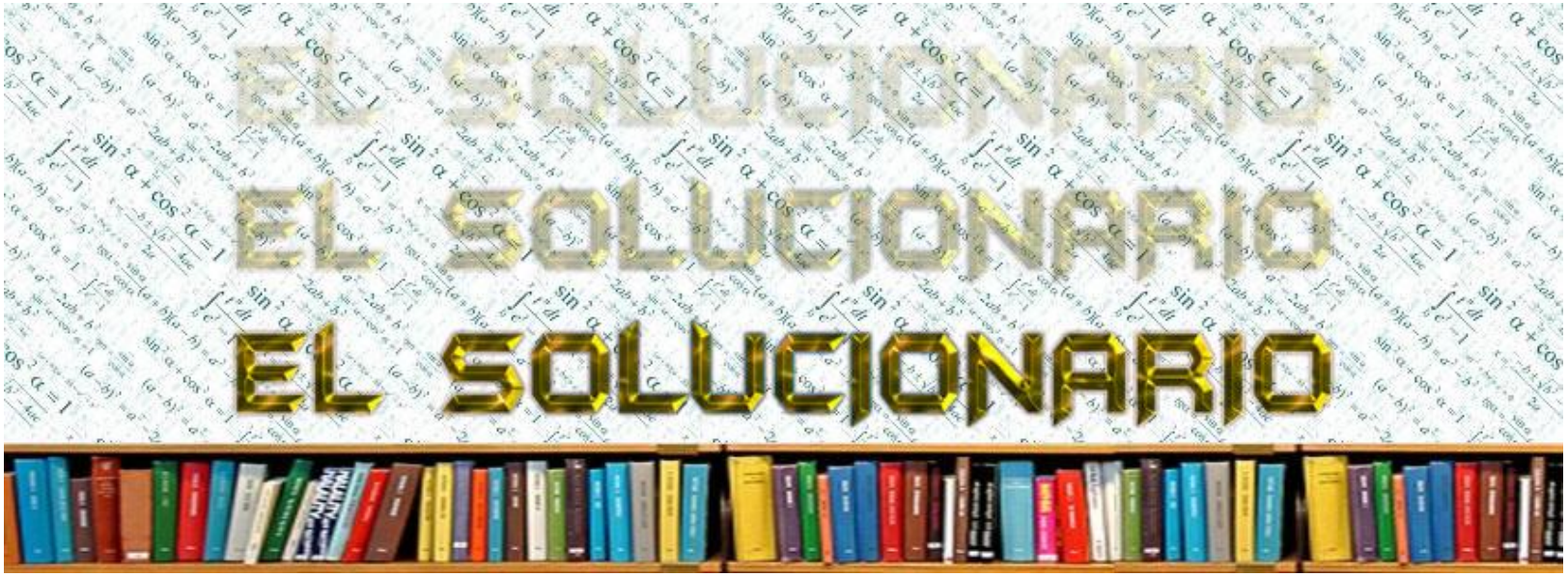
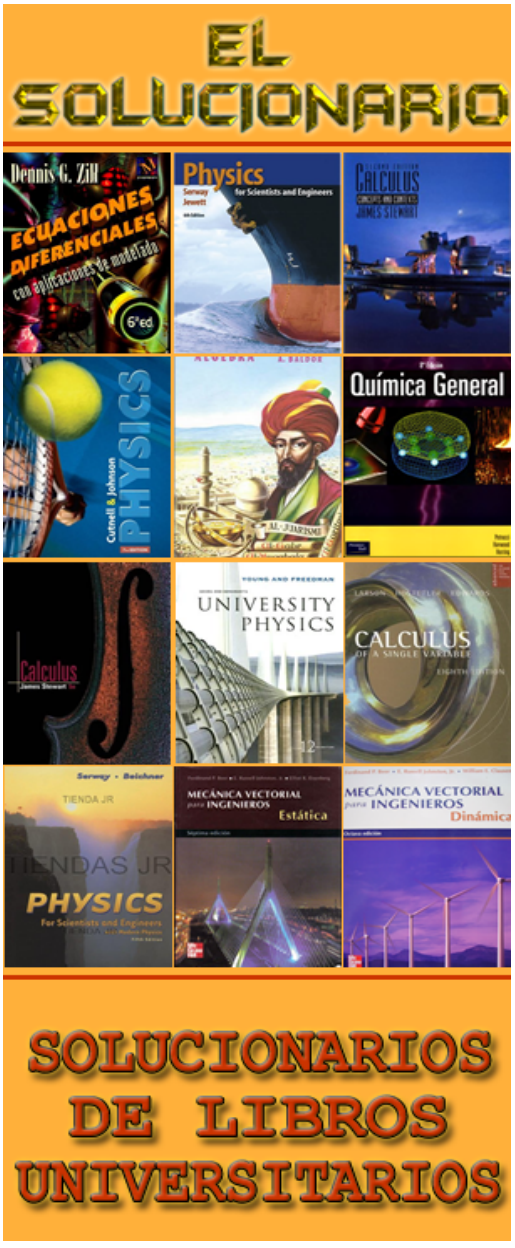


http://www.elsolucionario.blogspot.com



LIBROS UNIVERISTARIOS
Y SOLUCIONARIOS DE
MUCHOS DE ESTOS LIBROS

LOS SOLUCIONARIOS
CONTIENEN TODOS LOS
EJERCICIOS DEL LIBRO
RESUELTOS Y EXPLICADOS
DE FORMA CLARA

VISITANOS PARA
DESARGALOS GRATIS.

Capítulo 1

1. **Exercício 1.1:** Para demonstrar o paralelismo basta construir

$$\begin{aligned} \overline{AB} &= \vec{A} - \vec{B} = -\hat{\imath} - 2\hat{\jmath} + \hat{k} \\ \overline{CD} &= \vec{C} - \vec{D} = 3\hat{\imath} + 6\hat{\jmath} - 3\hat{k} \end{aligned}$$

   e fazer o protudo *vetorial* entre eles. Se forem paralelos mesmo, deverá dar zero.

$$\overline{AB} \times \overline{CD} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ -1 & -2 & 1 \\ 2 & 6 & -3 \end{vmatrix} = 0$$

   para ver que é zero, basta notar que a coluna 2 e a coluna 3 são proporcionais (ou então faz o cálculo na unha).

2. **Exercício 1.2:** Banal. Basta fazer o produto escalar e mostrar que dá zero.

3. **Exercício 1.3:** Banal. Basta mostrar que $\overline{AB} - \vec{C} = 0$, mostrando que os pontos perfazem um triângulo e que o produto escalar de dois deles (a serem verificados) dá zero. Na verdade, é fácil ver que são $\vec{A}$ e $\vec{B}$ que são perpendiculares.

4. **Exercício 1.4:** Temos que

$$\left|\vec{A}\right|^2 = A^2 = B^2 + C^2 - 2BC\cos\theta,$$

   onde θ é o ângulo entre $\vec{B}$ e $\vec{C}$. Geometricamente, temos que $\vec{A}$, $\vec{B}$ e $\vec{C}$ formam um triângulo, que é o conteúdo da fórmula

$$\vec{A} = \vec{B} - \vec{C},$$

   assim, é só desenhar o triângulo e a lei dos cossenos aparece imediatamente.

5. **Exercício 1.5:** Façamos o produto escalar de $\vec{A}$ com $\vec{B}$. Temos que

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = AB\cos(\theta_{AB}) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta,$$

   onde θ_{AB} é o ângulo entre $\vec{A}$ e $\vec{B}$, evidentemente. Este ângulo pode ser imediatamente relacionado com os ângulos α e β, bastando para isso fazer um desenho de $\vec{A}$ e $\vec{B}$ num plano cartesiano. Assim, temos que $\theta_{AB} = \alpha - \beta$ e, portanto,

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta,$$

   como queríamos demonstrar.

6. **Exercício 1.6:** Basta escrever tudo em termos de vetores unitários. Teremos assim, considerando-se

$$\vec{r} = x\hat{\imath} + y\hat{\jmath} + z\hat{k}, \quad \vec{A} = a_x\hat{\imath} + a_y\hat{\jmath} + a_z\hat{k},$$

ficamos com

$$\left(\vec{r} - \vec{A}\right) \cdot \vec{A} = 0$$

implica em

$$(x - a_x)\, a_x + (y - a_y)\, a_y + (z - a_z)\, a_z = 0,$$

ou ainda

$$a_x x + a_y y + a_z z - (a_x^2 + a_y^2 + a_z^2) = 0,$$

que é a equação de um plano.

7. **Exercício 1.7:** Agora, com as mesmas convenções anteriores, ficamos com

$$(x - a_x)\, x + (y - a_y)\, y + (z - a_z)\, z = 0$$

o que fornece

$$x^2 - a_x x + y^2 - a_y y + z^2 - a_z z = 0$$

e que, completando quadrados, obtemos

$$\left(x - \frac{a_x}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{a_y}{2}\right)^2 + \left(z - \frac{a_z}{2}\right)^2 = \frac{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}{4}.$$

Você seria capaz de dizer, sem desenhar, que tipo de esfera é essa? (não!!?, credo!)

8. **Exercício 1.8:** A diagonal principal de um cubo é dada por (se precisar de desenhar, é mal sinal)

$$\vec{d} = a\hat{\imath} + a\hat{\jmath} + a\hat{k},$$

já que todos os lados são iguais. Uma aresta é dada por $\vec{A} = a\hat{\imath}$, por exemplo. Assim, temos $\vec{d} \cdot \vec{A} = a^2$. Dependeria este resultado de qual aresta escolhêssemos?

9. **Exercício 1.9:** Ver exercício 1.4 (lembrando de tomar agora o módulo, pois trata-se de produto vetorial).

10. **Exercício 1.10:** Basta mostrar que este vetor é perpendicular aos vetores $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$, por exemplo. Como estes vetores *formam* o plano, se o vetor em questão é perpendicular a eles, será perpendicular ao plano. Óbvio! Mostrar que o vetor

$$\vec{A} \times \vec{B} + \vec{B} \times \vec{C} + \vec{C} \times \vec{A}$$

é perpendicular tanto a $\overline{AB}$ quanto a $\overline{BC}$ é fácil. Note que

$$\left(\vec{A} - \vec{B}\right) \times \left[\vec{A} \times \vec{B} + \vec{B} \times \vec{C} + \vec{C} \times \vec{A}\right] = 0,$$

de forma banal e óbvia. O mesmo pode ser dito do outro produto.

11. **Exercício 1.11:** Temos
$$\vec{C} = \vec{A} \times \vec{X}$$
ao mesmo tempo que
$$\vec{X} = \frac{\vec{C} \times \vec{A}}{A^2} + k\vec{A},$$
de modo que (substituindo acima)
$$\begin{aligned} \vec{C} &= \vec{A} \times \left[\frac{\vec{C} \times \vec{A}}{A^2} + k\vec{A} \right] = \frac{1}{A^2} \vec{A} \times \left(\vec{C} \times \vec{A} \right) \\ &= \frac{\vec{C} \left(\vec{A} \cdot \vec{A} \right) - \vec{A} \left(\vec{C} \cdot \vec{A} \right)}{A^2} = \vec{C} - \vec{A} \frac{\vec{C} \cdot \vec{A}}{A^2} \end{aligned}$$
Como $\vec{C}$ é perpendicular a $\vec{A}$ (da primeira expressão), temos que $\vec{C} \cdot \vec{A} = 0$ e o resultado se segue.

12. **Exercício 1.12:** óbvio. Se temos o produto triplo igual a zero, então temos que o determinante construído a partir das componentes é nulo. Mas ele é nulo apenas se suas linhas são combinações lineares umas das outras.

13. **Exercício 1.13:** Seja $\varphi(x, y, z) = c$, com c constante. Assim, demos que
$$d\varphi = 0 = \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy + \frac{\partial \varphi}{\partial z} dz = 0$$
Mas isto é semelhante ao produto escalar
$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \hat{\imath} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \hat{\jmath} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \hat{k} \right) \cdot \left(\hat{\imath} dx + \hat{\jmath} dy + \hat{k} dz \right) = 0.$$
Como o vetor $d\vec{s} = \hat{\imath} dx + \hat{\jmath} dy + \hat{k} dz$ é *tangente à superfície*, temos que
$$\nabla \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \hat{\imath} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \hat{\jmath} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \hat{k}$$
tem que ser perpendicular à superfície.

14. **Exercício 1.14:** Temos que $ds = dr\hat{a}_r + rd\theta\hat{a}_\theta + dz\hat{k}$. Isto implica que
$$\frac{\partial s}{\partial r} = 1, \frac{\partial s}{\partial \theta} = r, \frac{\partial s}{\partial z} = 1,$$
de modo que
$$\nabla_{cyl} = \hat{r} \frac{\partial}{\partial r} + \hat{\theta} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \hat{z} \frac{\partial}{\partial z}$$

15. **Exercício 1.15:** Basta escrever $\vec{F} = \vec{F}(r,\theta,z) = f_r(r,\theta,z)\,\hat{r} + f_\theta(r,\theta,z)\,\hat{\theta} + f_z(r,\theta,z)\,\hat{z}$ e lembrar que

$$\vec{F}\cdot\hat{n}\Delta a = f_r r\Delta\theta\Delta z + f_\theta \Delta r\Delta z + f_z r\Delta r\Delta\theta$$

e assim, usando a definição (1.33) do livro, temos

$$div\vec{F} = \nabla\cdot\vec{F} = \lim_{\Delta V\to 0}\frac{1}{r\Delta r\Delta\theta\Delta z}\left\{\frac{\partial}{\partial r}(f_r r)\,\Delta\theta\Delta z\Delta r + \frac{\partial f_\theta}{\partial\theta}\Delta r\Delta\theta\Delta z + \frac{\partial}{\partial z}(r f_z)\,\Delta\theta\Delta r\Delta z\right\},$$

e ficamos com

$$div\vec{F} = \frac{\partial}{\partial r}(f_r r) + \frac{1}{r}\frac{\partial f_\theta}{\partial\theta} + \frac{\partial f_z}{\partial z},$$

que é o resultado desejado.

16. **Exercício 1.16:** aplicação simples.

17. **Exercício 1.17:** Não... claro que não! Assim teremos $\vec{F}\cdot\nabla\times\vec{F} = 0$ e podemos colocar isso em termos da matriz

$$\vec{F}\cdot\begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ f_x & f_y & f_z \end{vmatrix} =$$
$$f_x\left(\frac{\partial f_z}{\partial y} - \frac{\partial f_y}{\partial z}\right) + f_y\left(\frac{\partial f_x}{\partial z} - \frac{\partial f_z}{\partial x}\right) + f_z\left(\frac{\partial f_y}{\partial x} - \frac{\partial f_x}{\partial y}\right).$$

Não há qualquer razão para que este fator dê zero. Para ver isto, tome $f_x = x, f_y = 0$ e $f_z = y$, temos que a expressão anterior fica dada por x, que é diferente de zero.

18. **Exercício 1.18:** Considere a expressão $\nabla^2(\varphi\psi)$ e reescreva-a como $\nabla\cdot\nabla(\varphi\psi)$. Agora, expandindo este gradiente, ficamos com $\nabla\cdot[\varphi\nabla\psi + \psi\nabla\varphi]$ que, novamente expandida, fica

$$\nabla^2(\varphi\psi) = \varphi\nabla^2\psi + \psi\nabla^2\varphi + 2\nabla\varphi\cdot\nabla\psi.$$

19. **Exercício 1.19:** Os dois primeiros eu me recuso, pois são ridiculamente fáceis. O último é fácil também, mas vamos lá: temos que

$$\vec{u}\cdot\nabla = u_x\frac{\partial}{\partial x} + u_y\frac{\partial}{\partial y} + u_z\frac{\partial}{\partial z}$$

e isso, aplicado a $\vec{r} = x\hat{\imath} + y\hat{\jmath} + z\hat{k}$, fornece

$$\begin{aligned}(\vec{u}\cdot\nabla)\,\vec{r} &= \left(u_x\frac{\partial}{\partial x} + u_y\frac{\partial}{\partial y} + u_z\frac{\partial}{\partial z}\right)\left[x\hat{\imath} + y\hat{\jmath} + z\hat{k}\right] \\ &= \hat{\imath}u_x + \hat{\jmath}u_y + \hat{k}u_z = \vec{u},\end{aligned}$$

como desejado.

20. **Exercício 1.20:** Seja $\vec{A}$ um vetor constante. Temos que (1.1.6 da tabela)

$$\nabla\left(\vec{A}\cdot\vec{r}\right)=\left(\vec{A}\cdot\nabla\right)\vec{r}+\vec{A}\times\left(\nabla\times\vec{r}\right)+\left(\vec{r}\cdot\nabla\right)\vec{A}+\vec{r}\times\left(\nabla\times\vec{A}\right).$$

Ora, $\vec{A}$ é constante, de forma que todos os termos que possuem derivadas de $\vec{A}$ são nulos (os últimos dois termos acima). O segundo termo é nulo pelo problema anterior e o primeiro é o próprio $\vec{A}$.

21. **Exercício 1.21:** Farei, por preguiça, apenas o referente ao resultado 1.1.7. Temos que

$$\nabla\cdot\left(\varphi\vec{F}\right)=\left(\nabla\varphi\right)\cdot\vec{F}+\varphi\nabla\cdot\vec{F}.$$

É fácil demais! Escrevam o divergente em coordenadas cartesianas e também a função vetorial $\vec{F}$ nestas mesmas coordenadas. Ficamos com

$$\begin{aligned}\nabla\cdot\left(\varphi\vec{F}\right) &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\varphi F_x\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\varphi F_y\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\varphi F_z\right)\\ &= \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}F_x+\frac{\partial\varphi}{\partial y}F_y+\frac{\partial\varphi}{\partial z}F_z\right)+\varphi\left(\frac{\partial F_x}{\partial x}+\frac{\partial F_y}{\partial y}+\frac{\partial F_z}{\partial z}\right)\\ &= \left(\nabla\varphi\right)\cdot\vec{F}+\varphi\nabla\cdot\vec{F}.\end{aligned}$$

22. **Exercício 1.22:** Ué!... nem sei o que fazer aqui! Se a função f depende apenas de r, podemos escrever o gradiente em coordenadas esféricas e ficamos imediatamente com o resultado.

23. **Exercício 1.23:** Vejam o anterior.

24. **Exercício 1.24:** Temos que

$$\nabla\varphi\left(\xi\right)=\frac{d\varphi}{d\xi}\frac{\partial\xi}{\partial x}+\frac{d\varphi}{d\xi}\frac{\partial\xi}{\partial y}+\frac{d\varphi}{d\xi}\frac{\partial\xi}{\partial z}$$

e, como, $\xi=\vec{A}\cdot\vec{r}$, temos que

$$\frac{\partial\xi}{\partial x}=A_x,\quad \frac{\partial\xi}{\partial y}=A_y,\quad \frac{\partial\xi}{\partial z}=A_z$$

de modo que

$$\nabla\varphi\left(\xi\right)=\frac{d\varphi}{d\xi}A_x+\frac{d\varphi}{d\xi}A_y+\frac{d\varphi}{d\xi}A_z=\vec{A}\frac{d\varphi}{d\xi}.$$

25. **Exercício 1.25:** Façam!

26. **Exercício 1.26:** Farei apenas o 1.2.4. Vou supor, portanto, que já foi provado o item 1.2.2. Temos que provar que

$$\int_V\left(\nabla\cdot\vec{G}+\vec{G}\cdot\nabla\right)\vec{F}dv=\oint_S\vec{F}\left(\vec{G}\cdot\hat{n}\right)da.$$

O mais importante aqui é notar que podemos fazer tudo *componente a componente*, ou seja, decompondo $\vec{F}$. Assim, considere o termo

$$\hat{\imath}\int_V \left(\nabla\cdot\vec{G}+\vec{G}\cdot\nabla\right) f_x dv = \hat{\imath}\int_V \left[f_x\left(\nabla\cdot\vec{G}\right)+\vec{G}\cdot\nabla f_x\right] dv.$$

Note agora que este termo entre colchetes pode ser escrito como

$$\hat{\imath}\int_V \nabla\cdot\left(f_x\vec{G}\right) dv,$$

se usarmos a propriedade 1.1.7, tabela 1.1. Mas aplicando o teorema da divergência sobre este termo, temos que

$$\hat{\imath}\int_V \nabla\cdot\left(f_x\vec{G}\right) dv = \hat{\imath}\oint_S \left(f_x\vec{G}\right)\cdot\hat{n}dv = \hat{\imath}\oint_S f_x\left(\vec{G}\cdot\hat{n}\right) dv.$$

Repetindo isto para cada uma das outras componentes, ficamos com

$$\begin{aligned}\int_V \left(\nabla\cdot\vec{G}+\vec{G}\cdot\nabla\right)\vec{F}dv &= \oint_S \left(\hat{\imath}f_x+\hat{\jmath}f_y+\hat{k}f_z\right)\left(\vec{G}\cdot\hat{n}\right) dv \\ &= \oint_S \vec{F}\left(\vec{G}\cdot\hat{n}\right) da,\end{aligned}$$

como queríamos demonstrar.

(Chapter head:)Capítulo 2:

- **Exercício 2.1:** As duas partículas estão suspensas por fio de comprimentos l a partir de um ponto comum. Suas massas são m e suas cargas são q. Para calcular o ângulo que cada corda faz com a vertical basta notar que devemos ter, decompondo forças sobre cada partícula

$$\begin{aligned} mg - T\cos\theta &= 0 \\ T\sin\theta - \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0\left(2l\sin\theta\right)^2} &= 0 \end{aligned}$$

Assim, $T = mg\sec\theta$ e

$$mg\tan\theta = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0\left(2l\sin\theta\right)^2}$$

de modo que

$$\frac{\sin^3\theta}{\cos\theta} = \frac{q^2}{16\pi\varepsilon_0 mgl^2}$$

ou

$$\frac{\sin^3\theta}{\cos^3\theta}\frac{1}{\sec^2\theta} = \frac{\tan^3\theta}{1+\tan^2\theta} = \frac{q^2}{16\pi\varepsilon_0 mgl^2},$$

que é o resultado desejado. Note que, se $\theta \ll 1$, então poderíamos escrever

$$\theta = \left[\frac{q^2}{16\pi\varepsilon_0 mgl^2}\right]^{1/3}.$$

- **Exercício 2.2:** As cargas são $Q_1 = 2\times 10^{-9}C$ e $Q_2 = -0.5\times 10^{-9}C$. A separação é $r = 4\times 10^{-2}m$. Assim, a força entre elas será

$$\begin{aligned} F &= \frac{Q_1Q_2}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \frac{-1\times 10^{-18}}{4\pi\times 8.854\times 10^{-12}\times 16\times 10^{-4}}N = \\ &= -\frac{10^{-2}}{\pi 566.656} = -0.56\times 10^{-5}N. \end{aligned}$$

Se as esferas são postas em contato, a carga se redistribui de modo que teremos uma carga *líquida* total igual a $Q_T = 1.5\times 10^{-9}C$ e cada esfera ficará com uma carga igual à metade deste valor. Assim, a força ficará

$$\begin{aligned} F &= \frac{Q_1Q_2}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \frac{2.25\times 10^{-18}}{4\pi\times 8.854\times 10^{-12}\times 16\times 10^{-4}}N = \\ &= +1.26\times 10^{-5}N \end{aligned}$$

- **Exercício 2.4:** Temos um fio infinitamente longo, com densidade uniforme de carga λ por unidade de comprimento. A integral para o campo elétrico, para um ponto a uma distância $\vec{r}$ da linha, fica (por simetria temos apenas o campo radial em coordenadas cilíndricas, colocamos o ponto P sobre o plano $z = 0$ por conveniência)

$$\begin{aligned} E_r(r) &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \lim_{L\to\infty} \int_{-L}^{+L} \frac{\lambda}{\left[r^2+z^2\right]^{3/2}} dz = \\ &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \lim_{L\to\infty} \frac{2L}{R^2\sqrt{R^2+L^2}} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \lim_{L\to\infty} \frac{2}{R^2\sqrt{\frac{R^2}{L^2}+1}} = \\ &= \frac{1}{2\pi\varepsilon_0 R^2}, \end{aligned}$$

  que é o resultado procurado.

