hecho demostraremos bastante más: que para cada $n \geq 1$ y $l \geq 0$ la ecuación

$$(D - \mu)^n \bar{y} = x^l e^{\mu x} v(x) \tag{B.4}$$

tiene una solución de la forma $\bar{y}_p(x) = x^{l+n} e^{\mu x} w(x)$, con $w(x)$ un polinomio de grado $\leq k$. Razonemos por inducción sobre n y supongamos $n = 1$. La función $\bar{y}_p(x) = x^{l+1} e^{\mu x} w(x)$ será solución de $(D - \mu)\bar{y} = x^l e^{\mu x} v(x)$ si y sólo si

$$x^l e^{\mu x} v(x) = \mu x^{l+1} e^{\mu x} w(x) + [(l+1) x^l w(x) + x^{l+1} w'(x)] e^{\mu x} - \mu x^{l+1} e^{\mu x} w(x),$$

o sea,

$$v(x) = (l+1) w(x) + x w'(x),$$

o igualando coeficientes de igual grado

$$\begin{aligned} v_0 &= (l+1) w_0, \\ v_1 &= (l+2) w_1, \\ &\cdots \\ v_{k-1} &= (l+k) w_{k-1}, \\ v_k &= (l+k+1) w_k, \end{aligned}$$

y despejando obtenemos $w_j = v_j/(j + l + 1)$.

Para completar nuestro argumento por inducción supongamos que $\tilde{\bar{y}}_p(x) = x^{l+n} e^{\mu x} \tilde{w}(x)$ es solución de ecuación $(D - \mu)^n \bar{y} = x^l e^{\mu x} v(x)$ para un cierto n y demostremos entonces que $\bar{y}_p(x) = x^{l+n+1} e^{\mu x} w(x)$ es solución de la ecuación $(D - \mu)^{n+1} \bar{y} = x^l e^{\mu x} v(x)$ utilizando que, como ya hemos demostrado, $(D - \mu)\bar{y}_p = x^{l+n} e^{\mu x} \tilde{w}(x)$ para algún polinomio $\tilde{w}(x)$ de grado $\leq k$. En efecto:

$$\begin{aligned} (D - \mu)^{n+1} \bar{y}_p &= (D - \mu)^n [(D - \mu) y_p] \\ &= (D - \mu)^n [\underbrace{x^{l+n} e^{\mu x} \tilde{w}(x)}_{\tilde{\bar{y}}_p}] = x^l e^{\mu x} w(x) \end{aligned}$$

c) Acabamos de demostrar en el apartado b) que $\bar{y}_p(x) = x^m e^{\mu x} w(x)$ es solución de la ecuación

$$(D-\mu)^m \bar{y} = e^{\mu x}\tilde{w}(x) \equiv \tilde{\bar{y}}_p(x),$$

con $\tilde{w}(x)$ un polinomio de grado $\leq k$, y en el apartado a) que, a su vez, $\tilde{\bar{y}}_p(x)$ es solución de

$$(D-\gamma_1)^{m_1}(D-\gamma_2)^{m_2}\ldots(D-\gamma_r)^{m_r}\bar{y} = e^{\mu x}v(x).$$

Por consiguiente, $\bar{y}_p(x) = x^m e^{\mu x} w(x)$ es solución de (B.2).■

Parte V

Biliografía

Bibliografía

Bibliografía básica

[1] Dennis G. Zill, Michael R. Cullen, *Matemáticas Avanzadas para la ingeniería, Vol. 1: Ecuaciones Diferenciales*, Tercera Edición, McGraw-Hill Interamericana (2008). Tiene un volumen aparte con soluciones a los problemas planteados.

[2] William E. Boyce, Richard C. DiPrima, *Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems*, Wiley (2012). Tiene un volumen aparte con soluciones a los problemas planteados.

[3] V. Nikiforov, V. Uvarov, *Special functions of mathematical physics*, Birkhäuser Verlag (1988).

[4] Dennis G. Zill, Michael R. Cullen, *Differential Equations with Boundary-Value Problems*, 7th edition, Brooks/Cole, Cengage Learning (2009)

[5] M. Calixto, *Prácticas de Matemáticas con Mathematica para Ingenieros*. Ed. Morpi 2002. http://hdl.handle.net/10317/1128
Temas: 7, 8, 9, 10 y 13.

[6] M. Calixto, *Modelización Matemática de Sistemas Dinámicos*, Publicaciones de la ETSII (Univ. Politécnica Cartagena) 2007. http://hdl.handle.net/10317/631

[7] M. Calixto, *Ecuaciones Diferenciales y Aplicaciones a la Ingeniería Civil*, Editorial Académica Española (EAE-Publishing) 2012. http://hdl.handle.net/10317/1219

Bibliografía complementaria

[8] M. Abramowitz, I. A. Stegun, Handbook of mathematical functions, Dover, 1975.

[9] L. C. Andrews, Special functions of mathematics for engineers, Oxford Science Publications, 1998.

[10] L. C. Evans, Partial Differential Equations, AMS, 2002.

[11] S. Novo, R. Obaya y J. Rojo, *Ecuaciones y sistemas diferenciales*, McGraw-Hill, Madrid (1995).

[12] V. Jiménez, *Ecuaciones diferenciales*, Universidad de Murcia (1999).

[13] Frank Ayres, *Ecuaciones diferenciales*, McGraw Hill (1991).

[14] G. Simmons & J. Robertson, *Ecuaciones diferenciales con aplicaciones y notas históricas*, McGraw-Hill (1993)

[15] C.H. Edwards & D.E. Penney, *Ecuaciones diferenciales elementales y problemas con condiciones en la frontera*, Prentice-Hall Hispanoamericana (1994).

[16] A. Kiseliov, M. Krasnov, G. Makarenko, *Problemas de ecuaciones diferenciales ordinarias*, Editorial Mir Moscú (1984).