- **Exercício 2.5:**

  - (a) Temos um disco circular de raio R, com uma densidade superficial de carga σ uniforme. Para determinar o campo elétrico em um ponto P sobre o eixo do disco a uma distância z de seu plano basta colocar

$$\rho(r', \theta', z') = \sigma\delta(z'),$$

    de modo que (em um ponto qualquer (r, θ, z))

$$\begin{aligned} \varphi(z, r, \theta) &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_V \frac{\sigma\delta(z')}{|\vec{r}-\vec{r'}|} r' dr' d\theta' dz' = \\ &= \frac{\sigma}{4\pi\varepsilon_0} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^{2\pi} \int_0^R \frac{r'}{\sqrt{(r-r')^2+(z-z')^2}} dr' d\theta' dz' \end{aligned}$$

    No ponto $(0, 0, z)$ ficamos com

$$\varphi(z, r, \theta) = \frac{\sigma}{4\varepsilon_0} \int_0^R \frac{2r'}{\sqrt{r'^2+z^2}} dr' = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \left[\sqrt{R^2+z^2} - z\right].$$

    Para encontrar o campo, basta notar que, por simetria, só devemos ter o campo na direção z, de modo que

$$\vec{E} = -\hat{z}\frac{\partial\varphi}{\partial z} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \left[1 - \frac{z}{\sqrt{R^2+z^2}}\right] \hat{z}.$$

  - Agora temos um cilindro circular reto de raio R e altura L, orientado ao longo do eixo z. Sua densidade volumétrica de carga é $\rho(z') = \rho_0 + \beta z'$ em relação à origem no centro do cilindro. Para achar a força sobre uma carga puntiforme q

no centro do cilindro, basta encontrar o potencial na origem, depois o campo $\vec{E}$ e finalmente a força, por simples multiplicação. Assim, o potencial fica

$$\begin{aligned}\varphi(0,0,z) &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{-L/2}^{+L/2}\int_0^{2\pi}\int_0^R \frac{\rho_0+\beta z'}{\sqrt{r'^2+(z-z')^2}} r'dr'd\theta'dz' = \\ &= \frac{1}{2\varepsilon_0}\int_{-L/2}^{+L/2}(\rho_0+\beta z')\left[\sqrt{R^2+(z-z')^2}-(z-z')\right]dz'\end{aligned}$$

Fazendo, portanto

$$\vec{E} = E_z|_{z=0}\,\hat{z} = \frac{\beta}{2\varepsilon_0}\left[\frac{L}{2}\left(\frac{L}{2}-\sqrt{R^2+\frac{L^2}{4}}\right)+R^2\sinh^{-1}\left(\frac{L}{2R}\right)\right],$$

que é o resultado desejado (lembre-se da expressão do sinh em termos de logaritmos.

- **Exercício 2.6:** Temos uma casca esférica *fina*, condutora, de raio R que está *uniformemente carregada* com uma carga total Q. Assim, esta casca esférica possui uma densidade superficial de carga $\sigma = Q/4\pi R^2$. A integral que fornece o potencial num ponto arbitrário no interior ou no exterior da casca fica dada por

$$\begin{aligned}\varphi(z_0) &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{\infty}\frac{\sigma\delta(r'-R)}{\left[r'^2+z_0^2-2r'z_0\cos\theta'\right]^{1/2}}r'^2\sin\theta'd\theta'd\phi' = \\ &= \frac{Q}{8\pi\varepsilon_0}\int_0^{\pi}\frac{\sin\theta}{\left[R^2+z_0^2-2Rz_0\cos\theta\right]^{1/2}}d\theta = \\ &= \frac{Q}{8\pi\varepsilon_0}\frac{|R+z_0|-|R-z_0|}{Rz_0}.\end{aligned}$$

Agora, por simetria, trocamos z_0 por r, já que colocar o ponto P sobre o eixo z foi um expediente matemático apenas. Ficamos, portanto, com o resultado

$$\varphi = \frac{Q}{8\pi\varepsilon_0}\frac{|R+r|-|R-r|}{Rr}.$$

Se o ponto está no interior, temos $r < R$ e ficamos com

$$\varphi(r) = \frac{Q}{8\pi\varepsilon_0}\frac{R+r-(R-r)}{Rr} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R}.$$

Se o ponto está no exterior, temos $r > R$ e ficamos com

$$\varphi(r) = \frac{Q}{8\pi\varepsilon_0}\frac{R+r+(R-r)}{Rr} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r}.$$

Note que, em $r = R$ o potencial é *contínuo*.

- **Exercício 2.7:** Temos $-q$ em $(0,0,0)$ e $+q/2$ em $(a,0,0)$. Para encontrar em que ponto *do eixo* x o campo elétrico se anula, basta fazer

$$\frac{-q}{4\pi\varepsilon_0 x^2} + \frac{q/2}{4\pi\varepsilon_0 (x-a)^2} = 0$$

para obter

$$x_{nulo} = \left(2 \pm \sqrt{2}\right) a.$$

Para fazer um gráfico da superfície equipotencial que passa pelo ponto x_{nulo} basta saber, inicialmente, que o potencial neste ponto é dado por

$$\begin{aligned} \phi(x_{nulo}) &= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 a}\left[\frac{-1}{\left(2-\sqrt{2}\right)} + \frac{1}{2\left(1-\sqrt{2}\right)}\right] = \\ &= 2.914213562\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 a}. \end{aligned}$$

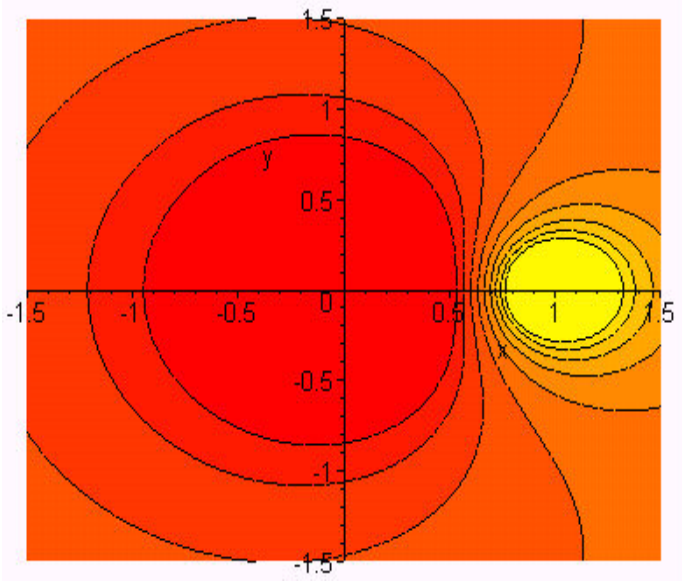
Assim, em unidades de $q/(4\pi\varepsilon_0 a)$ devemos ter

$$\phi(x, y, z=0) = \frac{-1}{\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{1}{2\sqrt{(x-a)^2+y^2}} = 2.914213562.$$

A curva no plano xy que satisfaz esta equação é a curva de potencial desejada. O problema a seguir dá as curvas gerais de potencial associadas ao presente exemplo. As curvas equipotenciais gerais podem ser plotadas usando-se o comando "contourplot(subs(a=1,f), x=-1.5..1.5 ,y=-1.5..1.5,grid=[50,50], thickness=1, filled=true, contours=[-0.8,-0.6,-0.4,-0.2,0.0,0.2,0.4,0.6,0.8]);" do Maple onde

$$f = \frac{-1}{\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{1}{2\sqrt{(x-a)^2+y^2}}.$$

O resultado é o gráfico a seguir.



Veja o exemplo a seguir.

- **Exercício 2.8:** Para obter as curvas equipotenciais para as quais temos $\phi = 0$, basta fazer

$$\frac{-1}{\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{1}{2\sqrt{(x-a)^2+y^2}} = 0$$

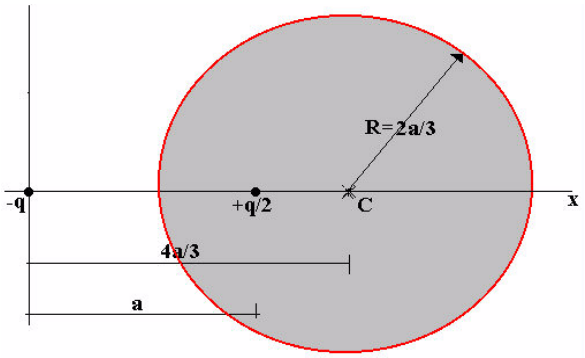
cujas soluções são

$$9y^2 + 9x^2 - 24xa + 12a^2 = 0$$

que pode ser reescrita como

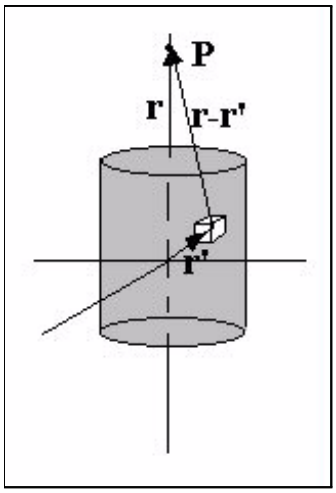
$$y^2 + \left(x - \frac{4}{3}a\right)^2 = \left(\frac{2}{3}a\right)^2,$$

que é uma circunferência de raio $2a/3$ centrada em $x = 4a/3$ (veja o exemplo anterior). Note que, neste caso, teríamos uma configuração do tipo mostrado abaixo, onde apresentamos as posições das cargas e a posição da esfera (aqui apresentada apenas no plano xy)



Considere agora o problema de se determinar o potencial de uma configuração de cargas em que temos apenas uma carga puntiforme $-q$ na origem e uma esfera *metálica* numa configuração exatamente como mostrada na figura anterior (sem a carga $q/2$) — considere que se trata de determinar o potencial *fora* da esfera. Como o potencial sobre a esfera deve ser nulo, visto que é uma esfera metálica, então este problema *é exatamente o mesmo* de se encontrar o potencial para as duas cargas puntiformes (por razões de unicidade de soluções da equação de Laplace, que veremos mais adiante). Assim, poderíamos *retirar* a esfera e obter a solução para o campo *usando apenas as duas cargas puntiformes*, simplificando enormemente os cálculos.

- **Exercício 2.9:** Temos a situação mostrada na figura abaixo: (o raio do cilindro é R e o comprimento é L)



a integral que dá o potencial fica, dado que $\vec{r} = z_0\hat{z}$,

$$\begin{aligned}
\varphi(\vec{r}) &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^L\int_0^{2\pi}\int_0^R \frac{\rho}{\sqrt{r^2+(z-z_0)^2}} r\,dr\,d\theta\,dz = \\
&= \frac{2\pi\rho}{4\pi\varepsilon_0}\int_{-L/2}^{L/2}\left[\sqrt{(z-z_0)^2+R^2}-\sqrt{(z-z_0)^2}\right]dz = \\
&= \frac{\rho}{4\varepsilon_0}\left\{-2z_0L-\left(z_0-\frac{L}{2}\right)\sqrt{R^2+\left(z_0-\frac{L}{2}\right)^2}+\right. \\
&\quad +\left(z_0+\frac{L}{2}\right)\sqrt{R^2+\left(z_0+\frac{L}{2}\right)^2}+ \\
&\quad \left.+\frac{R^2}{2}\ln\left[\frac{-z_0+\frac{L}{2}+\sqrt{R^2+\left(z_0-\frac{L}{2}\right)^2}}{-z_0-\frac{L}{2}+\sqrt{R^2+\left(z_0+\frac{L}{2}\right)^2}}\right]\right\},
\end{aligned}$$

que é o resultado desejado.

- **Exercício 2.10:** O campo está na direção x em toda a extensão do espaço. Suponha que ele depende da variável y, por exemplo. Então numa pequena região do espaço, teremos $E_x(x,y,z) \neq E'_x(x,y+\Delta y,z)$ (suponha a região suficientemente pequena para que o campo seja essencialmente contínuo e constante no intervalo $[y, y+\Delta y]$). Mas então, construindo um pequeno circuito quadrado com vértice nos pontos y e $y+\Delta y$, além de x e $x+\Delta x$, podemos calcular a integral *fechada*

$$\varphi = \oint_C \vec{E}\cdot d\vec{r} = \int_x^{x+\Delta x} E_x dx - \int_{x+\Delta x}^{x} E'_x dx = (E_x - E'_x)\,\Delta x \neq 0,$$

o que é uma contradição, pois sabemos que $\vec{E} = -\nabla\varphi$, de modo que a integral fechada tem que se anular *para qualquer circuito que consideremos*. A contradição veio do fato de termos considerado $E_x(x, y, z) \neq E'_x(x, y + \Delta y, z)$, logo eles devem ser iguais. Daqui é fácil concluir que devem ser iguais para quaisquer dois pontos (x, y, z) e (x, y', z), valendo o mesmo raciocínio para a direção z. Isto estabelece o resultado.

- **Exercício 2.12:** Basta considerar a superfície de Gauss que envolve a *superfície interna* da cavidade e a carga na origem, primeiramente, para concluir que a carga induzida ali é $+q$. Então, construa uma nova superfície de Gauss que englobe apenas as superfície interna e *externa* da esfera. Neste caso, como não há carga (real) envolvida, devemos ter uma carga $-q$ na superfície externa.

- **Exercício 2.14:** Temos duas placas condutoras infinitas separadas por uma distância d e com uma densidade superfícial de carga homogênea σ e $-\sigma$. O campo produzido fica (lembre-se que, ao escolher um ponto no interior da região delimitada pelas placas, só será possível para a superfície de Gauss que passa pelo ponto escolhido englobar *uma* das placas, mas não ambas — a superfície pode ser um paralelepípedo)

$$\vec{E}_{dentro} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\hat{z}.$$

  Num ponto no exterior das placas, teremos uma superfície englobando *todas as duas placas*, fazendo com que o campo num ponto qualquer na região fora dos planos se anule, ou seja,

$$\vec{E}_{fora} = 0.$$

- **Exercício 2.15:** Temos uma distribuição esférica de carga que só é função de r. Como fica o campo para esta distribuição? A distribuição é: $\rho(r) = A/r$, com A constante para $0 \leq r \leq R$ e $A = 0$ para $r > R$. Podemos usar a lei de Gauss. Se o ponto estiver *fora* da esfera, então podemos obter a carga total que uma superfície de Gauss que passa pelo ponto onde estamos calculando o campo engloba como sendo a carga total da esfera. Esta carga é dada calculando-se

$$Q_T = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{R} \frac{A}{r'} r'^2 \sin\theta dr' d\theta' d\phi' = 2\pi A R^2.$$

  Agora o campo pode ser calculado pela integral

$$\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} E_r r^2 \sin\theta d\theta d\phi = \frac{2\pi A R^2}{\varepsilon_0}$$

  ou seja,

$$E_r = \frac{AR^2}{2\varepsilon_0 r^2}$$

O potencial fica dado por

$$\varphi = -\int_r^\infty E_r dr = \frac{AR^2}{2\varepsilon_0 r}.$$

Se o ponto está *dentro* da esfera, então teremos que a carga englobada pela superfície de Gauss que passa pelo ponto em consideração é dada por

$$Q_T = \int_0^r \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \frac{Ar'^2}{r'} \sin\theta dr' d\theta' d\phi' = 2\pi A r^2$$

de modo que

$$\int_0^\pi \int_0^{2\pi} E_r r^2 \sin\theta d\theta d\phi = \frac{2\pi A r^2}{\varepsilon_0},$$

ou seja,

$$E_r = \frac{A}{2\varepsilon_0}.$$

Assim, o potencial fica

$$\varphi = -\int_{r_0}^r \frac{A}{2\varepsilon_0} dr = -\frac{Ar}{2\varepsilon_0} + C(r_0)$$

Mas note que, pela solução anterior, $\varphi(R) = AR/2\varepsilon_0$ sobre a esfera. Assim, para que haja continuidade do potencial (que deve existir, já que o campo é uma derivada do potencial e se o potencial fosse descontínuo, o campo teria um salto infinito no ponto) devemos colocar

$$C = \frac{AR}{\varepsilon_0}.$$

Desta forma, o potencial fica

$$\varphi(r) = \frac{A}{\varepsilon_0}\left(R - \frac{r}{2}\right),$$

que é o resultado desejado.

- **Exercício 2.16:** Uma barra longa circular de raio R contém uma densidade uniforme de carga ρ. Para calcular o campo elétrico para o caso (a) $r > R$ podemos usar a lei de Gauss para obter

$$2\pi r L E_r = \frac{\rho\pi R^2 L}{\varepsilon_0}$$

de modo que

$$E_r = \frac{\rho R^2}{2\varepsilon_0 r}$$

(note que $\rho\pi R^2$ é a densidade 'linear' de carga λ de modo que E_r é, essencialmente, $E_r = \lambda/(2\pi\varepsilon_0 r)$, como já encontrado). Se temos (b) $r < R$, então podemos usar

novamente a lei de Gauss, mas observando que a quantidade de carga envolvida pela superfície de Gauss é dada por

$$Q = \rho\pi r^2 L,$$

de modo que

$$2\pi r L E_r = \frac{\rho\pi r^2 L}{\varepsilon_0}$$

dando

$$E_r = \frac{\rho}{2\varepsilon_0} r.$$

- **Exercício 2.18:** Para calcular o rotacional e o divergente de $\vec{r}/r^a$ podemos usar as identidades vetoriais na seguinte forma

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \left(\frac{\vec{r}}{r^a}\right) &= \frac{1}{r^a}\nabla\cdot\vec{r} + \vec{r}\cdot\nabla\frac{1}{r^a} = \frac{3}{r^a} - \frac{a}{r^{a-1}}\tilde{r}\cdot\vec{r} = \frac{3-a}{r^a} \\ \nabla \times \left(\frac{\vec{r}}{r^a}\right) &= \frac{1}{r^a}\nabla\times\vec{r} - \nabla\left(\frac{1}{r^a}\right)\times\vec{r} = 0 - \frac{a}{r^{a-1}}\tilde{r}\times\vec{r} = 0 \end{aligned}$$

Para encontrar a densidade de carga que produziria o campo

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{r}}{r^a},$$

basta notar que devemos ter, pela lei de Gauss

$$\nabla\cdot\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0},$$

de modo que

$$\rho = \varepsilon_0\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\nabla\cdot\left(\frac{\vec{r}}{r^a}\right) = \frac{q}{4\pi}\frac{3-a}{r^a}.$$

O potencial do campo é obtido calculando-se a integral

$$\varphi = -\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\int^r r^{1-a}dr = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\,(a-2)\,r^{a-2}}.$$

- **Exercício 2.18:** Se temos o caso em que o campo de Coulomb é dado por

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^{3-\delta}}\vec{r},$$

então temos, pelo exercício anterior, que $a = 3-\delta$ e a densidade é dada por

$$\rho = \frac{q\delta}{4\pi r^{3-\delta}}.$$

A carga total (essencialmente $\nabla \cdot \vec{E}$) num volume R fica dada por

$$Q_T = 4\pi \int_0^R \frac{q\delta}{4\pi r^{3-\delta}} r^2 dr = q\delta \int_0^R r^{\delta-1} dr = \frac{q}{r^\delta}\Big|_0^R$$

que diverge para $r = 0$, ou seja, diverge sobre a carga. Note que se $\delta = 0$, então não haveria problema.

- **Exercício 2.19:** O potencial de Coulomb atenuado é dado por

$$\varphi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{e^{-r/\lambda}}{r}.$$

Desta maneira, o campo elétrico associado fica

$$\vec{E} = \hat{r} E_r = -\hat{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} = \frac{q e^{-r/\lambda}}{4\pi\varepsilon_0} \left[\frac{\vec{r}}{r^3} + \frac{\vec{r}}{\lambda r^2} \right] = \frac{q e^{-r/\lambda}}{4\pi\varepsilon_0} \left(1 + \frac{r}{\lambda} \right) \frac{\vec{r}}{r^3},$$

que é o resultado desejado. Para obter a densidade de carga, basta tomar o divergente do resultado acima

$$\begin{aligned}
\frac{\rho(r)}{\varepsilon_0} &= \nabla \cdot \vec{E} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \nabla \cdot \left[e^{-r/\lambda} \left(1 + \frac{r}{\lambda} \right) \frac{\vec{r}}{r^3} \right] = \\
&= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \left\{ \hat{r} \frac{\partial}{\partial r} \cdot \left[e^{-r/\lambda} \left(\frac{1}{r^3} + \frac{1}{\lambda r^2} \right) \vec{r} \right] \right\} = \\
&= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \left\{ \vec{r} \cdot \hat{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[e^{-r/\lambda} \left(\frac{1}{r^3} + \frac{1}{\lambda r^2} \right) \right] + \left[e^{-r/\lambda} \left(\frac{1}{r^3} + \frac{1}{\lambda r^2} \right) \right] \nabla \cdot \vec{r} \right\} = \\
&= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \left[4\pi\delta(\vec{r}) e^{-r/\lambda} - r \frac{e^{-r/\lambda} \left(r^2 + 3\lambda r + 3\lambda^2 \right)}{\lambda^2 r^4} + 3 \frac{e^{-r/\lambda} (\lambda + r)}{\lambda r^3} \right] = \\
&= \frac{q e^{-r/\lambda}}{4\pi\varepsilon_0} \left[4\pi\delta(\vec{r}) - \frac{1}{\lambda^2 r} \right]
\end{aligned}$$

Assim, temos

$$\rho(\vec{r}) = q e^{-r/\lambda} \left[\delta(\vec{r}) - \frac{e^{-r/\lambda}}{4\pi\lambda^2 r} \right],$$

como desejado. Note que a distribuição $\delta(\vec{r})$ de Dirac apareceu devido a termos calculado, em certo momento, o divergente $\nabla \cdot (\vec{r}/r^3)$, como já visto no texto.

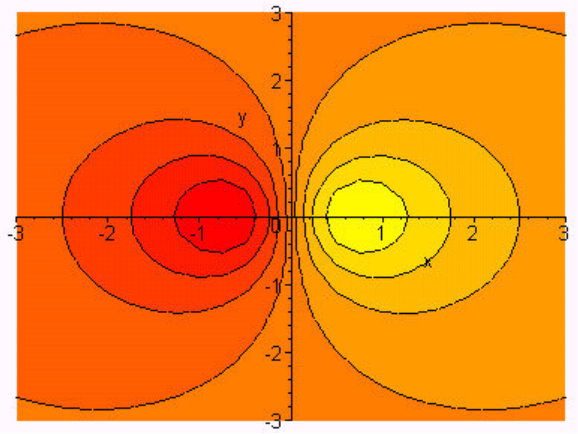
- **Exercício 2.20:** Para obter as curvas equipotenciais, basta notar que o potencial é dado pela fórmula

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{r^3}.$$

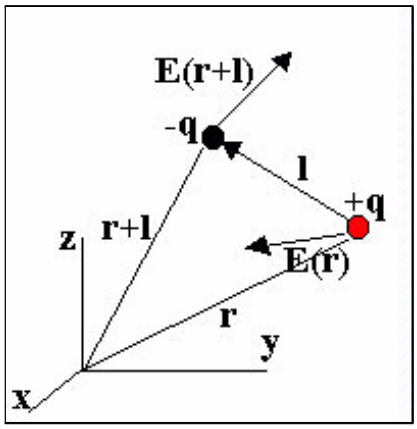
Colcando o dipolo na direção x temos, em coordenadas polares (e em unidades de $4\pi\varepsilon_0 p$)

$$\varphi = \frac{x}{\left[x^2+y^2+z^2\right]^{3/2}}$$

e podemos traçar o gráfico facilmente. (Colocamos $z = 1$ para evitar a singularidade em $(0,0,0)$ por questões do traçador do gráfico). Ficamos com a figura abaixo



- **Exercício 2.21:**
  - (a) Demonstre que a força que atua num dipolo $\vec{p}$ colocado em um campo elétrico externo $\vec{E}_{ext}$ é $\vec{p}\cdot\nabla\vec{E}_{ext}$. Considere a figura abaixo:



Através da figura, podemos concluir que a força que atua sobre o dipolo é dada por

$$\vec{F} = +q\vec{E}_{ext}\left(\vec{r}\right) - q\vec{E}_{ext}\left(\vec{r}+\vec{l}\right).$$

Agora, $\vec{l} \ll \vec{R}$, de modo que podemos fazer uma expansão no segundo termo, em torno de $\vec{l}$, para obter

$$\vec{F} = q\vec{E}_{ext}\left(\vec{r}\right) - q\left[\vec{E}_{ext}\left(\vec{r}\right) + \vec{l}\cdot\nabla\vec{E}_{ext}\left(\vec{r}\right)\right] = -q\vec{l}\cdot\nabla\vec{E}_{ext}\left(\vec{r}\right)$$

que pode ser escrita como (o sinal deve-se à deifnição particular do dipolo)

$$\vec{F} = -\vec{p}\cdot\nabla\vec{E}_{ext}\left(\vec{r}\right).$$

[Nota: o leitor deve fazer a expansão contida mais acima para verificar aquele resultado explicitamente.]

– (b) Mostrar que o torque atuante num dipolo neste campo é dado por

$$\vec{\tau} = \vec{r}\times\left[\vec{p}\cdot\nabla\vec{E}_{ext}\right] + \vec{p}\times\vec{E}_{ext}.$$

Neste caso, devemos ter

$$\begin{aligned}
\vec{\tau} &= \vec{r}\times q\vec{E}_{ext}\left(\vec{r}\right) - \left(\vec{r}+\vec{l}\right)\times q\vec{E}_{ext}\left(\vec{r}+\vec{l}\right) = \\
&= \vec{r}\times q\vec{E}_{ext}\left(\vec{r}\right) - \vec{r}\times q\left[\vec{E}_{ext}\left(\vec{r}\right) + \vec{l}\cdot\nabla\vec{E}_{ext}\left(\vec{r}\right)\right] - \vec{l}\times q\left[\vec{E}_{ext}\left(\vec{r}\right) + \vec{l}\cdot\nabla\vec{E}_{ext}\left(\vec{r}\right)\right] = \\
&= -\vec{r}\times\left[q\vec{l}\cdot\nabla\vec{E}_{ext}\left(\vec{r}\right)\right] - \vec{l}\times q\vec{E}_{ext} - \vec{l}\times q\vec{l}\cdot\nabla\vec{E}_{ext}\left(\vec{r}\right).
\end{aligned}$$

Como o último termo é de segunda ordem em $\vec{l}$, podemos escrever, em primeira ordem,

$$\vec{\tau} = -\left\{\vec{r}\times\left[\vec{p}\cdot\nabla\vec{E}_{ext}\left(\vec{r}\right)\right] + \vec{p}\times\vec{E}_{ext}\left(\vec{r}\right)\right\},$$

que é o resultado desejado (a menos do sinal por razões já aludidas).

– **Exercício 2.22:** Para a conformação citada: $+q$ em $(0,0,-l)$ e $(0,0,+l)$ e $-2q$ em $(0,0,0)$, podemos escrever o potencial como

$$\varphi = \frac{q/4\pi\varepsilon_0}{\sqrt{x^2+y^2+(z+l)^2}} + \frac{q/4\pi\varepsilon_0}{\sqrt{x^2+y^2+(z-l)^2}} - \frac{2q/4\pi\varepsilon_0}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

que pode ser reescrita como

$$\begin{aligned}
\varphi\left(x,y,z\right) &= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left\{\cancel{\frac{1}{\sqrt{r^2+2zl+l^2}}} + \cancel{\frac{1}{\sqrt{r^2-2zl+l^2}}} - \frac{2}{r}\right\} = \\
&= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}\left\{\frac{1}{\sqrt{1+\frac{2zl+l^2}{r^2}}} + \frac{1}{\sqrt{1+\frac{-2zl+l^2}{r^2}}} - 2\right\} = \\
&= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}\left[-\frac{1}{r^2} + \frac{3z^2}{r^4}\right]l^2 + O\left(l^3\right).
\end{aligned}$$

Colocando agora $z = r\cos\theta$, ficamos com (até segunda ordem em l)

$$\varphi(r,\theta,\phi) = \frac{ql^2}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\left(3\cos^2\theta - 1\right).$$

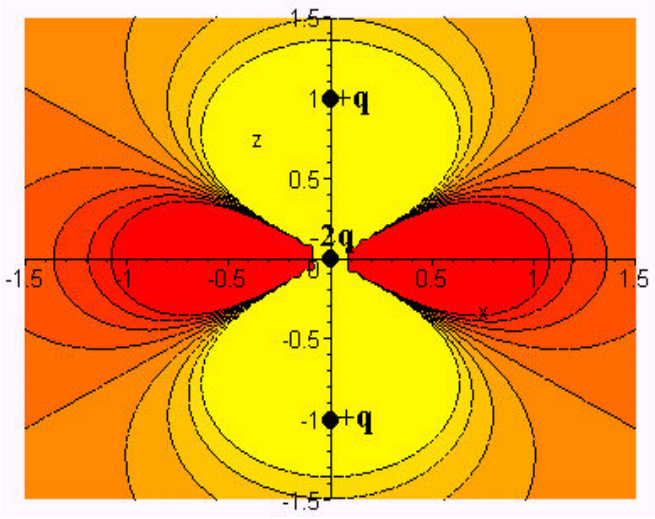
Para traçar as superfícies equipotenciais, podemos escrever o potencial como

$$\frac{4\pi\varepsilon_0\varphi(x,y,z)}{ql^2} = \frac{3z^2}{\left[x^2+y^2+z^2\right]^{5/2}} - \frac{1}{\left[x^2+y^2+z^2\right]^{3/2}}.$$

No plano xz ficamos com $y = 0$ e

$$\varphi' = \frac{4\pi\varepsilon_0\varphi(x,y,z)}{ql^2} = \frac{3z^2}{\left[x^2+z^2\right]^{5/2}} - \frac{1}{\left[x^2+z^2\right]^{3/2}}$$

O gráfico das equipotenciais pode ser feito da mesma maneira que foi feito no exercício 2.7 e fica



- **Exercício 2.23:** Para obter a expressão para as *componentes* do tensor de quadrupolo, basta usar a expressão geral

$$\varphi = \frac{1}{2}\sum_{i,j}\frac{x_i x_j}{r^5}Q_{ij},$$

onde

$$Q_{ij} = \int\int\int \left(3x'_i x'_j - \delta_{ij}r'^2\right)\rho(\vec{r}')\,dx'dy'dz'$$

e notar que $\rho(r') = \delta(x')\,\delta(y')\left[q\delta(z'-l) + q\delta(z'+l) - 2q\delta(z')\right]$, dando

$$\begin{aligned} Q_{11} &= \int\int\int \left(2x'^2 - y'^2 - z'^2\right)\delta(x')\,\delta(y')\left[q\delta(z'-l) + q\delta(z'+l) - 2q\delta(z')\right]dx'dy'dz' = \\ &= -q\int z'^2\left[\delta(z'-l) + \delta(z'+l) - 2\delta(z')\right]dx'dy'dz' = -2ql^2 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} Q_{22} &= \int\int\int \left(2y'^2 - x'^2 - z'^2\right) \delta(x')\,\delta(y')\left[q\delta(z'-l) + q\delta(z'+l) - 2q\delta(z')\right] dx'dy'dz' = \\ &= -q\int z'^2\left[\delta(z'-l) + \delta(z'+l) - 2\delta(z')\right] dx'dy'dz' = -2ql^2 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} Q_{33} &= \int\int\int \left(2z'^2 - y'^2 - x'^2\right) \delta(x')\,\delta(y')\left[q\delta(z'-l) + q\delta(z'+l) - 2q\delta(z')\right] dx'dy'dz' = \\ &= -2q\int z'^2\left[\delta(z'-l) + \delta(z'+l) - 2\delta(z')\right] dx'dy'dz' = -4ql^2 \end{aligned}$$

Para calcular os termos cruzados, basta notar que o termo $3x'_j x'_i$ sempre dará um produto de z com x ou y ou um produto de x com y; devido às funções $\delta(x')$ e $\delta(y')$ o resultado da integral será sempre nulo. O termo δ_{ij} será sempre nulo devido ao delta de Kroenecker. Assim, todos os elementos fora da diagonal se anularão. O tensor quadrupolo elétrico para esta configuração fica

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} 2ql^2.$$

- **Exercício 2.24:** A expressão para o momento de dipolo é

$$\vec{p} = \int \vec{r}'\rho(\vec{r}')\,dv',$$

mas se temos um dipolo, então a densidade de carga fica

$$\rho(\vec{r}') = q\delta\left(\vec{r}' - \frac{\vec{l}}{2}\right) - q\delta\left(\vec{r}' + \frac{\vec{l}}{2}\right),$$

de modo que

$$\begin{aligned} \vec{p} &= q\int \vec{r}'\left[\delta\left(\vec{r}' - \frac{\vec{l}}{2}\right) - \delta\left(\vec{r}' + \frac{\vec{l}}{2}\right)\right] dv' = \\ &= q\frac{\vec{l}}{2} - \left(-q\frac{\vec{l}}{2}\right) = q\vec{l}, \end{aligned}$$

como queríamos demonstrar.

- **Exercício 2.26:** O potencial é dado por

$$\varphi(r,\theta,\phi) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{p}\cdot\vec{r}}{r^3} = \frac{p\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

de modo que o campo, usando a expressão para o gradiente em coordenadas esféricas como sendo

$$\nabla = \hat{r}\frac{\partial}{\partial r} + \hat{\theta}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta} + \hat{\phi}\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\phi},$$

ficamos com

$$\begin{aligned}\vec{E} &= -\nabla\varphi = \frac{-1}{4\pi\varepsilon_0}\left[-\hat{r}\frac{p\cos\theta}{r^3} + \frac{1}{r}\frac{p\sin\theta}{r^2}\hat{\theta}\right] = \\ &= \frac{p}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\left[\hat{r}\cos\theta - \hat{\theta}\sin\theta\right],\end{aligned}$$

que é o resultado desejado. Note ainda que

$$\hat{z} = \hat{r}\cos\theta - \hat{\theta}\sin\theta,$$

de modo que

$$\vec{E} = \frac{p}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\hat{z}.$$

(Chapter head:)Capítulo 3:

- **Exercício 3.1:** Temos que o potencial associado ao problema, dada a simetria, deve poder ser escrito como

$$\varphi = \frac{A}{r} + B$$

onde A e B são as constantes a serem determinadas. (a) Para os pontos *internos*, temos: para que as determinemos, basta usar as condições de contorno, dadas por

$$\begin{aligned} \varphi(r_a) &= \varphi_a \\ \varphi(r_b) &= \varphi_b \end{aligned}$$

para obter o sistema

$$\begin{cases} \frac{A}{r_a} + B = \varphi_a \\ \frac{A}{r_b} + B = \varphi_b \end{cases}$$

cujas soluções são

$$A = \frac{r_b r_a (\varphi_a - \varphi_b)}{r_b - r_a} \text{ e } B = \frac{\varphi_b r_b - \varphi_a r_a}{r_b - r_a},$$

de modo que nosso potencial fica

$$\varphi(r) = \frac{r_b r_a (\varphi_a - \varphi_b)}{r_b - r_a}\frac{1}{r} + \frac{\varphi_b r_b - \varphi_a r_a}{r_b - r_a}$$

que é o resultado desejado. (b) Para os pontos *externos* temos simplesmente (lembre-se do efeito da blindagem)

$$\varphi(r) = \frac{r_b \varphi_b}{r}.$$

- **Exercício 3.2:** Agora a distribuição é cilíndrica. A idéia é a mesma do exercício anterior, mudando apenas a forma particular do potencial, que escrevemos

$$\varphi = A \ln r + B.$$

As condições de contorno implicam que (a) para pontos internos:

$$\begin{cases} \varphi_a = A \ln r_a + B \\ \varphi_b = A \ln r_b + B \end{cases},$$

de modo que

$$A = \frac{\varphi_b - \varphi_a}{\ln(r_b/r_a)} \text{ e } B = \frac{\ln(r_b^{\varphi_a}/r_a^{\varphi_b})}{\ln(r_b/r_a)},$$

e, portanto,

$$\varphi(r) = \frac{\varphi_b - \varphi_a}{\ln(r_b/r_a)} \ln r + \frac{\ln(r_b^{\varphi_a}/r_a^{\varphi_b})}{\ln(r_b/r_a)}.$$

(b) Para pontos externos, teremos, como anteriormente

$$\varphi(r) = \frac{\varphi_b}{\ln r_b} \ln r.$$

- **Exercícios 3.3:** Sabemos que $\varphi_1(x,y,z)$ é uma solução da equação de Laplace. Assim, temos

$$\nabla^2\varphi_1(x,y,z) = 0.$$

Derivando ambos os lados da equação com relação a qualquer variável e um número qualquer de vezes, ficamos com

$$\frac{\partial^n}{\partial x_1 \partial x_2 \cdots \partial x_n}\left[\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi_1}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi_1}{\partial z^2}\right] = 0.$$

Como podemos inverter as ordens de derivação, ficamos com

$$\frac{\partial^2\varphi_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi_2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi_2}{\partial z^2} = 0,$$

onde

$$\varphi_2 = \frac{\partial^n\varphi_1}{\partial x_1 \partial x_2 \cdots \partial x_n}.$$

- **Exercício 3.4:** Sabemos que φ satisfaz a equação de Laplace em toda a região V_0. Para provar que o valor de φ em um ponto qualquer o é a média de seus valores numa superfície de qualquer esfera centrada em o que se situa inteiramente em V_0, ou seja,

$$\varphi(o) = \frac{1}{4\pi R^2}\oint_S \varphi da,$$

podemos seguir a sugestão do livro e colocar $\psi = 1/r$ na equação (1-57) para obter

$$\int_V \left(\frac{1}{r}\nabla^2\varphi - \varphi\nabla^2\frac{1}{r}\right)dv = \oint_S \left(\frac{1}{R}\nabla\varphi - \varphi\nabla\frac{1}{R}\right)\cdot\hat{n}da.$$

Note agora que $\nabla^2\varphi = 0$ e que $\nabla^2(1/r) = -4\pi\delta(\vec{r})$, de modo que ficamos com

$$4\pi\varphi(o) = \oint_S \left(\frac{1}{R}\nabla\varphi - \varphi\nabla\frac{1}{R}\right)\cdot\hat{n}da.$$

O segundo termo fornece $\nabla(1/R) = -\vec{R}/R^3$ e como $\hat{n}$ é radial, pois a superfície é uma esfera, ficamos com $\nabla(1/R) = \vec{R}\cdot\hat{n}/R^3 = -1/R^2$. Nosso resultado fica

$$4\pi\varphi(o) = \frac{1}{R^2}\oint_S \varphi da + \oint_S \frac{1}{R}\nabla\varphi\cdot\hat{n}da.$$

Para provar que a última integral é nula, devemos nos lembrar que estamos numa região *livre de fontes de cargas*, pois a equação de Laplace vale. Também devemos nos lembrar que $\vec{E} = -\nabla\varphi$ e que

$$\frac{1}{R}\oint_S \nabla\varphi\cdot\hat{n}da = -\frac{1}{R}\oint_S \vec{E}\cdot\hat{n}da = -\frac{q}{R\varepsilon_0},$$

com $q = 0$. Assim, ficamos com

$$4\pi\varphi(o) = \frac{1}{R^2}\oint_S \varphi da$$

ou seja

$$\varphi(o) = \frac{1}{4\pi R^2}\oint_S \varphi da$$

que é o resultado desejado.

- **Exercício 3.5:** Para expandir a função

$$F(u) = \left(1 - 2xy + u^2\right)^{-1/2}$$

basta usar a série de Taylor usual:

$$\begin{aligned} F(u) &= F(0) + \frac{1}{1!}\left.\frac{\partial F(u)}{\partial u}\right|_{u=0} u^1 + \frac{1}{2!}\left.\frac{\partial^2 F(u)}{\partial u^2}\right|_{u=0} u^2 + o\left(u^3\right) = \\ &= 1 + xu + \left(\frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}\right)u^2 + \left(\frac{5}{2}x^3 - \frac{3}{2}x\right)u^3 + o\left(u^4\right). \end{aligned}$$

Se colocarmos em função de uma soma e notarmos que os termos em x são os polinômios de Legendre, teremos

$$F(u) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)\, u^n,$$

como queríamos demonstrar.

- **Exercício 3.6:** Para demonstrar que a metade dos harmônicos zonais são gerados através da derivação sucessiva de r^{-1} em relação à coordenada retangular z ($z = r\cos\theta$), podemos fazer:

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{1}{r^2}\frac{\partial r}{\partial z} = -r^{-2}\cos\theta = r^{-2}P_1(\theta)$$

e também

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2}\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{r^2}\frac{\partial r}{\partial z}\right) = 2r^{-3}\left(\frac{\partial r}{\partial z}\right)^2 - \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 r}{\partial z^2} = 2r^{-3}\cos^2(\theta)\ldots$$

- **Exercício 3.7:** Sabemos que

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

e que $x = r\cos\theta$ e $y = r\sin\theta$. Assim, temos, por inversão:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \text{ e } \theta = \arctan(y/x)$$

de modo que

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x} &= \frac{\partial r}{\partial x}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial \theta}{\partial x}\frac{\partial}{\partial \theta} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\frac{\partial}{\partial r} - \frac{y}{x^2+y^2}\frac{\partial}{\partial \theta} = \cos\theta\frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial}{\partial \theta} \\
\frac{\partial}{\partial y} &= \frac{\partial r}{\partial y}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial \theta}{\partial y}\frac{\partial}{\partial \theta} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{x}{x^2+y^2}\frac{\partial}{\partial \theta} = \sin\theta\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos\theta}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}
\end{aligned}$$

Para obter as derivadas de segunda ordem, fazemos

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2}{\partial x^2} &= \left(\cos\theta\frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}\right)\left(\cos\theta\frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}\right) = \\
&= \cos^2\theta\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{\cos\theta\sin\theta}{r^2}\frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{\sin^2\theta}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\sin^2\theta}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\cos\theta\sin\theta}{r^2}\frac{\partial}{\partial \theta}
\end{aligned}$$

e também

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2}{\partial y^2} &= \left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos\theta}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}\right)\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos\theta}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}\right) = \\
&= \sin^2\theta\frac{\partial^2}{\partial r^2} - \frac{\cos\theta\sin\theta}{r^2}\frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{\cos^2\theta}{r}\frac{\partial^2}{\partial r} + \frac{\cos^2\theta}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} - \frac{\cos\theta\sin\theta}{r^2}\frac{\partial}{\partial \theta}
\end{aligned}$$

que somados dão

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} = \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2},$$

que é o resultado desejado.

- **Exercício 3.8:** No exercício 2.22, capítulo 2, obtivemos que

$$\varphi(r,\theta,\phi) = \frac{(2ql^2)}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\left(\frac{3}{2}\cos^2\theta - \frac{1}{2}\right)$$

e como $P_2(\theta) = \left(\frac{3}{2}\cos^2\theta - \frac{1}{2}\right)$, fica estabelecido o resultado.

- **Exercício 3.9:** Temos um dipolo pontual localizado no centro de uma casca esférica condutora conectada à terra (potencial nulo). Para determinar o potencial no interior da casca, podemos usar os harmônicos zonais que são finitos na origem ($r = 0$), já que devemos ter solução bem comportada aí, exceto pelo fato de termos um dipolo pontual na origem e a divergência dever ser do tipo associado a esta distribuição de carga. Assim, nosso potencial fica dado por

$$\varphi(r,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty}\left[A_n r^n + B_n r^{-(n+1)}\right]P_n(\theta),$$

e a idéia é obter as constantes A_n e B_n das condições de contorno do problema. Estas condições de contorno podem ser facilmente dadas sabendo-se que para r muito pequenos, deveremos ter o potencial praticamente igual àquele de um dipolo pontual, já que é um dipolo pontual que se encontra na origem. Assim, sabendo-se que o potencial do dipolo pontual é dado por

$$\varphi_{dip} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{p\cos\theta}{r^2},$$

fica claro que (lembre-se que na origem os termos em A_n se cancelam) devemos anular todos os coeficientes B_n para $n \neq 1$, já que dão divergência distinta da que esperamos para a distribuição de carga em questão. Mais ainda, $B_1 = p$, evidentemente. Agora, sabendo-se que a esfera está aterrada, então sabemos que em $r = a$ (raio da esfera), devemos ter $\varphi(a,\theta) = 0$ (que é a outra condição de contorno do problema). Levando na expressão para o φ dada acima, temos

$$\varphi(a,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n a^n P_n(\theta) + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{p\cos\theta}{a^2} = 0.$$

Note que o termo em $n = 0$ é um termo constante e não faz diferença na análise de um *potencial*. Assim, nossa análise fica dada por

$$\varphi(a,\theta) = \left(A_1 a + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{p}{a^2}\right)\cos\theta + \sum_{n=2}^{\infty} A_n a^n P_n(\theta) = 0,$$

onde já isolamos o primeiro termo em $\cos\theta$. Agora note que os harmônicos zonais $P_n(\theta)$ são *linearmente independentes*. Assim, podemos anular o primeiro termo colocando

$$A_1 = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{p}{a^3},$$

mas os outros termos só poderão ser anulados se colocarmos $A_n = 0$ se $n \geq 2$. Assim, nosso potencial fica completamente determinado e é dado por

$$\varphi(r,\theta) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(1 - \frac{r^3}{a^3}\right)\frac{p\cos\theta}{r^2},$$

que é o resultado desejado.

- **Exercício 3.10:** Já encontramos o potencial de uma esfera condutora não carregada, situada num campo elétrico inicialmente uniforme. O potencial é dado por

$$\begin{aligned}\varphi(r,\theta) &= -\left(1 - \frac{a^3}{r^3}\right)E_0 r\cos\theta = \\ &= -E_0 r\cos\theta + \frac{E_0 a^3 r\cos\theta}{r^3}\end{aligned}$$

O primeiro termo é o termo de campo constante, enquanto que o segundo é dado por

$$\varphi^*(r,\theta) = \frac{\left(E_0 a^3 \hat{k}\right)\cdot\vec{r}}{r^3}.$$

A comparação deste termo com o potencial devido a um dipolo pontual, dado por

$$\varphi_{dip}(r,\theta) = \frac{\vec{p}\cdot\vec{r}}{4\pi\varepsilon_0 r^3}$$

mostra que $\varphi^*(r,\theta)$ representa um potencial de dipolo pontual na origem com momento de dipolo elétrico dado por

$$\vec{p} = 4\pi\varepsilon_0 a^3 E_0 \hat{k}.$$

O potencial $\varphi^*(r,\theta)$ é o potencial devido à esfera, já que a parte de campo constante já foi retirada e não há outras fontes para o potencial.

- **Exercício 3.11:** A esfera tem raio a e possui uma carga Q e está num campo elétrico inicialmente uniforme. Este problema é similar ao que foi resolvido no corpo do livro, havendo apenas a alteração de que, agora, a esfera condutora possui uma carga líquida. A simetria é esférica (devido às condições de contorno) e o pontencial pode ser escrito como

$$\begin{aligned}\varphi(r,\theta) &= \sum_{n=0}^{\infty}\left[A_n r^n + B_n r^{-(n+1)}\right]P_n(\cos\theta) = \\ &= A_0 + A_1 r\cos\theta + \sum_{n=2}^{\infty} A_n r^n P_n(\cos\theta) + \\ &\quad + \frac{B_1}{r} + \frac{B_2}{r^2}\cos\theta + \sum_{n=2}^{\infty}\frac{B_n}{r^{n+1}}P_n(\cos\theta).\end{aligned}$$

A condição de contorno no infinito diz que $\varphi(\infty,\theta) = -E_0 r\cos\theta$, de modo que devemos anular todos os termos do tipo r^k com $k \geq 2$. Além disso, $A_1 = -E_0$. Ficamos então com

$$\varphi(r,\theta) = A_0 - E_0 r\cos\theta + \frac{B_1}{r} + \frac{B_2}{r^2}\cos\theta + \sum_{n=2}^{\infty}\frac{B_n}{r^{n+1}}P_n(\cos\theta).$$

Note agora que a esfera está carregada, de modo que o termo B_1/r não pode se anular e, ainda por cima, deve dar o resultado $B_1 = Q/4\pi\varepsilon_0$, já que sobre a superfície da esfera devemos ter um potencial

$$\varphi(a,\theta) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 a}.$$

Assim, a condição de contorno sobre a superfície da esfera fica ($A_0 = 0$)

$$\varphi(a,\theta) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 a} + \left(\frac{B_2}{a^2} - E_0 a\right)\cos\theta + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{B_n}{a^{n+1}} P_n(\cos\theta) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 a},$$

ou seja

$$\left(\frac{B_2}{a^2} - E_0 a\right)\cos\theta + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{B_n}{a^{n+1}} P_n(\cos\theta) = 0,$$

para *qualquer* θ. Como os polinômios de Legendre são linearmente independentes, devemos ter que cada coeficiente de $P_n(\cos\theta)$ acima (incluindo o $\cos\theta = P_1(\cos\theta)$) deve anular-se. Assim, ficamos com

$$B_2 = E_0 a^3 \text{ e } B_n = 0 \text{ se } n \geq 2.$$

O potencial fica, portanto,

$$\varphi(a,\theta) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r} + \left(\frac{E_0 a^3}{r^2} - E_0 r\right)\cos\theta$$

que nada mais é do que o potencial para uma esfera *descarregada* num campo elétrico uniforme (resultado obtido no corpo do texto) adicionada ao potencial de uma esfera carregada com centro na origem (lembre-se que vale a superposição para as soluções da equação de Laplace).

- **Exercício 3.12:** Agora temos um condutor cilíndrico descarregado, metálico, na presença de um campo elétrico inicialmente constante. O eixo z deve ser colocado *na direção do eixo do cilindro* e o potencial no infinito fica dado por $\varphi(\infty,\theta) = -E_0 r\cos\theta$, como anteriormente (mas em coordenadas cilíndricas, ou seja, o r aqui tem significado distinto do r em coordenadas esféricas, assim como o θ). A condição de contorno sobre a superfície do cilindro pode ser escrita como $\varphi(a,\theta) = 0$. O potencial é uma solução geral da equação de Laplace em coordenadas cilíndricas (onde temos simetria planar que nos possibilitou eliminar os termos $\partial^2/\partial z^2$ do laplaciano) e é dado por

$$\varphi(r,\theta) = A_0 + B_0 \ln r + \sum_{n=1}^{\infty} \left[A_n r^{-n} + B_n r^n\right]\left[C_n\cos(n\theta) + D_n\sin(n\theta)\right].$$

O termo em A_0 é uma constante inessencial, de modo que $A_0 = 0$ sem perda de generalidade. O cilindro não é carregado, de modo que $B_0 = 0$. Além disso, a condição de contorno em $r \to \infty$ implica que $B_n = 0$ se $n \geq 2$. Ficamos, portanto, até aqui, com o potencial

$$\varphi(r,\theta) = B_1' r\cos\theta + B_1'' r\sin\theta + \sum_{n=1}^{\infty} r^{-n}\left[C_n'\cos(n\theta) + D_n'\sin(n\theta)\right],$$

onde já 'assimilamos' a constante A_n em C'_n e D'_n. Note agora que a condição de contorno no infinito nos compromete em colocar o eixo x na direção do campo elétrico constante, ou seja, estivemos supondo até aqui que $\vec{E} = E_0\hat{x}$. Com esta simetria, não esperamos que o potencial possa se alterar quando fazemos $\theta \to -\theta$. Deste modo, devemos eliminar os termos em $\sin\theta$ da expressão acima para obter

$$\varphi(r,\theta) = B'_1 r\cos\theta + \sum_{n=1}^{\infty} C'_n r^{-n}\cos(n\theta).$$

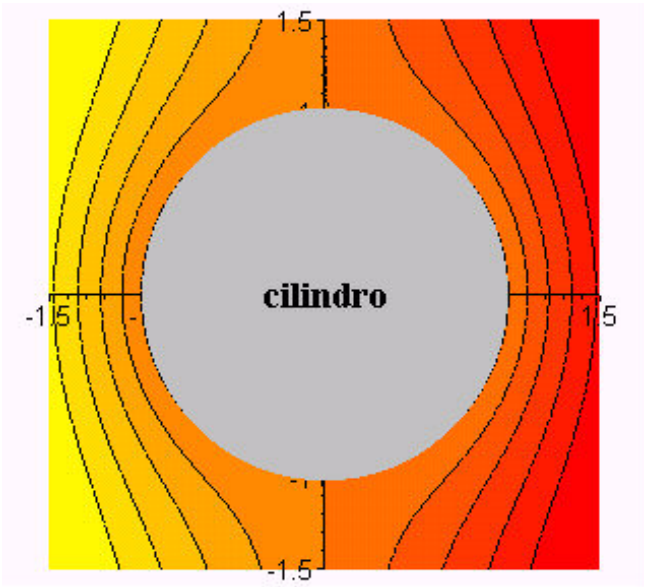
Assim, com $r \to \infty$ ficamos apenas com o primeiro termo e concluimos facilmente que $B'_1 = -E_0$. Agora, para a condição de contorno sobre o cilindro, temos

$$\varphi(r,\theta) = \left(-E_0 a + \frac{C'_1}{a}\right)\cos\theta + \sum_{n=2}^{\infty} C'_n a^{-n}\cos(n\theta) = 0.$$

Como as funções $\cos\theta$ são linearmente independentes, ficamos com $C'_n = 0$ se $n \geq 2$ e $C'_1 = E_0 a^2$. O resultado final para o potencial fica

$$\varphi(r,\theta) = -E_0\left(r - \frac{a^2}{r}\right)\cos\theta.$$

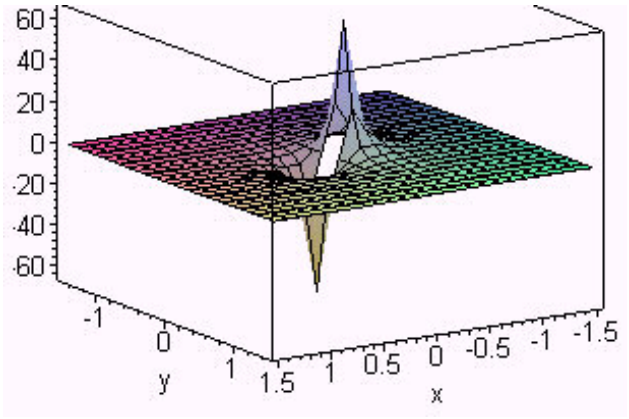
As curvas de potencial ficam como mostrado na figura abaixo ($a = 1$)



A densidade superficial de carga fica dada por

$$\sigma(\theta) = -E_0\left(1 + \frac{a^2}{r^2}\right)\cos\theta$$

O gráfico da distribuição de cargas fica dado pela figura a seguir:



note que, sobre o eixo x, temos uma distribuição de cargas negativas para $x > 0$ e positivas para $x < 0$, como esperado.

- **Exercício 3.13:** O potencial é

$$\varphi(r,\theta) = Ar^{1/2}\sin\frac{\theta}{2} = \mathrm{Im}\left\{A\sqrt{z}\right\}.$$

Em coordenadas cilíndricas, temos

$$\frac{\partial\varphi}{\partial r} = \frac{1}{2\sqrt{r}}\sin\frac{\theta}{2} \text{ e } \frac{\partial\varphi}{\partial\theta} = \frac{\sqrt{r}}{2}\cos\frac{\theta}{2}$$

de modo que

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2} = -\frac{1}{4r^{3/2}}\sin\frac{\theta}{2} \text{ e } \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\theta^2} = -\frac{1}{4r^{3/2}}\sin\frac{\theta}{2}$$

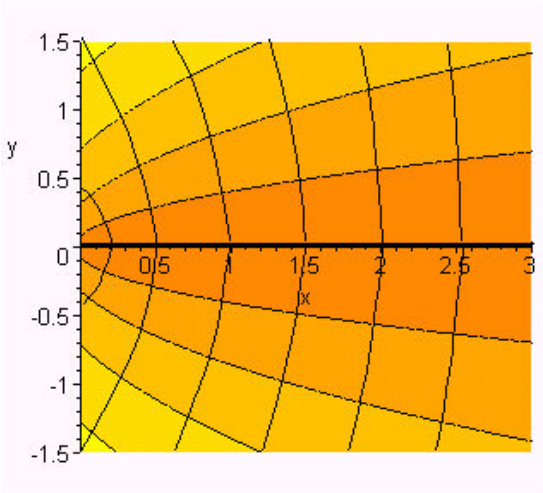
e, portanto,

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\theta^2} = -\frac{1}{4r^{3/2}}\sin\frac{\theta}{2} + \frac{1}{r}\frac{1}{2\sqrt{r}}\sin\frac{\theta}{2} - \frac{1}{4r^{3/2}}\sin\frac{\theta}{2} = 0.$$

Diz-se que este potencial pode ser usado para descrever o problema de um plano carregado condutor em xz (ou seja, $y = 0$). Este potencial é descontínuo em $\theta = 0$, pois a função *não retorna a seus valores de antes se damos uma volta completa no plano* $\theta \to \theta + 2\pi$. A função acima, $\sqrt{z}$ é uma função *multivalorada* e, para tornar-se univalorada, devemos construir para ela uma *superfície de Riemann* de duas folhas. A densidade de carga sobre o plano fica dada por

$$\begin{aligned}
\left.\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right|_{y=0} &= \frac{1}{2\sqrt{r}}\frac{\partial r}{\partial y}\sin\frac{\theta}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{r}\cos\frac{\theta}{2}\frac{\partial\theta}{\partial y} = \\
&= \frac{y}{2r}\sin\frac{\theta}{2} + \frac{x}{2r}\cos\frac{\theta}{2} = \\
&= \frac{1}{2}\left(\sin\theta\sin\frac{\theta}{2} + \cos\theta\cos\frac{\theta}{2}\right) = \frac{1}{2}\cos\left(\theta - \frac{\theta}{2}\right) = \frac{1}{2}\cos\frac{\theta}{2}.
\end{aligned}$$

O gráfico das curvas equipotenciais fica



onde podemos notar o encurvamento das equipotenciais, indicando que o campo, perto da borda do plano (representado pela linha preta cheia) tenderá a divergir 'para fora', representando os efeitos de borda.

- **Exercício 3.14:** Pelo método das imagens, temos que o potencial fica dado por

$$\varphi(x,y,z) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{\sqrt{(x-d)^2+y^2+z^2}} - \frac{1}{\sqrt{(x+d)^2+y^2+z^2}}\right]$$

de modo que a densidade superficial de carga fica dada por (o plano está em yz)

$$\sigma(0,y,z) = -\varepsilon_0 \left.\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right|_{x=0} = -\frac{dq}{2\pi}\frac{1}{\left[d^2+y^2+z^2\right]^{3/2}}$$

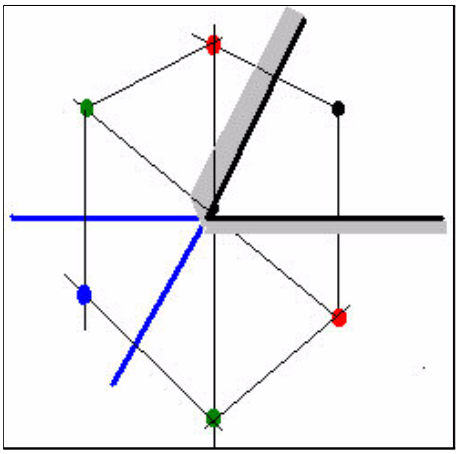
e a carga total induzida fica

$$\begin{aligned}\sigma_{total} &= \frac{-dq}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\left[d^2+y^2+z^2\right]^{3/2}}dzdy = \\ &= \frac{-dq}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{2}{d^2+z^2}dz = -q,\end{aligned}$$

como esperado.

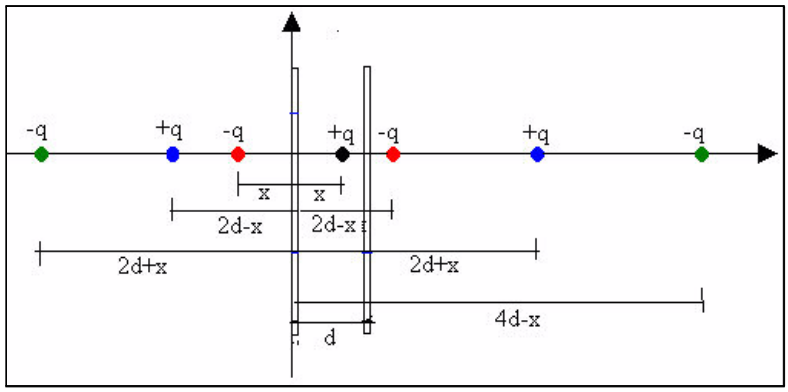
- **Exercício 3.15:** Temos as cargas puntiformes q_1 e q_2 localizadas próximas a um plano condutor descarregado ($\varphi = 0$). As cargas imagens serão $-q_1$ e $-q_2$ localizadas especularmente a q_1 e q_2, respectivamente. É óbvio, portanto, que devemos sempre escolher, numa distribuição $\rho(\vec{r})$ contínua, a distribuição $-\rho(\vec{r})$, especularmente posicionada com relação ao plano condutor.

- **Exercício 3.16:** A posição dos planos é dada pela figura abaixo, bem como a posição das cargas pontuais.



As posições das cargas também estão mostradas e são os reflexos especulares das mesmas com relação aos planos. Formam um hexagono, pois a carga inicial (real), forma duas imagens especulares (vermelhas) que, por sua vez, formam duas imagens especulares (verdes) que formam a mesma imagem especular (azul), dando o hexagono da figura anterior.

- **Exercício 3.17:** Temos uma situação como a mostrada na figura a seguir:



e a força fica

$$\begin{aligned} F &= \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0}\left[-\frac{1}{(2d-2x)^2}-\frac{1}{(2x)^2}+\frac{1}{(2d)^2}+\frac{1}{(2d)^2}-\frac{1}{(2d+2x)^2}-\frac{1}{(4d-2x)^2}+\frac{1}{(4d)^2}\cdots\right]= \\ &= \frac{q^2}{16\pi\varepsilon_0 d^2}\left[\frac{1}{u^2}+2-\frac{1}{(1-u)^2}-\frac{1}{(1+u)^2}-\frac{1}{(2-u)^2}+\frac{1}{2}\right] \\ &= \frac{q^2}{16\pi\varepsilon_0 d^2}\left\{\frac{1}{u^2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{2}{n^2}-\left(\frac{1}{(n+u)^2}+\frac{1}{(n-u)^2}\right)\right]\right\} \end{aligned}$$

onde $u = x/d$. A diferença para o resultado do livro deve-se aos pontos onde foram colocados os planos.

- **Exercício 3.18:** Para encontrar a força entre a carga puntiforme e a esfera carregada, podemos considerar o problema equivalente pelo método das imagens, segundo o qual há apenas duas cargas puntiformes. Uma de valor q, situada a uma distância d da origem e uma segunda de carga $q' = -aq/d$ situada a uma distância $b = a^2/d$ da origem, onde a é o raio da esfera. Assim, a força entre elas fica dada por

$$F_{qq'} = \frac{qq'}{4\pi\varepsilon_0\left(d-a^2/d\right)^2} = \frac{-aq^2}{4\pi\varepsilon_0\left(d^2-a^2\right)^2}.$$

- **Exercício 3.19:** Temos uma esfera condutora na presença de um campo elétrico uniforme na direção z. Este campo pode ser representado pelo campo de duas cargas puntuais Q e $-Q$ situadas sobre o eixo z em $z = -L$ e $z = +L$, com $L \to \infty$. O potencial desta configuração é

$$\begin{aligned} \varphi_{ext}(x,y,z) &= \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+(z+L)^2}}-\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+(z-L)^2}}\right]= \\ &= \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{\sqrt{r^2+2rL\cos\theta+L^2}}-\frac{1}{\sqrt{r^2-2rL\cos\theta+L^2}}\right]= \\ &= \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 L}\left[\frac{1}{\sqrt{1+2\frac{r}{L}\cos\theta+\frac{r^2}{L^2}}}-\frac{1}{\sqrt{1-2\frac{r}{L}\cos\theta+\frac{r^2}{L^2}}}\right]= \\ &= \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 L}\left[\left(1-\frac{r}{L}\cos\theta-\frac{r^2}{2L^2}\right)-\left(1+\frac{r}{L}\cos\theta-\frac{r^2}{2L^2}\right)\right]= \\ &= \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 L}\frac{2r\cos\theta}{L} = \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 L^2}r\cos\theta. \end{aligned}$$

De forma que se colocarmos $E_0 = Q/2\pi\varepsilon_0 L^2$, temos para $L \to \infty$, em primeira ordem, que

$$\varphi_{ext}(r,\theta) = -E_0 r\cos\theta.$$

Agora temos uma configuração na qual temos uma esfera condutora não carregada na presença de duas cargas Q e $-Q$ da forma assinalada acima. Pelo método das imagens, podemos desconsiderar a esfera e substituí-la pelas cargas imagens

$$Q' = -\frac{a}{L}Q \text{ e } Q'' = \frac{-a}{L}(-Q) = \frac{aQ}{L},$$

para cargas positivas e negativas, respectivamente, nas posições

$$b' = -\frac{a^2}{L} \text{ e } b'' = \frac{a^2}{L}.$$

O problema se torna um problema de quatro cargas puntuais nas posições indicadas de modo que o potencial fica dado por (o primeiro termo vem das cargas no infinito, ou seja, já fizemos $L \to \infty$ neles, o segundo termo é devido às cargas nas posições b' e b)

$$\begin{aligned}
\varphi &= -E_0 r\cos\theta + \frac{-Q'}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+(z-b')^2}} - \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+(z-b'')^2}}\right] = \\
&= -E_0 r\cos\theta + \frac{-Q'}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{\sqrt{r^2-2rb'\cos\theta+b'^2}} - \frac{1}{\sqrt{r^2-2rb''\cos\theta+b''^2}}\right].
\end{aligned}$$

Note agora que se temos $L \to \infty$, então são os termos em r que são 'grandes' com relação a b' e b'' (estes últimos vão para zero com $L \to \infty$). Assim, ficamos com

$$\begin{aligned}
\varphi(r,\theta) &= -E_0 r\cos\theta + \frac{-Q'}{4\pi\varepsilon_0 r}\left[\frac{1}{\sqrt{1-2\frac{b'}{r}\cos\theta+\frac{b'^2}{r^2}}} - \frac{1}{\sqrt{1-2\frac{b''}{r}\cos\theta+\frac{b''^2}{r^2}}}\right] = \\
&= -E_0 r\cos\theta + \frac{-Q'}{4\pi\varepsilon_0 r}\left[\left(1+\frac{b'}{r}\cos\theta-\frac{b'^2}{2r^2}\right) - \left(1+\frac{b''}{r}\cos\theta-\frac{b''^2}{2r^2}\right)\right] = \\
&= -E_0 r\cos\theta + \frac{-Q'}{4\pi\varepsilon_0 r}\left[\frac{b'-b''}{r}\right]\cos\theta = -E_0 r\cos\theta + \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 L^2}\frac{a^3}{r^2}\cos\theta = \\
&= -E_0 r\cos\theta + E_0\cos\theta\frac{a^3}{r^2} = -E_0\left(r-\frac{a^3}{r^2}\right)\cos\theta,
\end{aligned}$$

que é o resultado desejado.

- **Exercício 3.20:** Note que agora a carga está no interior da casca esférica, a nua distância r' do centro da mesma, que possui raio a. Temos que o potencial pode ser escrito como

$$\varphi(r,\theta) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{q}{\sqrt{r^2+r'^2-2rr'\cos\theta}} + \frac{q'}{\sqrt{r^2+b^2-2rb\cos\theta}}\right]$$

onde devemos encontrar b e q', acertando as condições de contorno. A esfera é condutora, de modo que devemos ter $\varphi = const. = \varphi_0$. Assim, teremos, retirando a constante

$$\frac{q}{\sqrt{r'^2 + a^2 - 2r'a\cos\theta}} = \frac{-q'}{\sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos\theta}}$$

ou seja,

$$q^2\left(a^2 + b^2 - 2ab\cos\theta\right) = q'^2\left(r'^2 + a^2 - 2ar'\cos\theta\right)$$

que deve valer para qualquer θ. Assim, igualando os termos em θ, ficamos com

$$q^2 b = q'^2 r'$$

e também

$$q^2\left(a^2 + b^2\right) = q'^2\left(r'^2 + a^2\right).$$

Substituindo a primeira na segunda, temos

$$\left(a^2 q^4 + q'^4 r'^2\right) = q^2 q'^2\left(r'^2 + a^2\right)$$

e, portanto,

$$r'^2\left(q'^2\right)^2 - q^2\left(r'^2 + a^2\right)\left(q'^2\right) + a^2 q^4 = 0.$$

Esta equação tem duas raízes: $q' = q$ e $q'^2 = q^2 a^2 / r'^2$. A primeira solução não pode ser aceita. A segunda fornece

$$q' = -\frac{a}{r'}q.$$

Levando isto na equação para b acima, ficamos com

$$q^2 b = \frac{q^2 a^2}{r'^2} r'$$

de modo que

$$b = \frac{a^2}{r'}.$$

Assim, nosso potencial fica

$$\varphi(r,\theta) = \varphi_0 + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{q}{\sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr'\cos\theta}} - \frac{a}{r'}\frac{q}{\sqrt{r^2 + \frac{a^4}{r'^2} - 2\frac{ra^2}{r'}\cos\theta}}\right]$$

Assim, a densidade de carga na superfície fica

$$\sigma(\theta) = -\left.\frac{\partial\varphi(r,\theta)}{\partial r}\right|_{r=a} = \frac{\left(-\frac{a^2}{r'} + r'\right)\cos\theta}{\left[a^2 + r'^2 - 2ar'\cos\theta\right]^{3/2}},$$

que é o resultado esperado.

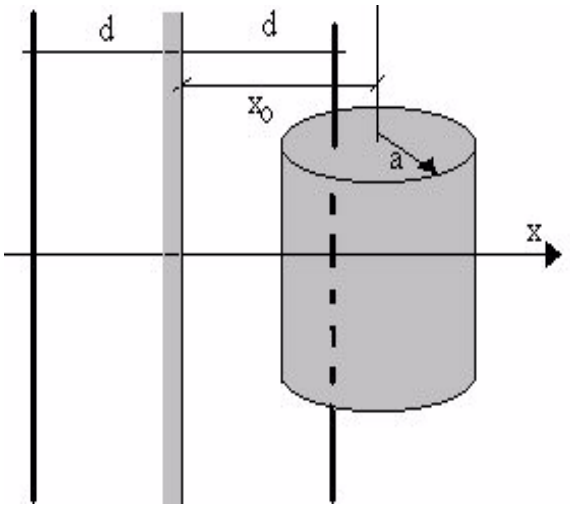


Figure 1:

- **Exercício 3.21:** Devemos considerar primeiramente duas linhas de carga infinitas com densidades lineares de carga λ paralelas e posicionadas em $x = 0$, para $+\lambda$ e $x = -2d$ para $-\lambda$, como na figura abaixo.O potencial associado à configuração dos dois fios de densidades $+\lambda$ e $-\lambda$ fica (o sistema de coordenadas está sobre a linha de carga positiva)

$$\varphi(r) = \frac{\lambda}{2\pi} \ln\left(\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{(x+2d)^2+y^2}}\right)$$

e uma superfície equipotencial $\varphi = \varphi_0$ implica que

$$\exp\left(\frac{2\pi\varphi_0}{\lambda}\right) = M = \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{(x+2d)^2+y^2}}$$

de modo que

$$\frac{4M^2d^2}{1-M^2} = x^2 - 4x\frac{M^2d}{(1-M^2)} + y^2$$

ou ainda

$$\left(x - \frac{2M^2}{1-M^2}d\right)^2 + y^2 = \frac{M^2d^2}{(1-M^2)^2}$$

de forma que temos uma superfície de potencial num círculo com raio $Md/(1-M^2)$ e centro em $x = 2M^2/(1-M^2)$, $y = 0$. Assim, temos que

$$a = \frac{Md}{1-M^2}$$

e, pela figura,

$$x_0 - d = \frac{2M^2}{1-M^2}d.$$

Assim,

$$x_0 = \frac{M^2+1}{1-M^2}d = \frac{M^2+1}{1-M^2}\frac{(1-M^2)}{M}a$$

ou seja,

$$\frac{x_0}{a} = \frac{M^2+1}{M}.$$

Resolvendo esta equação em M, ficamos com

$$M^2 - \frac{x_0}{a}M + 1 = 0 \Rightarrow M = \frac{x_0}{2a} + 2\sqrt{\frac{x_0^2}{2a^2} - 1}$$

que é o resultado procurado.

- **Exercício 3.22:** A densidade é dada por $\rho(\vec{r}) = \rho_0$ para $r \leq R$ e $\rho(\vec{r}) = 0$ para $r > R$. Para calcular o potencial usando a equação de Poisson, basta notar que esta equação fica dada por

$$\nabla^2\varphi(r,\theta,\phi) = -\frac{\rho(\vec{r})}{\varepsilon_0}.$$

Como a densidade é função apenas de r, temos que

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{d\varphi(r)}{dr}\right) = -\frac{\rho(r)}{\varepsilon_0}.$$

Podemos integrar esta equação diretamente para obter

$$\int_0^r \frac{d}{dr'}\left(r'^2\frac{d\varphi}{dr'}\right)dr' = -\frac{1}{\varepsilon_0}\int_0^r r'^2\rho(r')\,dr'$$

e, portanto, para $r > R$, temos

$$r^2\frac{d\varphi_{ext}}{dr} = -\frac{1}{3\varepsilon_0}R^3$$

de modo que

$$\int_0^r \frac{d\varphi_{ext}}{dr'} = -\frac{R^3}{3\varepsilon_0}\int\frac{1}{r'^2}dr'$$

dando

$$\varphi_{ext}(r) = \frac{R^3}{3\varepsilon_0 r}.$$

Se $r < R$, então temos

$$r^2\frac{d\varphi_{int}}{dr} = -\frac{1}{3\varepsilon_0}r^3$$

de modo que

$$\int \frac{d\varphi_{int}}{dr'} = -\frac{1}{3\varepsilon_0}\int r' dr'$$

e

$$\varphi_{int}(r) = \varphi_0 - \frac{1}{6\varepsilon_0} r^2.$$

Como em $r = R$ devemos ter $\varphi_{ext}(R) = \varphi_{int}(R)$, podemos escrever

$$\frac{R^2}{3\varepsilon_0} = \varphi_0 - \frac{1}{6\varepsilon_0} R^2,$$

de modo que

$$\varphi_0 = \frac{R^2}{2\varepsilon_0}.$$

Assim,

$$\begin{aligned} \varphi_{int}(r) &= \frac{R^2}{2\varepsilon_0}\left(1 - \frac{r^2}{3R^2}\right) \\ \varphi_{ext}(r) &= \frac{R^3}{3\varepsilon_0 r} \end{aligned}$$

(compare com o resultado do exercício 2.15*b*).

- **Exercício 3.23:** Temos um dipolo orientado perpendicularmente a um plano condutor infinito e a uma distância d do mesmo. Para calcular a força exercida pelo dipolo sobre o plano, basta usar o método das imagens. Sabemos que, se a posição das cargas reais são: $+q$ em $z = d$ e $-q$ em $z = d + l$, então as cargas imagem estarão nas posições: $-q$ em $z = -d$ e $+q$ em $z = -d - l$. O potencial gerado *pelas cargas reais*, fica portanto

$$\varphi(x, y, z) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{\sqrt{x + y^2 + (z-d)^2}} - \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z-d-l)^2}}\right].$$

A força exercida pelo dipolo sobre o plano é dada pela força que as cargas reais fazem sobre as cargas imagens, somadas vetorialmente. Temos força apenas na direção $\hat{z}$, por simetria, de modo que podemos calcular apenas F_z. O campo elétrico E_z associado ao potencial anterior fica

$$E_z(x, y, z) = -\frac{\partial\varphi}{\partial z} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left\{\frac{z-d}{\left[x + y^2 + (z-d)^2\right]^{3/2}} - \frac{z-d-l}{\left[x^2 + y^2 + (z-d-l)^2\right]^{3/2}}\right\}.$$

A força sobre a carga imagem $-q$ situada em $z = -d$ fica

$$-qE_z(0, 0, -d) = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{2d}{(2d)^3} - \frac{2d+l}{(2d+l)^3}\right] = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{4d^2} - \frac{1}{(2d+l)^2}\right]$$

enquanto que a força sobre a carga imagem $+q$ situada em $z = -d - l$ fica

$$+qE_z\left(0,0,-d-l\right) = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0}\left[-\frac{1}{\left(2d+l\right)^2} + \frac{1}{4\left(d+l\right)^2}\right]$$

e a força total fica

$$\begin{aligned}
F_z &= -qE_z\left(0,0,-d\right) + qE_z\left(0,0,-d-l\right) = \\
&= \frac{q^2}{16\pi\varepsilon_0 d^2}\left[1 - \frac{2}{\left(1+\frac{l}{2d}\right)^2} + \frac{1}{\left(1+\frac{l}{d}\right)^2}\right] = \\
&= \frac{q^2}{16\pi\varepsilon_0 d^2}\left\{1 - 2\left[1 - 2\frac{l}{2d} + 3\left(\frac{l}{2d}\right)^2\right] + \left[1 - 2\frac{l}{d} + 3\left(\frac{l}{d}\right)^2\right]\right\} = \\
&= \frac{q^2}{16\pi\varepsilon_0 d^2}\left[-\frac{3}{2}\frac{l^2}{d^2} + 3\frac{l^2}{d^2}\right] = \frac{3q^2l^2}{32\pi\varepsilon_0 d^4} = \frac{3p^2}{32\pi\varepsilon_0 d^4},
\end{aligned}$$

ou seja

$$F_z = \frac{3p^2}{32\pi\varepsilon_0 d^4}$$

que é uma força de atração.

- **Exercício 3.25:** Considere as expansões:

$$\begin{array}{l}
\varphi\left(x+d,y,z\right) = \varphi + d\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \frac{1}{2}d^2\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} \\
\varphi\left(x-d,y,z\right) = \varphi - d\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \frac{1}{2}d^2\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} \\
\varphi\left(x,y+d,z\right) = \varphi + d\frac{\partial\varphi}{\partial y} + \frac{1}{2}d^2\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} \\
\varphi\left(x,y-d,z\right) = \varphi - d\frac{\partial\varphi}{\partial y} + \frac{1}{2}d^2\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} \\
\varphi\left(x,y,z+d\right) = \varphi + d\frac{\partial\varphi}{\partial z} + \frac{1}{2}d^2\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} \\
\varphi\left(x,y,z-d\right) = \varphi - d\frac{\partial\varphi}{\partial z} + \frac{1}{2}d^2\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}
\end{array}.$$

Somando-as, temos

$$\sum = 6\varphi + d^2\left[\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}\right].$$

Ora, se $\varphi\left(x,y,z\right)$ satisfaz a equação de Laplace, então ficamos com

$$\varphi\left(x,y,z\right) = \frac{1}{6}\sum,$$

que é o resultado desejado.

(Chapter head:)Capítulo 4:

- **Exercício 4.1:** A densidade *volumétrica* de carga de polarização pode ser encontrada simplesmente fazendo-se

$$\nabla \cdot \vec{P} = -\rho_P$$

de modo que

$$\rho_P = -2ax.$$

Nas extremidades teremos (para uma barra que se extende de 0 a L) os valores

$$\begin{aligned} \sigma_P(L) &= \vec{P}\Big|_{x=L} \cdot \hat{n} = \left(aL^2 + b\right) \\ \sigma_P(L) &= \vec{P}\Big|_{x=0} \cdot \hat{n} = -b \end{aligned}$$

onde notamos que $\hat{n}_{x=0} = -\hat{n}_{x=L}$.

- **Exercício 4.2:** Temos um cubo com polarização dada por $\vec{P} = A\vec{r}$ e com origem no centro do cubo. A densidade volumétrica de carga de polarização é

$$\rho_P = -3A,$$

já que $\nabla \cdot \vec{r} = 3$. As densidades de carga superficiais nas diversas paredes do cubo são:

$$\begin{aligned} \sigma_x|_{x=+L/2} &= \frac{AL}{2}, \quad \sigma_x|_{x=-L/2} = \frac{AL}{2} \\ \sigma_y|_{y=+L/2} &= \frac{AL}{2}, \quad \sigma_y|_{y=-L/2} = \frac{AL}{2} \\ \sigma_z|_{z=+L/2} &= \frac{AL}{2}, \quad \sigma_z|_{z=-L/2} = \frac{AL}{2} \end{aligned}$$

A superficial total pode ser calculada como

$$\begin{aligned} Q_{\text{sup}} &= \left(\sigma_x|_{x=+L/2} + \sigma_x|_{x=-L/2} + \sigma_y|_{y=+L/2} + \sigma_y|_{y=-L/2} + \sigma_z|_{z=+L/2} + \sigma_z|_{z=-L/2}\right) L^2 \\ &= 3AL^3 \end{aligned}$$

enquanto que a carga volumétrica total é dada por (usando-se que $\rho_P = -3A$)

$$Q_{vol} = -3AL^3.$$

Assim, $Q_{\text{sup}} + Q_{vol} = 0$, como queríamos demonstrar.

- **Exercício 4.3:** Temos uma barra feita de dielétrico na forma cilíndrica com raio R e comprimento L, polarizada uniformemente na direção do comprimento L. Como a polarização é *uniforme*, temos que $\rho_P = 0$. Temos, ainda, que

$$\sigma_L|_{z=-L/2} = P \text{ e } \sigma_L|_{z=-L/2} = -P.$$

Note que a carga total é nula (cf. problema anterior). Com estas densidades superficiais de carga, temos que o potencial fica dado por

$$\varphi(r,\theta,z) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{\text{sup}} \frac{\sigma}{|\vec{r}-\vec{r}'|} r' dr' d\theta'$$

calculada nas duas superfícies consideradas (que são as pontas da barra). Num ponto sobre o eixo da barra ficamos com $\vec{r}' = r'\hat{\rho} + L/2\hat{k}$ na superfície no lado 'positivo' e $\vec{r}' = r'\hat{\rho} - L/2\hat{k}$ no lado 'negativo' da barra (cujo centro foi posicionado na origem do sistema de coordenadas) e $\vec{r} = z\hat{k}$. A integral fica

$$\begin{aligned}
\varphi(0,0,z) &= \frac{(2\pi P)}{4\pi\varepsilon_0}\left[\int_0^R \frac{r'dr'}{\sqrt{r'^2+(z-L/2)^2}} - \int_0^R \frac{r'dr'}{\sqrt{r'^2+(z+L/2)^2}}\right] = \\
&= \frac{(2\pi P)}{4\pi\varepsilon_0}\left[\sqrt{R^2+\left(z-\frac{L}{2}\right)^2} - \left|z-\frac{L}{2}\right| - \sqrt{R^2+\left(z+\frac{L}{2}\right)^2} + \left|z+\frac{L}{2}\right|\right].
\end{aligned}$$

(a) para pontos *fora* da barra, temos $z > L/2$ e, portanto,

$$-\left|z-\frac{L}{2}\right| + \left|z+\frac{L}{2}\right| = L$$

de modo que o campo elétrico fica (só há campo na direção z): :

$$E_z = -\frac{P}{2\varepsilon_0}\left[\frac{(z-L/2)}{\sqrt{R^2+\left(z-\frac{L}{2}\right)^2}} - \frac{(z+L/2)}{\sqrt{R^2+\left(z+\frac{L}{2}\right)^2}}\right].$$

Para pontos no interior da barra temos $z < L/2$ e

$$-\left|z-\frac{L}{2}\right| + \left|z+\frac{L}{2}\right| = 2z$$

e o campo elétrico fica

$$E_z = -\frac{P}{2\varepsilon_0}\left[\frac{(z-L/2)}{\sqrt{R^2+\left(z-\frac{L}{2}\right)^2}} - \frac{(z+L/2)}{\sqrt{R^2+\left(z+\frac{L}{2}\right)^2}} + 2\right].$$

- **Exercício 4.4:** Temos que provar que

$$\int_V \vec{P} dv = \int_V \rho_P \vec{r} dv + \int_S \sigma_P \vec{r} da.$$

Lembramos que $\rho_P = -\nabla \cdot \vec{P}$ e que $\vec{P} \cdot \hat{n} = \sigma_P$. Assim, podemos escrever o lado direito da expressão acima como

$$L_{dir} = -\int_V \left(\nabla \cdot \vec{P}\right) \vec{r} dv + \int_S \left(\vec{P} \cdot \hat{n}\right) \vec{r} da.$$

Agora notamos, pela sugestão do livro, que

$$\begin{aligned}
\nabla \cdot \left(x\vec{P}\right) &= P_x + x\left(\nabla \cdot \vec{P}\right) \\
\nabla \cdot \left(y\vec{P}\right) &= P_y + y\left(\nabla \cdot \vec{P}\right) \\
\nabla \cdot \left(z\vec{P}\right) &= P_z + z\left(\nabla \cdot \vec{P}\right)
\end{aligned}$$

de modo que podemos escrever

$$\nabla \cdot \left(x\vec{P}\right)\hat{x} + \nabla \cdot \left(y\vec{P}\right)\tilde{y} + \nabla \cdot \left(z\vec{P}\right)\hat{z} = \vec{P} + \vec{r}\left(\nabla \cdot \vec{P}\right).$$

Integrando no volume, ficamos com

$$\int_V \left[\nabla \cdot \left(x\vec{P}\right)\hat{x} + \nabla \cdot \left(y\vec{P}\right)\tilde{y} + \nabla \cdot \left(z\vec{P}\right)\hat{z}\right] dv = \int_V \vec{P} dv + \int_V \left(\nabla \cdot \vec{P}\right) \vec{r} dv.$$

Aplicando o teorema da divergência no termo à esquerda, ficamos com

$$\int_S \left(x\hat{x} + y\tilde{y} + z\hat{z}\right)\left(\vec{P} \cdot \hat{n}\right) da = \int_V \vec{P} dv + \int_V \left(\nabla \cdot \vec{P}\right) \vec{r} dv,$$

ou seja

$$\int_V \vec{P} dv = -\int_V \left(\nabla \cdot \vec{P}\right) \vec{r} dv + \int_S \left(\vec{P} \cdot \hat{n}\right) \vec{r} da$$

que é o resultado desejado.

- **Exercício 4.5:** Temos que as polarizações são constantes (uniformes) em todos os dielétricos. Estes estão a uma distância pequena entre si, com apenas uma estreita fenda separando-os. A polarização $\vec{P}$ forma um ângulo γ com a normal aos planos que limitam a fenda. Com estas polarizações, ficamos com densidades superficiais de carga iguais a

$$\sigma_P = \vec{P} \cdot \hat{n} = \pm P \cos\gamma$$

em cada um dos planos que constituem a fenda.A fenda é feita de ar; assim temos uma configuração de dois planos *paralelos* com densidades uniformes de carga σ_P como acima. O campo na fenda pode ser obtido diretamente da lei de Gauss e fornece

$$E = \frac{P \cos\gamma}{\varepsilon_0},$$

como desejado (o campo está na direção de $\vec{P}$, evidentemente).

- **Exercício 4.6:** Um longo cilindro condutor de raio a e densidade linear de carga λ está num meio dielétrico de permissividade constante ε. Para encontrar o campo elétrico a uma distância $r > a$ do eixo do cilíndro, lembramos que devemos ter a equação

$$\nabla \cdot \vec{D} = \lambda L.$$

Podemos fazer a integração usando-se uma superfície de Gauss que envolve cinlindro para obter

$$\oint_S \vec{D} \cdot \hat{n} da = \lambda L$$

e, portanto,

$$2\pi r L D_\rho = \lambda L,$$

de modo que

$$D_\rho = \frac{\lambda}{2\pi r}.$$

Assim, o campo elétrico fica

$$E_\rho = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon r}.$$

- **Exercício 4.7:** As condições de contorno são (não há carga externa sobre a interface):

$$\begin{aligned} D_{1n} - D_{2n} &= \sigma = 0 \\ E_{1t} - E_{2t} &= 0 \end{aligned}$$

Tomando a linha mencionada no texto como base, temos que

$$\begin{aligned} D_{1n} \cos\theta_1 &= D_{2n} \cos\theta_2 \\ E_1 \sin\theta_1 &= E_2 \sin\theta_2 \end{aligned}$$

Da primeira equação, temos

$$\varepsilon_1 E_1 \cos\theta_1 = \varepsilon_2 E_2 \cos\theta_2$$

de modo que, dividindo-se a equação acima pela equação para o E anterior, obtemos

$$\tan\theta_1 = \frac{K_1}{K_2} \tan\theta_2,$$

como desejado.

- **Exercício 4.8:**

- **Exercício 4.9:** Temos que o potencial fica dado por (cf. figura 4.9 do livro)

$$\varphi_1(x,y,z) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_1}\left[\frac{q}{\sqrt{(x+d)^2+y^2+z^2}} + \frac{q'}{\sqrt{(x-d)^2+y^2+z^2}}\right]$$

e

$$\varphi_2(x,y,z) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_2}\frac{q''}{\sqrt{(x+d)^2+y^2+z^2}}.$$

Sobre o plano yz os potenciais devem ser iguais, visto que não há cargas livres na interface e, portanto, não pode haver descontinuidade da componente normal de $\vec{D}$. Ora, podemos calcular D_{1n} e D_{2n} facilmente a partir dos potenciais acima como sendo

$$\begin{aligned} D_{1n} &= \varepsilon_1 E_{1,x}|_{x=0} = -\varepsilon_1 \left.\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}\right|_{x=0} = \frac{1}{4\pi}\frac{q+q'}{[x^2+y^2+z^2]^{3/2}}d \\ D_{2n} &= \varepsilon_2 E_{2,x}|_{x=0} = -\varepsilon_2 \left.\frac{\partial\varphi_2}{\partial x}\right|_{x=0} = \frac{1}{4\pi}\frac{q''}{[x^2+y^2+z^2]^{3/2}}d \end{aligned}.$$

Assim, temos uma primeira equação dada por

$$D_{1n} - D_{2n} = 0 \Rightarrow (q+q') = q''.$$

Para obter a segunda equação, lembramos que temos a condição de contorno na componente tangencial do campo elétrico (podemos tomar y ou z como sendo uma tal direção). Assim, temos que

$$\begin{aligned} E_{1t} &= -\left.\frac{\partial\varphi_1}{\partial y}\right|_{x=0} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_1}\frac{q-q'}{[y^2+z^2]^{3/2}}d \\ E_{2t} &= -\left.\frac{\partial\varphi_2}{\partial y}\right|_{x=0} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_2}\frac{q''}{[y^2+z^2]^{3/2}}d \end{aligned}$$

fornecendo a equação

$$E_{1t} - E_{2t} = 0 \Rightarrow \varepsilon_2(q-q') = \varepsilon_1 q''.$$

Assim, ficamos com o sistema de equações

$$\begin{cases} q'' - q' = q \\ \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}q'' + q' = q \end{cases}$$

cujas soluções são

$$q' = \frac{\varepsilon_2-\varepsilon_1}{\varepsilon_1+\varepsilon_2}q, \quad q'' = \frac{2\varepsilon_2}{\varepsilon_1+\varepsilon_2}q.$$

- **Exercício 4.10:** Temos os potenciais interno e externo dados por

$$\begin{aligned}\varphi_{in} &= A_0 + B_0 \ln(r) + \sum_{n=1}^{\infty} \left[A_n r^n + B_n r^{-n}\right] \cos(n\theta) \\ \varphi_{out} &= C_0 \ln(r) + \sum_{n=1}^{\infty} \left[C_n r^n + D_n r^{-n}\right] \cos(n\theta)\end{aligned}$$

que são as soluções da equação de Laplace em coordenadas cilíndricas. O termo em $\sin(\theta)$ já foi eliminado por razões de simetria [não podemos ter os potenciais variando quando fazemos $\theta \to -\theta$]. Para o potencial interno, temos que não há divergências logarítimicas, já que o cilindro está descarregado. Também não temos qualquer outro tipo de divergência. Assim, devemos por $B_n = 0$ para todo n e ficar com

$$\varphi_{in} = A_1 r \cos\theta + \sum_{n=2}^{\infty} A_n r^n \cos(n\theta).$$

Para o potencial externo, podemos elminar o termo logatímico pelas mesmas razões anteriores além de eliminarmos os termos r^n com $n > 1$, já que o potencial externo diverge com r. Assim, ficamos com

$$\varphi_{out} = \left(C_1 r + \frac{D_1}{r}\right) \cos\theta + \sum_{n=2}^{\infty} D_n r^{-n} \cos(n\theta).$$

A primeira condição de contorno diz respeito ao potencial no infinito (φ_{out}, portanto). Esta condição é que

$$\varphi_{out}(r \to \infty) = -E_0 r \cos\theta,$$

de modo que $C_1 = -E_0$. Uma segunda condição de contorno é

$$\varphi_{in}(a) = \varphi_{out}(a)$$

que fornece as equações

$$a^2 A_1 - D_1 = -E_0 a^2 \text{ e } A_n a^{2n} - D_n = 0.$$

A outra condição de contorno que falta é

$$-\varepsilon_0 \left.\frac{\partial \varphi_{out}}{\partial r}\right|_{r=a} = -\varepsilon_1 \left.\frac{\partial \varphi_{in}}{\partial r}\right|_{r=a}$$

que fornece as equações

$$K a^2 A_1 + D_1 = -E_0 a^2 \text{ e } K a^{2n} A_n + D_n = 0.$$

Ficamos, pois, com os sistemas

$$\begin{cases} a^2 A_1 - D_1 = -E_0 a^2 \\ K a^2 A_1 + D_1 = -E_0 a^2 \end{cases}$$

e

$$\begin{cases} A_n a^{2n} - D_n = 0 \\ K a^{2n} A_n + D_n = 0 \end{cases} .$$

Este último sistema implica necessariamente que $A_n = D_n = 0$, para $n \geq 2$. O primeiro sistema fornece

$$A_1 = -\frac{2E_0}{K+1} \text{ e } D_1 = \frac{K-1}{K+1} a^2 E_0.$$

Os potenciais ficam, portanto,

$$\begin{cases} \varphi_{in} = \frac{-2}{K+1} E_0 r \cos\theta \\ \varphi_{out} = \left[1 - \frac{K-1}{K+1}\frac{a^2}{r^2}\right] E_0 r \cos\theta \end{cases} ,$$

que são os resultados procurados.

- **Exercício 4.11:** Temos um dipolo pontual $\vec{p}$ no centro da esfera dielétrica de raio a. Sabemos que o campo fora da esfera é dipolar, ou seja, temos

$$\varphi_{out} = A\frac{\vec{p}\cdot\vec{r}}{r^3}$$

onde A é o coeficiente a se determinar. No interior da esfera dielétrica devemos ter

$$\varphi_{in} = Br\cos\theta + \frac{C}{r^2}\cos\theta,$$

onde já eliminamos os termos em r^{-n} $(n \geq 3)$ e os termos r^n $(n \geq 2)$ a partir de considerações similares às feitas em exercícios deste tipo. Também sabemos, pela condição de que há um dipolo pontual na origem que $C = p/4\pi\varepsilon_1$. Ficamos, portanto, com os potenciais

$$\begin{aligned} \varphi_{in} &= \left(Br + \frac{p}{4\pi\varepsilon_1 r^2}\right)\cos\theta \\ \varphi_{out} &= A\frac{p\cos\theta}{r^2} \end{aligned}$$

As condições de contorno implicam que devemos ter continuidade do potencial na superfície da esfera. Assim,

$$\varphi_{in}\,(r=a) = \varphi_{out}\,(r=a)$$

ou seja

$$\left(Ba + \frac{p}{4\pi\varepsilon_1 a^2}\right) = A\frac{p}{a^2}.$$

Da mesma forma, devemos ter continuidade na componente do vetor deslocamento elétrico, visto que a esfera dielétrica não está carregada com nenhuma densidade superficial de carga. Assim, devemos ter também

$$D_{in} = D_{out}$$

ou seja,

$$-\varepsilon_1 \left.\frac{\partial\varphi_{in}}{\partial r}\right|_{r=a} = -\varepsilon_0 \left.\frac{\partial\varphi_{out}}{\partial r}\right|_{r=a}.$$

Esta última igualdade fornece

$$K\left(B - \frac{2p}{4\pi\varepsilon_1 a^3}\right) = -2A\frac{p}{a^3}.$$

Ficamos, portanto, com o sistema de equações

$$\begin{cases} a^3B - pA = -\frac{p}{4\pi\varepsilon_1} \\ Ka^3B + 2pA = \frac{2pK}{4\pi\varepsilon_1} \end{cases},$$

cujas soluções são

$$\begin{aligned} A &= \frac{3K}{K+2}\frac{1}{4\pi\varepsilon_1} = \frac{3}{K+2}\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \\ B &= \frac{p}{2\pi\varepsilon_1 a^3}\frac{(K-1)}{(K+2)} \end{aligned}$$

de modo que os potenciais ficam

$$\begin{aligned} \varphi_{in} &= \left(\frac{2p}{4\pi\varepsilon_1 a^3}\frac{(K-1)}{(K+2)}r + \frac{p}{4\pi\varepsilon_1 r^2}\right)\cos\theta \\ &= \frac{p\cos\theta}{4\pi\varepsilon_1 r^2}\left[1 + 2\frac{r^3}{a^3}\frac{(K-1)}{(K+2)}\right] \end{aligned}$$

e

$$\varphi_{out} = \frac{p\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\frac{3}{K+2},$$

que são os resultados desejados.

- **Exercício 4.12:** Os resultados são

$$\begin{cases} \varphi_1 = -E_0\left(1 - \frac{K-1}{K+2}\frac{a^3}{r^3}\right)E_0 r\cos\theta \\ \varphi_2 = -\frac{3}{K+2}E_0 r\cos\theta \end{cases}$$

que, quando fazemos $K \to \infty$, ficam

$$\begin{cases} \varphi_1 = -E_0 r \cos\theta \left(1 - \frac{a^3}{r^3}\right) \\ \varphi_2 = 0 \end{cases},$$

que são os resultados para a esfera condutora.

- **Exercício 4.13:** Temos uma chapa fina de material com constante dielétrica K_1 limitada por ambos os lados por um material de constante dielétrica K_2. Sabemos que o campo no meio 2, $\vec{E}_2$, é dado como sendo uniforme e perpendicular aos contornos. Para encontrar o campo $\vec{E}_1$ devemos usar as condições de contorno do problema. Não há cargas livres no problema. Assim, temos

$$\begin{aligned} D_{1n} &= D_{2n} \\ E_{1t} &= E_{2t} \end{aligned}$$

Como $\vec{E}_2$ é perpendicular aos contornos, devemos ter $E_{2t} = 0$ e, portanto, $E_{1t} = 0$. Agora sabemos que

$$D_{2n} = \varepsilon_2 E_{2n} \text{ e } D_{1n} = \varepsilon_1 E_{1n}.$$

Assim,

$$E_{1n} = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} E_{2n}.$$

Agora, como sabemos que

$$\vec{D}_i = \varepsilon_0 \vec{E}_i + \vec{P}_i,$$

ficamos com

$$\begin{aligned} P_{1n} &= \varepsilon_2 E_{2n} - \varepsilon_0 E_{1n} \\ P_{2n} &= (\varepsilon_2 - \varepsilon_0) E_{2n} \end{aligned}$$

Em termos das constantes $K_i = \varepsilon_i / \varepsilon_0$ podemos escrever os resultados acima como

$$\begin{aligned} E_{1n} &= \frac{K_2}{K_1} E_{2n} \\ P_{1n} &= \varepsilon_0 \left(\frac{K_1 - 1}{K_1}\right) K_2 E_{2n} \end{aligned}$$

e

$$P_{2n} = (K_2 - 1)\, \varepsilon_0 E_{2n}.$$

Portanto, como só temos polarização perpendicular à superfície, $\sigma_P = \pm P_{1n}$.

- **Exercício 4.14:** Podemos fazer $K_1 \to \infty$ na solução anterior para obter

$$E_{1n} = 0 \text{ e } P_{1n} = \varepsilon_0 K_2 E_{2n}.$$

Note que, agora $D_{1n} = P_{1n}$ já que o campo elétrico E_{1n} é nulo. Assim, temos que

$$D_{1n} = \varepsilon_0 K_2 E_{2n} = \sigma_P,$$

que concorda com a expressão (4.44) do livro.

- **Exercício 4.15:** As placas são paralelas, condutoras e estão distantes por um valor d. São mantidas a uma diferença de potencial $\Delta\varphi$. A chapa de material dielétrico de constante dielétrica K é inserida e possui uma espessura $t < d$. O potencial pode ser escrito como

$$\Delta\varphi = \Delta\varphi_1 + \Delta\varphi_2,$$

onde

$$\frac{\Delta\varphi_1}{d-t} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \text{ e } \frac{\Delta\varphi_2}{t} = \frac{\sigma}{\varepsilon_1}$$

de modo que

$$\Delta\varphi = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\left[(d-t) + \frac{t}{K}\right] = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\left[\frac{Kd-(K-1)\,t}{K}\right].$$

O vetor deslocamento elétrico é

$$D = \sigma$$

que, com a equação para o potencial, fica

$$D = \frac{K\varepsilon_0\Delta\varphi}{[Kd-(K-1)\,t]}.$$

Os campos elétricos ficam

$$\begin{aligned} E_{vác} &= \frac{D}{\varepsilon_0} = \frac{K\Delta\varphi}{[Kd-(K-1)\,t]} \\ E_{diel} &= \frac{D}{\varepsilon_1} = \frac{\Delta\varphi}{[Kd-(K-1)\,t]} \end{aligned}$$

como queríamos encontrar.

- **Exercício 4.16:** Para encontrar as polarizações, podemos usar os resultados do exercício anterior para escrever

$$\begin{aligned} P_{vác} &= -\varepsilon_0 E_{vác} + D = 0 \\ P_{diel} &= -\varepsilon_0 E_{vác} + D = \frac{\varepsilon_0\,(K-1)\,\Delta\varphi}{[Kd-(K-1)\,t]} \end{aligned}$$

Lembramos ainda que

$$D_{placa} - D_{diel} = \sigma_{liv} = \sigma$$

e

$$\sigma_{diel} = \vec{P}_{diel}\cdot\hat{n} = \pm\sigma,$$

o sinal dependendo da face em que consideramos o cálculo.

- **Exercício 4.17:** Temos que encontrar um campo elétrico *radial* que satisfaça todas as condições de contorno para a esfera de raio R que flutua submersa pela metade num meio líquido de permissividade ε_1. A carga total da esfera é Q. Assim, procuramos um potencial do tipo

$$\begin{aligned} \varphi_{in} &= \frac{A}{r} \\ \varphi_{out} &= \frac{B}{r} \end{aligned}$$

A primeira condição de contorno (a continuidade do potencial) simplesmente afirma que $A = B$. A segunda condição de contorno é dada por

$$D_{1n} - D_{2n} = \frac{Q}{4\pi a^2},$$

já que $\sigma = Q/4\pi a^2$. Assim, temos

$$-\varepsilon_1 \left.\frac{\partial \varphi_{in}}{\partial r}\right|_{r=a} - \varepsilon_2 \left.\frac{\partial \varphi_{out}}{\partial r}\right|_{r=a} = \frac{Q}{4\pi a^2}$$

ou seja

$$(\varepsilon_2 + \varepsilon_1)\frac{A}{a^2} = \frac{Q}{4\pi a^2}$$

e, portanto,

$$A = B = \frac{Q}{4\pi\left(\varepsilon_2 + \varepsilon_1\right)},$$

dando o potencial

$$\varphi_{in} = \varphi_{out} = \frac{Q}{4\pi\left(\varepsilon_1 + \varepsilon_2\right) r}.$$

Que este é o resultado verdadeiro decorre imediatamente da unicidade das soluções da equação de Laplace (note que os potenciais acima *são* soluções da equação de Laplace).

- **Exercício 4.18:** Basta notar que este problema implica que, no problema resolvido no livro, devemos ter ε_0 trocado por ε_1 (e vice-versa). Assim, K deve ser trocado por $1/K$. O resultado que tínhamos era

$$\vec{E}_{in} = \frac{-3}{K+2}\vec{E}_0;$$

com a troca, ficamos com

$$\vec{E}_{in} = \frac{-3}{1/K+2}\vec{E}_0 = \frac{-3K}{1+2K}\vec{E}_0.$$

1 Capítulo 6:

- **Exercício 6.2:** Devemos nos lembrar que podemos calcular o vetor deslocamento elétrico a partir da expressão ('lei de Gauss' para o vetor $\vec{D}$)

$$4\pi r^2 D = q.$$

Obtemos, assim,

$$D = \frac{q}{4\pi r^2} \text{ e } E = \frac{q}{4\pi\varepsilon r^2}.$$

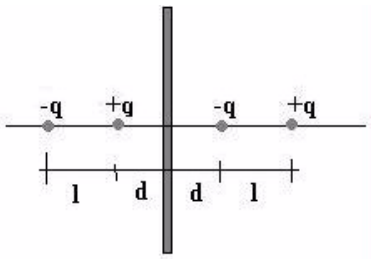
A energia, portanto, é dada por

$$U = \frac{1}{2}\int_V \vec{D}\cdot\vec{E}d\vec{r}$$

onde devemos nos lembrar que o volume V tem que ser aquele compreendido pela matéria do sistema, ou seja, no caso em questão, a calota esférica que vai do raio a ao raio b. Assim,

$$U = \frac{1}{2}\frac{q^2}{16\pi^2\varepsilon}\int_a^b \frac{1}{r^4}r^2 4\pi dr = \frac{q^2}{8\pi\varepsilon}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)$$

- **Exercício 6.3:** O exercício pode ser feito percebendo-se que o plano condutor pode ser substituído por uma configuração dipolar *especular* com relação ao dipolo que se encontra em frente ao plano, como mostra a figura abaixo:



Notamos, entretanto, que a primeira energia decorre do trabalho que teríamos ao 'trazer' uma das cargas no lado esquerdo do plano para próximo da outra. Este trabalho é dado por

$$W_0 = -\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 l}.$$

Posteriormente, teremos o trabalho de trazer cada uma das cargas que estão no lado direito do plano. Para a carga $-q$ teríamos

$$W_1 = -q\left[\frac{-q}{4\pi\varepsilon_0\left(l+2d\right)} + \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\left(2d\right)}\right],$$

onde os termos estão associados aos potenciais gerados por cada uma das cargas no ponto para onde a carga $-q$ foi trazida. Para a carga $+q$ teríamos

$$W_2 = +q\left[\frac{-q}{4\pi\varepsilon_0\left(2l+2d\right)} + \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\left(l+2d\right)} - \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 l}\right].$$

A energia total será a soma destes trabalhos e será dada por

$$\begin{aligned} U &= \frac{-q^2}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{2}{l} - \frac{2}{\left(l+2d\right)} + \frac{1}{2d} + \frac{1}{2\left(l+d\right)}\right] \\ &= \frac{-2q^2}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{l} - \frac{1}{\left(l+2d\right)} + \frac{1}{4d} + \frac{1}{4\left(l+d\right)}\right]. \end{aligned}$$

- **Exercício 6.5:** Temos que a distribuição de cargas é esférica e de raio R, onde $\rho = \rho_0$ (constante). Podemos obter o valor da energia eletrostática desta distribuição integrando diretamente, ou seja, usando

$$U = \frac{1}{2}\int_V \rho\left(\vec{r}\right)\varphi\left(\vec{r}\right)d\vec{r}.$$

Notemos, entretanto, que, para esta configuração devemos ter

$$\begin{aligned} \varphi_I\left(\vec{r}\right) &= \varphi_0 + \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}\ \left(r \leq R\right) \\ \varphi_{II}\left(\vec{r}\right) &= \frac{q'}{4\pi\varepsilon_0 r}\ \left(r \geq R\right) \end{aligned}$$

obtidos por lei de Gauss. Assim,

$$\begin{aligned} q &= \frac{4}{3}\pi r^3\rho_0\ \left(r \leq R\right) \\ q' &= \frac{4}{3}\pi R^3\rho_0\ \left(r \geq R\right) \end{aligned}$$

de modo que ficamos com

$$\begin{aligned} \varphi_I\left(\vec{r}\right) &= \varphi_0 + \frac{r^2\rho_0}{3\varepsilon_0}\ \left(r \leq R\right) \\ \varphi_{II}\left(\vec{r}\right) &= \frac{\rho_0 R^3}{3\varepsilon_0 r}\ \left(r \geq R\right) \end{aligned}$$

e, como sabemos que, para $r = R$ devemos ter ambos os potenciais iguais, podemos escrever

$$\begin{aligned} \varphi_I\left(\vec{r}\right) &= \frac{\rho_0}{2\varepsilon_0}\left(R^2 - \frac{r^2}{3}\right)\ \left(r \leq R\right) \\ \varphi_{II}\left(\vec{r}\right) &= \frac{\rho_0 R^3}{3\varepsilon_0 r}\ \left(r \geq R\right) \end{aligned}$$

Se vamos calcular a distribuição de auto-energias usando a fórmula acima, então o volume V tem que ser aquele que contém a distribuição de matéria/carga, ou seja, devemos usar $\varphi_I(\vec{r})$. A integração fica

$$\begin{aligned} U &= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{R}\rho_0\frac{\rho_0}{2\varepsilon_0}\left(R^2-\frac{r^2}{3}\right)r^2\sin\theta dr d\theta d\phi \\ &= \frac{4\pi\rho_0^2R^5}{15\varepsilon_0}. \end{aligned}$$

- **Exercício 6.6:** Temos que o resultado anterior deve ser equiparado com a energia de repouso do elétron, para obtermos

$$\frac{4\pi\rho_0^2R^5}{15\varepsilon_0} = \frac{4\pi}{15}\left(\frac{m}{\frac{4}{3}\pi R^3}\right)^2R^5 = mc^2$$

ou seja

$$\frac{9}{15.4\pi\varepsilon_0}m^2R = mc^2$$

de modo que

$$R = \frac{20\pi\varepsilon_0c^2}{3m}.$$

- **Exercício 6.7:** Temos que

$$\vec{E}_1 = \frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0r_1^3}\vec{r}_1 = \frac{q_1\left(\vec{\xi}-\vec{r}\right)}{4\pi\varepsilon_0\left|\vec{\xi}-\vec{r}\right|^3} \text{ e } \vec{E}_2 = \frac{q_2}{4\pi\varepsilon_0r^3}\vec{r}.$$

Assim:

  - (a) $E_2^2 = \vec{E}_2\cdot\vec{E}_2 = q_2^2/\left(16\pi^2\varepsilon_0^2r^4\right)$, de forma que temos

$$I = \int_0^{\infty}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{q_2^2}{16\pi^2\varepsilon_0^2r^4}r^2\sin\theta dr d\theta d\phi = -\left.\frac{q_2^2}{4\pi\varepsilon_0r}\right|_0^{\infty}$$

    que diverge no limite inferior.
  - (b) Agora temos que calcular $I = \int\vec{E}_1\cdot\vec{E}_2dV$, onde V é todo o volume do universo. Assim,

$$\begin{aligned} I &= \int_V\frac{q_1q_2\left(\vec{\xi}-\vec{r}\right)\cdot\vec{r}}{16\pi^2\varepsilon_0^2r^3\left|\vec{\xi}-\vec{r}\right|^3}dV = \frac{q_1q_2}{16\pi^2\varepsilon_0^2}\int_0^{\infty}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\left(\xi r\cos\theta-r^2\right)r^2\sin\theta dr d\theta d\phi}{r^3\left[r^2+\xi^2-2r\xi\cos\theta\right]^{3/2}} \\ &= \frac{q_1q_2}{8\pi\varepsilon_0^2}\int_0^{\infty}\int_{-1}^{+1}\frac{(\xi u-r)}{\left[r^2+\xi^2-2r\xi u\right]^{3/2}}dr du \end{aligned}$$

Note agora que

$$\frac{d}{dr}\left\{\frac{1}{\left[r^2+\xi^2-2r\xi u\right]^{1/2}}\right\}=\frac{-2\left(r-\xi u\right)}{\left[r^2+\xi^2-2r\xi u\right]^{3/2}}.$$

Assim, ficamos com

$$\begin{aligned} I &= \frac{q_1q_2}{8\pi\varepsilon_0^2}\int_{-1}^{+1}\left\{\frac{1}{\left[r^2+\xi^2-2r\xi u\right]^{1/2}}\right\}_0^{\infty}du=\frac{q_1q_2}{8\pi\varepsilon_0^2}\int_{-1}^{+1}\frac{1}{\xi^2}du \\ &= \frac{q_1q_2}{8\pi\varepsilon_0^2\xi^2}2=\frac{q_1q_2}{4\pi\varepsilon_0^2\xi^2}, \end{aligned}$$

que é o resultado (finito) esperado para a energia entre duas cargas. Assim, o termo calculado em (a), associado às auto-energias, deve ser desconsiderado dos cálculos.

- **Exercício 6.10:** Só temos dois condutores, de modo que ficamos com

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= p_{11}Q_1-p_{12}Q_2 \\ \varphi_2 &= p_{21}Q_1-p_{22}Q_2 \end{aligned}$$

que é um sistema de equações que pode ser resolvido para Q_1 e Q_2 de tal forma que

$$Q_1=\frac{p_{22}\varphi_1-p_{12}\varphi_1}{p_{11}p_{22}-p_{21}p_{12}}\text{ e }Q_2=\frac{p_{21}\varphi_1-p_{11}\varphi_2}{p_{11}p_{22}-p_{21}p_{12}}.$$

Usando a expressão:

$$Q_i=\sum_{j=1}^{2}c_{ij}\varphi_j,$$

ficamos com os *coeficientes de capacidade* dados por

$$c_{11}=\frac{p_{22}}{\Delta},\ c_{22}=-\frac{p_{11}}{\Delta},$$

onde Δ é o determinante do sistema anterior e é dado por $\Delta=p_{11}p_{22}-p_{21}p_{12}$, e também com os *coeficientes de indução* dados por

$$c_{12}=\frac{-p_{12}}{\Delta}\text{ e }c_{21}=\frac{p_{21}}{\Delta}.$$

- **Exercício 6.13:** Note que temos uma situação em que os dielétricos fazem o papel de capacitores em série. Assim, a capacitância total será dada por

$$\frac{1}{C}=\frac{1}{C_1}+\frac{1}{C_2}.$$

O cálculo da capacitância de cada um destes 'capacitores' é fácil e é dado por

$$C_1 = \frac{\varepsilon_1 A}{d_1} \text{ e } C_2 = \frac{\varepsilon_2 A}{d_2}.$$

Assim, ficamos com

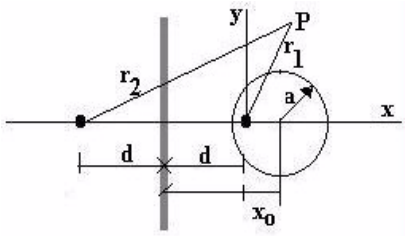
$$\frac{1}{C} = \frac{d_1}{\varepsilon_1 A} + \frac{d_2}{\varepsilon_2 A} = \frac{1}{A}\left(\frac{\varepsilon_2 d_1 + \varepsilon_1 d_2}{\varepsilon_1 \varepsilon_2}\right),$$

ou seja, a capacitância por unidade de área, C/A fica

$$C/A = \left(\frac{\varepsilon_2 d_1 + \varepsilon_1 d_2}{\varepsilon_1 \varepsilon_2}\right),$$

que é o resultado desejado.

- **Exercício 6.14:** Considere a figura abaixo. Nela temos uma configuração de duas linhas de carga com densidades lineares de carga $\pm\lambda$, posicionadas simetricamente com relação ao local em que estaria o plano condutor (não está mais, visto que estamos usando o método das imagens).



Exercício 6.14

quando o fazemos o potencial no ponto P fica dado por

$$\varphi = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0} \ln\left(\frac{r_1}{r_2}\right) = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0} \ln\left[\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{(x+2d)^2+y^2}}\right].$$

Se escrevemos $M^2 = \exp\left(4\pi\varepsilon_0\varphi/\lambda\right)$, então ficamos com

$$M^2 = \frac{x^2+y^2}{x^2+4dx+4d^2+y^2}$$

que, após algumas manipulações algébricas simples, pode ser posto sob a forma

$$\left(x - \frac{2M^2 d}{1-M^2}\right)^2 + y^2 = \frac{4d^2M^2}{1-M^2},$$

que representa um cilindro de centro em

$$x_c = \frac{2M^2 d}{1 - M^2}$$

e raio

$$r_c = \frac{2dM}{1 - M^2}.$$

Agora, olhando a figura, temos que

$$a = r_c \text{ e } x_0 = d + x_c,$$

de modo que

$$x_0 = \frac{(1 + M^2)}{(1 - M^2)} d \text{ e } a = \frac{2Md}{1 - M^2}.$$

Assim, ficamos com

$$\frac{x_0}{a} = \frac{1 + M^2}{2M}$$

de onde obtemos

$$M = \frac{x_0}{a} \pm \sqrt{\frac{x_0^2}{a^2} - 1},$$

onde escolhemos o valor positivo. Assim, usando a expressão para M, ficamos com

$$\frac{\varphi}{\lambda} = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0} \ln\left(\frac{x_0}{a} + \sqrt{\frac{x_0}{a} - 1}\right)$$

e, lembrando que

$$\cosh^{-1} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right),$$

podemos escrever

$$\frac{\lambda}{\varphi} = 2\pi\varepsilon_0 / \cosh^{-1}(x_0/a),$$

que é o resultado esperado.

- **Exercício 6.17:** Para o caso das esferas concêntricas temos que

$$\varphi_I = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r_1} \text{ e } \varphi_{II} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r_2}.$$

Assim, temos que

$$\varphi_I - \varphi_{II} = \Delta\varphi = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right).$$

Como sabemos que

$$Q = C\Delta\varphi,$$

concluímos que

$$C = 4\pi\varepsilon_0 / \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right).$$

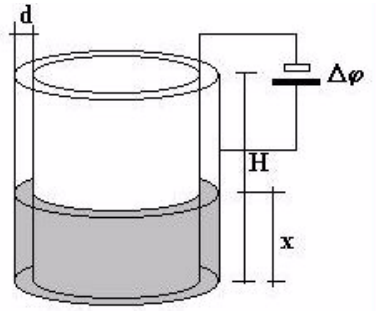
Como temos

$$U = \frac{1}{2} Q \Delta\varphi$$

e $Q = C\Delta\varphi$, então, ficamos com

$$U = \frac{1}{2} C \left(\Delta\varphi\right)^2.$$

- **Exercício 6.18**: temos o arranjo da figura abaixo, em que mostramos a situação já com o líquido dielétrico preenchendo parcialmente o cilindro. Suponha que o dielétrico preenche a região intersticial até uma altura z_0 e tome esta altura como sendo a origem do sistema de coordenadas.



Note que temos uma situação em que temos dois 'capacitores' em paralelo. Um, com capacitância $C_1(z)$, com o dielétrico preenchendo a região intersticial e outro, com capacitância $C_2(z)$, sem dielétrico (com vácuo). A capacitância total deste sistema pode ser escrita, uma vez que estão em paralelo, como

$$C(z) = C_1(z) + C_2(z)$$

enquanto que a energia total pode ser escrita diretamente como

$$U(z) = C(z)\,\Delta\varphi,$$

onde ressaltamos que o parâmetro $\Delta\varphi$ está sendo mantido constante (isto é importante para efeito do cálculo da força que aparecerá sobre o dielétrico no sentido de puxá-lo para cima). O cálculo do potencial entre os cilindros é simples. Se supusermos (sem perda de generalidade) que o potencial sobre o mais interno é φ_1 e sobre o mais externo é φ_2, então

$$C_2^{-1}(z) = \frac{\Delta\varphi}{Q_2} = \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{Q_2} = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0 (H - z)} \ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right),$$

para a região preenchida por ar e

$$C_1^{-1}(z) = \frac{\Delta\varphi}{Q_1} = \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{Q_1} = \frac{1}{2\pi\varepsilon z}\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right),$$

para a região com dielétrico, onde usamos que $Q_2 = \lambda(H - z)$ e $Q_1 = \lambda z$, visto que λ é a densidade linear de carga. Assim, ficamos com

$$U(z) = \frac{2\pi\varepsilon_0\Delta\varphi}{\ln(r_2/r_1)}(H - z) + \frac{2\pi\varepsilon\Delta\varphi}{\ln(r_2/r_1)}z.$$

Sua derivada com relação a z (com $\Delta\varphi$ constante) fornece a força nesta direção, logo

$$F_z = \frac{2\pi\Delta\varphi}{\ln(r_2/r_1)}[\varepsilon - \varepsilon_0].$$

A quantidade de massa deslocada pela diferença de potencial será dada pelo produto da densidade de massa pelo volume deslocado, ou seja,

$$m = \xi\pi\left(r_2^2 - r_1^2\right)z,$$

onde z é a altura em que o dielétrico é levantado. Note que temos

$$r_2 = r_1 + d,$$

de modo que podemos escrever

$$r_2^2 - r_1^2 \simeq 2r_1 d.$$

Assim, temos que a força necessária para elevar o líquido de dielétrico é dada por

$$F_g = mg = 2\pi\xi r_1 g dz.$$

Esta força deve ser equilibrada pela força F_z já calculada. Assim, ficamos com

$$\frac{2\pi(\varepsilon - \varepsilon_0)\Delta\varphi}{\ln(1 + d/r_1)} = 2\pi\xi r_1 g dz.$$

Fazendo a aproximação $d/r_1 \ll 1$ no logaritmo $[\ln(1 + x) \simeq x]$, ficamos com

$$\frac{\varepsilon_0(K - 1)}{\xi g d^2}\Delta\varphi = z$$

que é o resultado desejado. Note que, se a densidade do dielétrico é muito pequena, z será grande; se só tivermos vácuo, $z = 0$ e se d for pequeno, z será grande, que são condições que esperaríamos encontrar fisicamente. Note, ainda, que quanto maior for K (quanto mais energia o dielétrico puder armazenar), maior será a elevação do mesmo.

Podemos estimar um resultado típico para z com valores reais das constantes: suponha os valores (para a água destilada a 20^oC, $K \simeq 81$)

$$\begin{array}{l} \Delta\varphi = 220V \\ K = 81 \\ \xi = 1Kg/m^3 \\ \varepsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12} Nm^2/C^2 \\ d = 10^{-3}m \\ g = 9.8m/s^2 \end{array} .$$

Ficamos com

$$z = \frac{8.85 \times 10^{-12} \times 80}{9.8 \times 10^{-6}} (220)^2 = 3.5cm$$

- **Exercício 6.19:** Enquanto o capacitor está sendo carregado *com o dielétrico no seu interior*, temos que há a transferência de uma carga total

$$Q_T = \frac{\varepsilon l w}{d} \Delta\varphi_0.$$

Posteriormente, a bateria é desligada e o dielétrico é parcialmente retirado. A carga total deverá agora ser dada pelas somas de cada uma das contribuições (da parte do dielétrico que ainda se encontra no interior do capacitor e daquela parte que contém apenas ar). Assim, temos

$$\begin{aligned} Q_1 &= \frac{\varepsilon x w}{d} \Delta\varphi \\ Q_2 &= \frac{\varepsilon_0 (l - x) w}{d} \Delta\varphi \end{aligned}$$

onde agora $\Delta\varphi$ **não** é igual a $\Delta\varphi_0$, pois a bateria não é mais capaz de manter o potencial fixo. A carga, entretanto, é conservada, extamente pelo fato de termos desligado a bateria, de modo que

$$\begin{aligned} Q_T &= Q_1 + Q_2 = \left[\frac{\varepsilon x w}{d} + \frac{\varepsilon_0 (l - x)}{d} \right] \Delta\varphi \\ &= \varepsilon_0 [l + (K - 1)x] \frac{w}{d} \Delta\varphi; \end{aligned}$$

Usando a expressão anterior para Q_T, ficamos com

$$\Delta\varphi = \frac{K l \Delta\varphi_0}{[l + (K - 1) x]}.$$

A força pode ser calculada a partir do potencial, desde que lembremos que devemos manter **a carga** constante. Assim, devemos escrever

$$\Delta\varphi = \frac{K Q d}{\varepsilon w [l + (K - 1) x]}$$

e a energia fica

$$U = \frac{1}{2} Q \Delta\varphi = \frac{d}{2\varepsilon_0 w} \frac{Q^2}{[l + (K-1)\, x]}$$

e a força (olhe o sinal)

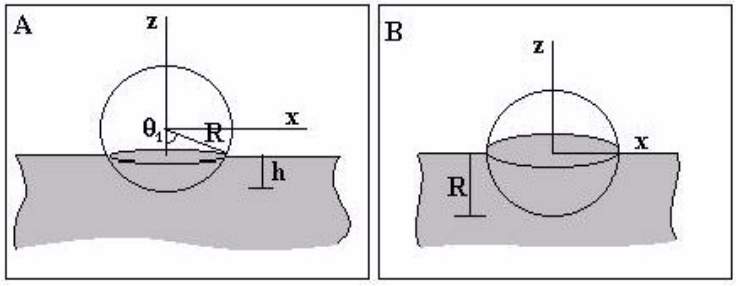
$$F = -\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)_Q = \frac{(K-1)\, Q^2 d}{2\varepsilon_0 \left[l + (K-1)\, x\right]^2},$$

que é o resultado desejado.

- **Exercício 6.21:** Começamos por notar que a esfera está inicialmente em equilíbrio. Assim, a força realizada pelo empuxo deve ser equilibrada pela força peso da esfera. A força de empuxo é calculada através da expressão

$$F_{e,1} = \rho_d g h A,$$

onde h é a altura da parte da esfera que se encontra imersa no fluido e A é a área da seção reta desta parte (cf. figura abaixo). Vamos supor, de modo geral, que o volume imerso da esfera seja αV, onde $V = 4\pi R^3/3$ é o volume da esfera e α dá a porcentagem de esfera imersa. Vamos considerar, inicialmente, o ângulo θ_1, como mostrado na figura, como dado (depois mostraremos como obtê-lo dos dados do problema).



Assim, temos

$$F_{e,1} = \rho_d g R\,(1 - \cos\theta_1)\,\pi R^2 \sin^2\theta_1 = \rho_d \pi R^3 \sin^2\theta_1\,(1 - \cos\theta_1) = mg$$

ou seja,

$$\rho_d = \frac{m}{\pi R^3 \sin^2\theta_1\,(1 - \cos\theta_1)}.$$

Agora, considere a esfera na situação B da figura anterior, em que a esfera está submersa pela metade no dielétrico. A força de empuxo deve ser dada por

$$F_{e,2} = \rho_d g \pi R^3,$$

já que $h = R$ e $A = \pi R^2$. Esta força deve ser equilibrada pelo peso adicionado à força realizada pelo potencial que foi ligado. A força associada a este último termo pode ser calculada da seguinte maneira: a energia eletrostática associada aos campos é dada por (campos supostamente radiais)

$$\begin{aligned} U &= \frac{1}{2}\int_V \vec{E}\cdot\vec{D}dV = \frac{\varepsilon}{2}\frac{Q^2}{16\pi^2\varepsilon_0^2}\int_R^\infty\int_0^{\theta_1}\int_0^{2\pi}\frac{1}{r^4}r^2\sin\theta dr d\theta d\phi \\ &+\frac{\varepsilon_0}{2}\frac{Q^2}{16\pi^2\varepsilon_0^2}\int_R^\infty\int_{\theta_1}^{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{1}{r^4}r^2\sin\theta dr d\theta d\phi \end{aligned}$$

que fornece

$$\begin{aligned} U &= \left(\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R}\right)^2\pi R\left[\varepsilon\int_0^{\theta_1}\sin\theta d\theta + \varepsilon_0\int_{\theta_1}^{\pi}\sin\theta d\theta\right] \\ &= \varphi^2\pi R\left[\varepsilon\left(1-\cos\theta_1\right)+\varepsilon_0\left(1+\cos\theta_1\right)\right] \\ &= -\varphi^2\pi R\left(\varepsilon-\varepsilon_0\right)\cos\theta_1+\varphi^2\pi R\left(\varepsilon+\varepsilon_0\right). \end{aligned}$$

Se notarmos que $z = -R\cos\theta_1$ (tomando o centro da esfera como origem de nosso sistema de coordenadas), então a energia potencial fica

$$U(z) = \varphi^2\pi R\left(\varepsilon+\varepsilon_0\right)+\varphi^2\pi\varepsilon_0\left(K-1\right)z.$$

A força eletrostática, portanto, fica

$$F_E = \varphi^2\pi\varepsilon_0\left(K-1\right).$$

Assim, devemos ter

$$F_{e,2} = mg + F_E,$$

o que fornece

$$\rho_d g\pi R^3 = mg + \varphi^2\pi\varepsilon_0\left(K-1\right)$$

e, substituindo o valor de ρ_d ficamos com

$$mg\frac{\left[1-\sin^2\theta_1\left(1-\cos\theta_1\right)\right]}{\sin^2\theta_1\left(1-\cos\theta_1\right)} = \varphi^2\pi\varepsilon_0\left(K-1\right),$$

de modo que

$$\varphi = \left\{\frac{mg}{\pi\varepsilon_0\left(K-1\right)}\frac{1-\sin^2\theta_1\left(1-\cos\theta_1\right)}{\sin^2\theta_1\left(1-\cos\theta_1\right)}\right\}^{1/2}.$$

Falta ainda obter o valor de θ_1. Podemos fazê-lo a partir das condições iniciais (quando a esfera está equilibrada, sem campo, pelo empuxo e seu volume submerso pode ser calculado facilmente). Assim, devemos ter

$$\alpha\frac{4}{3}\pi R^3 = \int_0^R\int_0^{\theta_1}\int_0^{2\pi} r^2\sin\theta dr d\theta d\phi - \frac{\pi R^3}{3}\sin^2\theta_1\cos\theta_1,$$

onde o termo à direita é dado pelo volume associado ao ângulo sólido subentendido por θ_1 e que temos que retirar a parte do cone, incluída a mais, representada pelo último termo à direita. Assim, ficamos com

$$4\alpha\frac{\pi R^3}{3} = 2\frac{\pi R^3}{3}\left(1-\cos\theta_1\right) - \frac{\pi R^3}{3}\sin^2\theta_1\cos\theta_1,$$

ou seja

$$4\alpha - 2 = -3\cos\theta_1 + \cos^3\theta_1,$$

onde, se substituirmos $\xi = \cos\theta_1$, ficamos com

$$\xi^3 - 3\xi + 1 = 0$$

que é a equação que determina θ_1. No nosso caso específico, temos $\alpha = 1/4$ e, portanto, ficamos com

$$\xi^3 - 3\xi + 1 = 0,$$

cujas soluções são, aproximadamente,

$$1.53,\ -1.88 \text{ e } 0.35,$$

onde apenas a última é aceitável, visto que ξ é um cosseno (não pode ser maior que um em módulo). Assim,

$$\cos\theta_1 = 0.35 \Rightarrow \sin^2\theta_1 = 0.88$$

e $\theta_1 \simeq 70^o$. Para este caso, o potencial fica

$$\varphi = \left\{\frac{mg}{\pi\varepsilon_0\left(K-1\right)}\frac{1-0.88\left(0.65\right)}{0.88\left(0.65\right)}\right\}^{1/2} = \left[\frac{0.74mg}{\pi\varepsilon_0\left(K-1\right)}\right]^{1/2}.$$

- **Exercício 6.23:** Temos que escrever $U = \frac{1}{2}C\left(x\right)\left(\Delta\varphi\right)^2$. Lembremo-nos que, para este problema, a diferença de potencial $\Delta\varphi$ está sendo mantida (pela bateria) como constante. Temos, entretanto, que calcular a capacitância $C\left(x\right)$ do capacitor quando o dielétrico está introduzido por uma distância x. Ora, o problema 6.19 nos mostra como devemos calcular esta capacitância. Diferentemente daquele problema, entretanto, não se trata de manter a **carga** total constante, já que há uma bateria envolvida, mas sim $\Delta\varphi$ deve ser considerado constante. Podemos entender este problema como capacitores **em paralelo**, de tal modo que

$$C\left(x\right) = C_1\left(x\right) + C_2\left(x\right),$$

sendo que o primeiro capacitor possui um dielétrico em seu interior e o segundo capacitor possui o vácuo (ar). Assim, para o primeiro, obtemos

$$C_1\left(x\right) = \frac{\varepsilon x w}{d}$$

enquanto que, para o segundo, obtemos

$$C_2(x) = \frac{\varepsilon_0 (l-x)}{d}$$

O resultado final para o potencial total será, portanto,

$$\begin{aligned} U &= \frac{1}{2}\left[C_1(x) + C_2(x)\right](\Delta\varphi)^2 = \\ &= \frac{1}{2}\frac{\varepsilon x w}{d}(\Delta\varphi)^2 + \frac{1}{2}\frac{\varepsilon_0 (l-x)\, w}{d}(\Delta\varphi)^2 = \\ &= \frac{1}{2}\varepsilon\left(\frac{\Delta\varphi}{d}\right)^2 dwx + \frac{1}{2}\varepsilon_0\left(\frac{\Delta\varphi}{d}\right)^2 dw\,(x-l) \end{aligned}$$

que é exatamente o mesmo resultado obtido no livro.

- **Exercício 6.24:** Temos que

$$U = \frac{1}{2}C(\Delta\varphi)^2$$

e $Q = C(x)\,\Delta\varphi$. A força calculada mantendo-se $\Delta\varphi$ constante pode ser imediatamente calculada como sendo

$$F = \left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)_{\Delta\varphi} = \frac{1}{2}\frac{dC(x)}{dx}(\Delta\varphi)^2.$$

A força calculada mantendo-se Q constante pode ser calculada se fizermos uma substituição na primeira expressão de modo a escrevê-la em germos apenas da carga e de $C(x)$. Assim, ficamos com

$$U = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C(x)}$$

de modo que a força fica

$$F = -\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)_{Q} = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C(x)^2}\frac{dC(x)}{dx}.$$

Se notarmos agora que

$$\frac{Q^2}{C(x)^2} = (\Delta\varphi)^2,$$

teremos imediatamente a igualdade que procuramos.

- **Exercício 6.25:** Devemos notar (como aponta a sugestão do livro) que agora é o vetor deslocamento $\vec{D}$ que é praticamente constante ao longo do capacitor. Assim, temos

$$D = \frac{\varepsilon_0 \Delta\varphi}{d}$$

e a energia eletrostática fica

$$U = \frac{1}{2\varepsilon}\int_V D^2 d\vec{r} = \frac{1}{2\varepsilon}\varepsilon_0^2\frac{(\Delta\varphi)^2}{d}wx + \frac{1}{2\varepsilon_0}\varepsilon_0^2\frac{(\Delta\varphi)^2}{d}w\,(l-x)$$

onde o primeiro termo possui um ε no denominador por estarmos no interior do dielétrico, enquanto que o segundo possui um ε_0 por estarmos no ar (note, entretanto, que D é sempre o mesmo, em ambos os casos). A força, portanto, fica

$$\begin{aligned} F_x &= \left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)_{\Delta\varphi} = \frac{\varepsilon_0}{2}\left(\frac{\varepsilon_0-\varepsilon}{\varepsilon}\right)\left(\frac{\Delta\varphi}{d}\right)^2 wd \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{K}-1\right)\varepsilon_0 E^2 A, \end{aligned}$$

onde $A = wd$ e $E = \Delta\varphi/d$, como implicado pela fórmula para D.

1 Capítulo 7:

- **Exercício 7.3:** Sabemos que as diferenças de potencial entre as placas mais externas e a placa que se encontra na fronteira entre os meios são dadas por

$$\begin{aligned} \varphi_2 - \varphi &= \Delta\varphi_2 = E_2 (d-a) \\ \varphi - \varphi_1 &= \Delta\varphi_1 = E_1 a \end{aligned}$$

Como os meios são condutores, devemos ter

$$J_{1n} = J_{2n},$$

ou seja,

$$g_1 E_1 = g_2 E_2.$$

Assim,

$$g_2 \frac{\varphi_2 - \varphi}{d-a} = g_1 \frac{\varphi - \varphi_1}{a}$$

dando

$$\varphi \left[g_1 (d-a) + g_2 a \right] = \varphi_1 g_1 (d-a) + \varphi_2 g_2 a$$

dando

$$\varphi = \frac{\varphi_1 g_1 (d-a) + \varphi_2 g_2 a}{\left[g_1 (d-a) + g_2 a \right]}.$$

Temos ainda que as cargas que cada um dos subsistemas acumula são dadas por

$$Q_1 = C_1 \Delta\varphi_1 \text{ e } Q_2 = C_2 \Delta\varphi_2,$$

onde as capacitâncias ficam

$$C_1 = \frac{\varepsilon_1 A}{a} \text{ e } C_2 = \frac{\varepsilon_2 A}{(d-a)}.$$

Assim, como a carga total na placa intermediária é a soma de Q_1 com Q_2 (as cargas induzidas nesta placa por cada subsistema), temos (Note o sinal da carga Q_2. você consegue explicar por que este sinal é negativo?)

$$\begin{aligned} Q &= Q_1 - Q_2 = C_1 (\varphi - \varphi_1) - C_2 (\varphi_2 - \varphi) \\ &= \varphi (C_1 + C_2) - (C_1 \varphi_1 + C_2 \varphi_2) \\ &= \frac{\varphi_1 g_1 (d-a) + \varphi_2 g_2 a}{\left[g_1 (d-a) + g_2 a \right]} (C_1 + C_2) - (C_1 \varphi_1 + C_2 \varphi_2) \\ &= \frac{-\varphi_1 \left[g_1 (d-a) C_2 - g_2 a C_1 \right] + \varphi_2 \left[g_2 a C_1 - g_1 (d-a) C_2 \right]}{\left[g_1 (d-a) + g_2 a \right]} \\ &= \frac{(\varphi_2 - \varphi_1) \left[g_1 (d-a) C_2 - g_2 a C_1 \right]}{\left[g_1 (d-a) + g_2 a \right]} \\ &= \frac{(\varphi_2 - \varphi_1) \left[g_1 \varepsilon_2 - g_2 \varepsilon_1 \right] A}{\left[g_1 (d-a) + g_2 a \right]} \end{aligned}$$

Este último resultado pode ser escrito como

$$\sigma = \frac{Q}{A} = \frac{\left[g_1\varepsilon_2 - g_2\varepsilon_1\right](\varphi_2 - \varphi_1)}{\left[g_1\left(d-a\right) + g_2 a\right]},$$

que é o resultado desejado. Note que se tivermos $\varepsilon_2 = \varepsilon_1 = g_2 = g_1$, ou seja, meios idênticos, então, como esperado, não poderíamos ter acúmulo de carga na interface. Mais interessante é notar que se tivermos

$$\frac{g_1}{\varepsilon_1} = \frac{g_2}{\varepsilon_2}$$

também teríamos $\sigma = 0$. Lembre-se que

$$RC = \frac{\varepsilon}{g},$$

de modo que tudo funciona como se a parte da capacitância fosse 'compensada' pela resistência do meio.

- **Exercício 7.4:** Sabemos já que vale a identidade vetorial

$$\nabla \cdot \left(f\vec{F}\right) = f\nabla\cdot\vec{F} + \vec{F}\cdot\nabla f.$$

Agora coloque:

$$\nabla \cdot \left(x\vec{F}\right) = x\nabla\cdot\vec{F} + F_x$$

e também

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \left(y\vec{F}\right) &= y\nabla\cdot\vec{F} + F_y \\ \nabla \cdot \left(z\vec{F}\right) &= z\nabla\cdot\vec{F} + F_z\end{aligned}$$

e agora monte a soma

$$\widehat{i}\nabla \cdot \left(x\vec{F}\right) + \widehat{j}\nabla \cdot \left(y\vec{F}\right) + \widehat{k}\nabla \cdot \left(z\vec{F}\right) = \widehat{i}x\nabla\cdot\vec{F} + \widehat{i}F_x +$$

$$\widehat{j}y\nabla\cdot\vec{F} + \widehat{j}F_y + \widehat{k}z\nabla\cdot\vec{F} + \widehat{k}F_z = \vec{r}\nabla\cdot\vec{F} + \vec{F}.$$

Coloque agora $\vec{F} = \vec{J}$ para escrever

$$\int_V \left(\vec{r}\nabla\cdot\vec{J} + \vec{J}\right) dV = \int_V \left[\widehat{i}\nabla\cdot\left(x\vec{J}\right) + \widehat{j}\nabla\cdot\left(y\vec{J}\right) + \widehat{k}\nabla\cdot\left(z\vec{J}\right)\right] dV.$$

Em cada um dos termos à direita, use o teorema da divergência, para ficar com

$$\begin{aligned}\int_V \left(\vec{r}\nabla\cdot\vec{J} + \vec{J}\right) dV &= \int_S \left[\widehat{i}x\left(\vec{J}\cdot\widehat{n}\right) + \widehat{j}y\left(\vec{J}\cdot\widehat{n}\right) + \widehat{k}z\left(\vec{J}\cdot\widehat{n}\right)\right] da \\ &= \int_S \left(\widehat{i}x + \widehat{j}y + \widehat{k}z\right)\left(\vec{J}\cdot\widehat{n}\right) da \\ &= \int_S \vec{r}\left(\vec{J}\cdot\widehat{n}\right) da\end{aligned}$$

Assim, provamos o resultado

$$\int_V \vec{J} dV = \int_S \vec{r}\left(\vec{J}\cdot\hat{n}\right) da - \int_V \vec{r}\nabla\cdot\vec{J} dV.$$

Agora, temos que

$$\vec{p} = \int_V \vec{r}\rho\left(\vec{r}\right) dV.$$

Assim,

$$\begin{aligned}\frac{d\vec{p}}{dt} &= \frac{d}{dt}\int_V \vec{r}\rho\left(\vec{r}\right) dV = \int_V \vec{r}\frac{\partial\rho\left(\vec{r}\right)}{\partial t} dV \\ &= -\int_V \vec{r}\nabla\cdot\vec{J} dV\end{aligned}$$

Como $\vec{J}$ é nulo na superfície S, então podemos usar a expressão anterior para escrever

$$\int_V \vec{J} dV = -\int_V \vec{r}\nabla\cdot\vec{J} dV,$$

já que a integral sobre S se anula. Então, pelo resultado anterior

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \int_V \vec{J} dV,$$

que é o resultado esperado.

- **Exercício 7.7:** As cascas cilíndricas têm raios r_1 e r_2, $r_2 > r_1$ e são mantidas à diferença de potencial $\Delta\varphi$. Entre as cascas há um meio de condutividade g. Sabemos que vale a Lei de Ohm $\vec{J} = g\vec{E}$,o que implica, como já vimos, que

$$I = \frac{\Delta\varphi}{R}$$

e precisamos calcular R. Para calculá-lo, notamos que temos

$$Q = C\Delta\varphi$$

e

$$RC = \frac{\varepsilon}{g}$$

de modo que

$$R = \frac{\varepsilon}{gC}.$$

Assim, finalmente

$$I = \frac{g\Delta\varphi}{\varepsilon}C$$

e precisamos meramente calcular C para a configuração em questão. Note que temos

$$\varphi = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon}\ln\left(r/r_1\right) + \varphi_0,$$

de modo que

$$\Delta\varphi = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon}\ln\left(r_2/r_1\right),$$

ou seja

$$C = \frac{\lambda}{\Delta\varphi} = \frac{2\pi\varepsilon}{\ln\left(r_2/r_1\right)}.$$

Assim, ficamos com

$$I = \frac{2\pi g\Delta\varphi}{\ln\left(r_2/r_1\right)},$$

que era o resultado procurado. O exercício foi feito sem usar a Lei de Ohm diretamente. Para usá-la, seria necessário partir diretamente da lei $\vec{J} = g\vec{E}$ e calcular $\vec{E}$ para esta configuração, lembrando que $I = \int_S \vec{J}\cdot\hat{n}da$. Assim, ficamos com

$$I = \frac{\Delta\varphi}{R} = g\int_S \vec{E}\cdot\hat{n}da = \frac{Qg}{\varepsilon}.$$

Mas então,

$$R\left(\frac{Q}{\Delta\varphi}\right) = \frac{\varepsilon}{g},$$

ou seja,

$$RC = \frac{\varepsilon}{g}.$$

- **Exercício 7.9:** Podemos, como já vimos, usar o método das imagens para substituir o sistema 'plano condutor'+'fio' (cilindro) pelo sistema 'linha'+'linha' de tal modo que o plano condutor se localize no centro geométrico entre as linhas (e esteja a potencial nulo) enquanto que o cilindro é escolhido para ocupar uma das equipotenciais do problema (aquela com o seu raio a). Já vimos, no capítulo 3 e no capítulo anterior, como encontrar o raio e a posição do cilindro com relação à linha. Tínhamos

$$x_c = \frac{2M^2d}{1-M^2} \text{ e } r_c = \frac{2Md}{1-M^2},$$

se colocarmos uma das linhas sobre a origem de nosso sistema de coordenadas. Notemos que

$$M^2 = \exp\left(4\pi\varepsilon\varphi/\lambda\right)$$

de modo que obtemos

$$\frac{\varphi}{\lambda} = C^{-1} = \frac{\cosh^{-1}\left(h/a\right)}{2\pi\varepsilon},$$

onde C é a capacitância por unidade de comprimento. Como sabemos que $RC = \varepsilon/g$, ficamos com

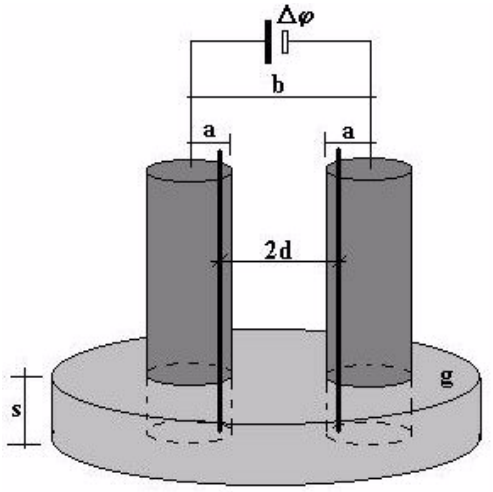
$$R = \frac{\varepsilon}{g}\frac{\cosh^{-1}(h/a)}{2\pi\varepsilon}$$

e, portanto,

$$R = \frac{1}{2\pi g}\cosh^{-1}\left(\frac{h}{a}\right),$$

que era a expressão a ser obtida.

- **Exercício 7.11:** Já vimos, à exaustão, que dois cilindros podem ser substituídos por duas linhas de densidade linear de carga λ e $-\lambda$, visto que as mesmas produzem curvas equipotenciais que são cilíndricas no plano que lhes é perpendicular. Confira a figura abaixo



Ora, sabemos que se colocamos duas linhas de carga, de densidade linear de carga λ e $-\lambda$, distantes por uma distância $2d$, então os centros dos cilindros estão posicionados a uma distância

$$x_c = \frac{2M^2 d}{1-M^2}$$

de cada uma delas ('para fora', como mostra a figura). Assim, sabemos que

$$b = 2d + 2x_c = \frac{2(1-M^2)d + 4M^2 d}{1-M^2} = \frac{1+M^2}{1-M^2}2d.$$

Os raios dos cilindros são dados por

$$a = \frac{M}{(1-M^2)}2d.$$

Assim, obtemos que

$$\frac{b}{2a} = \frac{1+M^2}{2M}.$$

Lembrando que $M = \exp(-2\pi\varepsilon\varphi/\lambda)$, chegamos ao resultado

$$M = \frac{b}{2a} + \sqrt{\left(\frac{b}{2a}\right)^2 - 1}$$

e, portanto,

$$\frac{\varphi}{\lambda} = \frac{1}{2\pi\varepsilon}\cosh^{-1}\left(\frac{b}{2a}\right)$$

ou

$$\frac{\lambda}{\varphi} = \frac{2\pi\varepsilon}{\cosh^{-1}(b/2a)}$$

e como $(Q = \lambda s)$

$$\frac{Q}{s\varphi} = \frac{2\pi\varepsilon}{\cosh^{-1}(b/2a)}$$

ou

$$C = \frac{Q}{\varphi} = \frac{2\pi\varepsilon s}{\cosh^{-1}(b/2a)};$$

mas como

$$RC = \frac{\varepsilon}{g},$$

então

$$R = \frac{\cosh^{-1}(b/2a)}{2\pi g s}$$

e como

$$\Delta\varphi = RI,$$

ficamos com

$$I = \frac{2\pi g s \Delta\varphi}{\cosh^{-1}(b/2a)}$$

- **Capítulo 8**

- **Exercício 8.1:** Coloquemos a indução magnética uniforme $\vec{B}$ na direção z. Suponha agora que uma partícula entre neste campo com velocidade $\vec{v}$. Sabemos que a força que irá atuar sobre a partícula (de massa m e carga q) é dada por

$$\vec{F}_m = q\vec{v} \times \vec{B}$$

ou seja, se tomarmos $\vec{v} = \vec{v}_\perp + \vec{v}_{||}$, onde $\vec{v}_\perp$ representa a velocidade perpendicular a $\vec{B}$ e $\vec{v}_{||}$ representa a velocidade paralela a $\vec{B}$, então temos que

$$\vec{F}_m = q\vec{v}_\perp \times \vec{B}.$$

Assim, em módulo, temos $F_m = qv_\perp B$. A força será exercida numa direção que é perpendicular tanto a $\vec{B}$ quanto a $\vec{v}_\perp$ (e, assim, perpendicular também a $\vec{v}_{||}$). Esta força será, portanto, uma força centrípeta constante e teremos, em módulo

$$qv_\perp B = \frac{mv_\perp^2}{R},$$

de modo que o raio da trajetória ficará

$$R = \frac{mv_\perp}{qB}.$$

Notamos que a trajetória será uma *hélice*, já que a velocidade $\vec{v}_{||}$ não está sendo afetada pela existência da indução magnética.

- **Exercício 8.2:** O Hamiltoniano dado é

$$H = \frac{p^2}{2m} - \frac{qB}{2m}\left(xp_y - yp_x\right) + \frac{q^2B^2}{8m}\left(x^2 + y^2\right).$$

Note que o segundo termo à direita é um *acoplamento* entre a indução magnética (na direção z) e o momento angular nesta mesma direção, dado por

$$\frac{q}{2m}\vec{B}\cdot\vec{L} = \frac{q}{2m}BL_z = \frac{qB}{2m}\left(xp_y - yp_x\right).$$

Assim, fica claro que $R^2 = x^2 + y^2$, visto ser o plano xy perpendicular à direção de $\vec{B}$. Agora, as equações de Hamilton ficam

$$\frac{\partial H}{\partial p_x} = \frac{p_x}{m} + \frac{qBy}{2m} = \dot{x},\ \frac{\partial H}{\partial p_y} = \frac{p_y}{m} - \frac{qBx}{2m} = \dot{y},\ \frac{\partial H}{\partial p_z} = \frac{p_z}{m} = \dot{z},$$

além de

$$\frac{\partial H}{\partial x} = \frac{-qB}{2m}p_y + \frac{q^2B^2}{4m}x = -\dot{p}_x,\ \frac{\partial H}{\partial y} = \frac{qB}{2m}p_x + \frac{q^2B^2}{4m}y = -\dot{p}_y,\ \frac{\partial H}{\partial z} = 0 = -\dot{p}_z.$$

As equações ficam

$$\left\{\begin{array}{l} \dot{x} = \frac{p_x}{m} + \frac{qBy}{2m} \\ \dot{y} = \frac{p_y}{m} - \frac{qBx}{2m} \\ \dot{p}_x = \frac{qB}{2m} p_y - \frac{q^2B^2}{4m} x \\ \dot{p}_y = \frac{-qB}{2m} p_x - \frac{q^2B^2}{4m} y \end{array}\right. .$$

Construa agora o *vetor simplético* $\vec{\eta}$ dado por (vamos treinar aqui um pouco de mecânica clásica)

$$\vec{\eta} = \left(\begin{array}{c} x \\ y \\ p_x \\ p_y \end{array} \right)$$

tal que

$$\dot{\vec{\eta}} = \left(\begin{array}{c} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{p}_x \\ \dot{p}_y \end{array} \right) = \left(\begin{array}{cccc} 0 & \frac{qB}{2m} & \frac{1}{m} & 0 \\ -\frac{qB}{2m} & 0 & 0 & \frac{1}{m} \\ -\frac{q^2B^2}{4m} & 0 & 0 & \frac{qB}{2m} \\ 0 & -\frac{q^2B^2}{4m} & \frac{-qB}{2m} & 0 \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} x \\ y \\ p_x \\ p_y \end{array} \right) .$$

Ora, sabemos que a solução de um problema do tipo

$$\dot{\vec{\eta}} = \mathbf{A} \cdot \vec{\eta}$$

onde $\mathbf{A}$ é um tensor, é dada por

$$\vec{\eta} = \vec{\eta}_0 \exp(\lambda t) ,$$

onde λ é um autovalor da matriz $\mathbf{A}$. Note que, neste caso, temos os autovalores e autovetores (degenerescência dupla em 0)

$$\begin{aligned} \lambda_{1,2} &= 0,\ \vec{\eta}_1 = \left(1, 0, 0, \frac{qB}{2}\right),\ \vec{\eta}_2 = \left(0, 1, -\frac{qB}{2}, 0\right) \\ \lambda_3 &= \frac{iqB}{m}, \vec{\eta}_3 = \left(1, i, -\frac{iqB}{2}, -\frac{qB}{2}\right) \\ \lambda_4 &= \frac{-iqB}{m}, \vec{\eta}_4 = \left(1, -i, \frac{iqB}{2}, -\frac{qB}{2}\right) \end{aligned}$$

de modo que teremos soluções do tipo (para os autovalores λ_3 e/ou λ_4 – que diferem apenas pela direção do movimento circular)

$$x = R \sin\left(\frac{qB}{m} t + \delta_x\right),\ y = R \cos\left(\frac{qB}{m} t + \delta_y\right),$$

com velocidade angular

$$\omega = \frac{qB}{m}.$$

Mas note que $\omega R = v_\perp$, de modo que

$$\frac{v_\perp}{R} = \frac{qB}{m} \Rightarrow R = \frac{mv_\perp}{qB},$$

como esperado. Note que $p_z = const.$, ou seja, o movimento na direção z se dá com velocidade constante.

- **Exercício 8.4:** Temos que a fórmula (8.25) é dada por

$$\vec{F}_2 = \frac{\mu_0}{4\pi} I_1 I_2 \oint_1 \oint_2 \frac{d\vec{l}_1 \times \left[d\vec{l}_2 \times (\vec{r}_2 - \vec{r}_1) \right]}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|^3}.$$

Podemos fazer o produto vetorial triplo indicado para obter

$$d\vec{l}_1 \times \left[d\vec{l}_2 \times (\vec{r}_2 - \vec{r}_1) \right] = d\vec{l}_2 \left(d\vec{l}_1 \cdot (\vec{r}_2 - \vec{r}_1) \right) - (\vec{r}_2 - \vec{r}_1) \left(d\vec{l}_1 \cdot d\vec{l}_2 \right)$$

Assim, temos

$$\vec{F}_2 = -\frac{\mu_0}{4\pi} I_1 I_2 \oint_1 \oint_2 \frac{(\vec{r}_2 - \vec{r}_1)}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|^3} d\vec{l}_1 \cdot d\vec{l}_2 + \oint_2 d\vec{l}_2 \oint_1 \nabla \left(\frac{1}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|} \right) \cdot d\vec{l}_1.$$

Note, agora, que

$$\oint_1 \nabla \left(\frac{1}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|} \right) \cdot d\vec{l}_1 = 0,$$

visto que a integral de linha é tomada sobre uma curva fechada. Assim, ficamos com

$$\vec{F}_2 = -\frac{\mu_0}{4\pi} I_1 I_2 \oint_1 \oint_2 \frac{(\vec{r}_2 - \vec{r}_1)}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|^3} d\vec{l}_1 \cdot d\vec{l}_2,$$

que é o resultado esperado.

- **Exercício 8.5: (em andamento)** Temos que

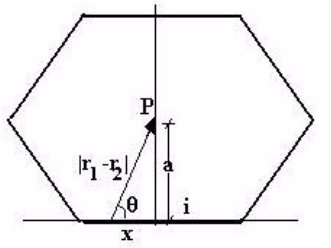
$$\vec{F} = I_2 \oint_2 d\vec{l}_2 \times \vec{B}(\vec{r}_2),$$

visto que

$$\vec{B}(\vec{r}_2) = \frac{\mu_0}{4\pi} I_1 \oint_1 \frac{d\vec{l}_1 \times (\vec{r}_2 - \vec{r}_1)}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|^3}$$

e onde usamos a lei de Biot e Savart. Etc.

- **Exercício 8.7:** Podemos usar os resultados já obtidos a partir do texto do livro, notando agora que temos os ângulos $\theta_1 = 60^o$ e $\theta_2 = 120^o$ e que $a \to a \tan(60^o)/2 = a\sqrt{3}$ (veja a figura a seguir).



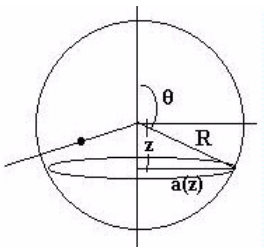
Assim, o resultado fica, somando-se a contribuição de cada fio (6 fios)

$$B\left(0,0,0\right)=6\frac{\mu_0 I}{2\pi a\sqrt{3}}=\frac{\mu_0 I\sqrt{3}}{\pi a}.$$

- **Exercício 8.9:** Já sabemos calcular o campo associado a uma espira. Temos que

$$\vec{B}\left(0,0,0\right)=\frac{\mu_0 I}{2}\frac{a^2}{\left(z^2+a^2\right)^{3/2}}\mathbf{k},$$

onde notamos que agora o valor de a também é variável (vai de $a=0$, nos pólos, até $a=R$ no meridiano — cf. a figura a seguir).



De fato, $a=R\sin\theta$, com θ variando desde 0 até π (centro da esfera no plano xy). Note ainda que $z=R\cos\theta$, de modo que (dz contém $Ndz/2R$ espiras)

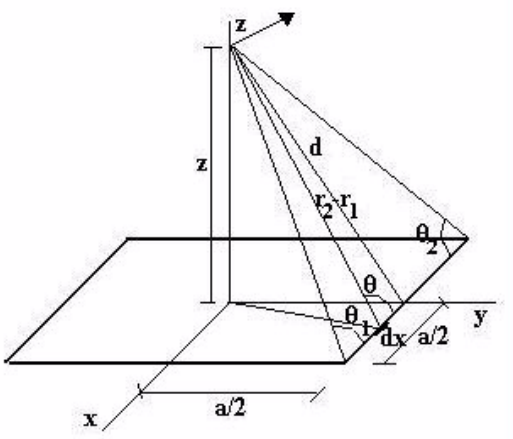
$$\vec{B}\left(0,0,0\right)=\frac{\mu_0 NI}{4R}\int_{-R}^{+R}\frac{a\left(z\right)^2}{\left(z^2+a\left(z\right)^2\right)^{3/2}}dz\mathbf{k}=-\frac{\mu_0 NI}{4R}\int_0^{\pi}\sin^3\theta d\theta\mathbf{k}$$

Assim, o campo total no centro da esfera fica dado por

$$\begin{aligned}\vec{B}\left(0,0,0\right) &= -\frac{\mu_0 NI}{4R}\int_0^{\pi}\sin^3\theta d\theta=-\frac{\mu_0 NI}{4R}\int_0^{\pi}\left(1-\cos^2\theta\right)\sin\theta d\theta\\ &= \frac{\mu_0 NI}{4R}\frac{4}{3}=\frac{\mu_0 NI}{3R}.\end{aligned}$$

Note que, no livro, a resposta é dada por um fator 4 no denominador, não 3 como encontramos. Não creio, entretanto, que a resolução aqui desenvolvida esteja errada, a diferença devendo-se, portanto, a um possível erro ortográfico do livro.

- **Exercício 8.11:** Note que temos primeiramente que obter o campo devido a *uma* espira quadrada de lado a. Assim, considere a figura a seguir



Vamos resolver este exercício usando notação vetorial *tout court*, como forma de aplicação da lei de Biot Savart. Assim, considerando a figura, vemos que, para o fio da direita temos

$$\begin{aligned} d\vec{l}_1^{(d)} &= -dx\hat{\imath},\ \vec{r}_1^{(d)} = x\hat{\imath} + \frac{a}{2}\hat{\jmath},\ \vec{r}_2^{(d)} = a\hat{k} \\ \left(\vec{r}_2 - \vec{r}_1\right)^{(d)} &= -x\hat{\imath} - \frac{a}{2}\hat{\jmath} + z\hat{k} \\ d\vec{l}_1^{(d)} \times \left(\vec{r}_2 - \vec{r}_1\right)^{(d)} &= -dx\left[\hat{\imath} \times \left(-x\hat{\imath} - \frac{a}{2}\hat{\jmath} + z\hat{k}\right)\right] = \frac{a}{2}dx\hat{k} + zdx\hat{\jmath} \end{aligned}$$

enquanto que para o fio da esquerda temos

$$\begin{aligned} d\vec{l}_1^{(e)} &= dx\hat{\imath},\ \vec{r}_1^{(e)} = x\hat{\imath} - \frac{a}{2}\hat{\jmath},\ \vec{r}_2^{(e)} = a\hat{k} \\ \left(\vec{r}_2 - \vec{r}_1\right)^{(e)} &= -x\hat{\imath} + \frac{a}{2}\hat{\jmath} + z\hat{k} \\ d\vec{l}_1^{(e)} \times \left(\vec{r}_2 - \vec{r}_1\right)^{(e)} &= -dx\left[\hat{\imath} \times \left(-x\hat{\imath} + \frac{a}{2}\hat{\jmath} + z\hat{k}\right)\right] = -\frac{a}{2}dx\hat{k} + zdx\hat{\jmath} \end{aligned}$$

sendo que no fio da direita estamos integrando de $a/2$ até $-a/2$, enquanto que no ramo da esquerda estamos integrando de $-a/2$ até $a/2$. Assim, ficamos com o termo associado à contribuição dos dois fios à indução magnética $\vec{B}$ dando

$$\begin{aligned} \vec{B}(z) &= \frac{\mu_0 I}{4\pi}\int_{+a/2}^{-a/2} \frac{d\vec{l}_1^{(d)} \times \left(\vec{r}_2 - \vec{r}_1\right)^{(d)}}{\left|\vec{r}_2 - \vec{r}_1\right|^3} + \frac{\mu_0 I}{4\pi}\int_{-a/2}^{+a/2} \frac{d\vec{l}_1^{(e)} \times \left(\vec{r}_2 - \vec{r}_1\right)^{(e)}}{\left|\vec{r}_2 - \vec{r}_1\right|^3} \\ &= \frac{\mu_0 I}{4\pi}\int_{+a/2}^{-a/2} \frac{\left(a/2\hat{k} + z\hat{\jmath}\right)dx}{\left[x^2 + z^2 + a^2/4\right]^{3/2}} + \frac{\mu_0 I}{4\pi}\int_{-a/2}^{+a/2} \frac{\left(-a/2\hat{k} + z\hat{\jmath}\right)dx}{\left[x^2 + z^2 + a^2/4\right]^{3/2}} \\ &= \frac{-\mu_0 I a}{4\pi}\int_{-a/2}^{+a/2} \frac{dx}{\left[x^2 + z^2 + a^2/4\right]^{3/2}}\hat{k}. \end{aligned}$$

Agora, para os fios que estão 'atrás' e 'na frente' da espira teríamos exatamente a mesma construção, exceto pelo aparecimento da variável y no lugar de x. Assim, ficamos com a contribuição total da espira dada por

$$\vec{B}(z) = \frac{-\mu_0 I a}{2\pi} \int_{-a/2}^{+a/2} \frac{dx}{\left[x^2 + z^2 + a^2/4\right]^{3/2}} \hat{k},$$

cujo resultado, após integração, fica

$$\begin{aligned} \vec{B}(z) &= \frac{-\mu_0 I a}{2\pi} \frac{a}{\left(\frac{a^2}{4} + z^2\right)\left(\frac{a^2}{2} + z^2\right)^{1/2}} \hat{k} \\ &= \frac{-\mu_0 I}{2\pi} \frac{a^2}{\left(\frac{a^2}{4} + z^2\right)\left(\frac{a^2}{2} + z^2\right)^{1/2}} \hat{k}. \end{aligned}$$

Agora, esta é a indução magnética no ponto z devido a *uma única* espira quadrada. Se temos um solenóide *comprido* (infinito), com N espiras, então, no comprimento dz temos Ndz/L espiras e a contribuição do elemento dz para a indução magnética do solenóide fica

$$d\vec{B}(z_0) = \frac{-\mu_0 N I}{2\pi L} \frac{a^2 dz}{\left[\frac{a^2}{4} + (z - z_0)^2\right]\left[\frac{a^2}{2} + (z - z_0)^2\right]^{1/2}} \hat{k}$$

de modo que

$$\vec{B}(z_0) = \frac{-\mu_0 N I a^2}{2\pi L} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dz}{\left[\frac{a^2}{4} + (z - z_0)^2\right]\left[\frac{a^2}{2} + (z - z_0)^2\right]^{1/2}} \hat{k}.$$

Para fazer esta integral, coloque

$$z - z_0 = \frac{a}{\sqrt{2}} \tan\xi, dz = \frac{a}{\sqrt{2}} \sec^2\xi d\xi$$

para ficar com

$$\vec{B}(z_0) = \frac{-\mu_0 N I}{\pi L} \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \frac{\sec\xi}{\left[\frac{1}{2} + \tan^2\xi\right]} d\xi \hat{k} = \frac{-\mu_0 N I}{L} \hat{k},$$

que é o resultado esperado, a menos de um sinal devido à escolha da direção da corrente, obviamente (na resposta do livro falta o termo L que tem que aparecer, evidentemente, já que, caso contrário, teríamos um problema de dimensionalidade para a indução magnética).

- **Exercício 8.12:** Temos que, em coordenadas esféricas

$$\vec{B}(z) = \frac{\mu_0 I}{2} \frac{a^2}{(z^2 + a^2)^{3/2}} \tilde{\mathbf{k}},$$

Podemos escrever o divergente, em coordenadas cilíndricas como sendo

$$\nabla \cdot \vec{B} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(rB_r\right) + \frac{1}{r}\frac{\partial B_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial B_z}{\partial z} = 0,$$

de modo que ficamos com

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(rB_r\right) = -\frac{\mu_0 I}{2}\frac{3za^2r}{\left(z^2+a^2\right)^{5/2}}.$$

Agora, como $r \simeq z$, podemos, em primeira aproximação, colocar na expressão acima, $z = r$ para ficar com

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(rB_r\right) = -\frac{\mu_0 I}{2}\frac{3r^2a^2}{\left(r^2+a^2\right)^{5/2}}$$

que, por integração, ficamos com

$$\begin{aligned} B_r &= -\frac{3a^2}{r}\frac{\mu_0 I}{2}\int \frac{r^2dr}{\left(r^2+a^2\right)^{5/2}} \\ &= \frac{\mu_0 I}{2r}\frac{r^3}{3\left(r^2+a^2\right)^{3/2}} = \frac{\mu_0 I}{6}\frac{r^2}{\left(r^2+a^2\right)^{3/2}}. \end{aligned}$$

Ou seja,

$$B_r = \frac{\mu_0 I}{6}\frac{r^2}{\left(r^2+a^2\right)^{3/2}}.$$

- **Exercício 8.13:** Sabemos que $B_z\left(\rho, z\right)$ é decrescente com ρ. Assim, à media em que vamos saindo para os lados do magneto trapezoidal, a indução magnética na direção z vai diminuindo (confira a figura a seguir).

  (a) Tomando o rotacional de $\vec{B}$ temos que

$$\nabla \times \vec{B} = \left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial B_z}{\partial \theta} - \frac{\partial B_\theta}{\partial z}\right)\hat{\rho} + \left(\frac{\partial B_\rho}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial \rho}\right)\hat{\theta} + \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial\left(\rho B_\theta\right)}{\partial \rho} - \frac{\partial B_\rho}{\partial \theta}\right)\hat{k} = 0$$

  e, portanto,

$$\frac{\partial B_\rho}{\partial z} = \frac{\partial B_z}{\partial \rho} < 0.$$

  Assim, concluímos que B_ρ decresce com z. Agora considere a figura anterior onde apresentamos uma única linha de indução magnética. Sabemos que sobre o plano mediano temos $B_\rho = 0$ e também que $\partial B_\rho/\partial z = 0$. Então, devemos ter, acima do plano mediano, uma componente $B_\rho > 0$ e, abaixo do plano, $B_\rho < 0$, exatamente como mostrado ali. A linha de campo é a composição desta componente B_ρ com a componente B_z, o que dá o formato desejado para a linha de indução.

(b) Na figura anterior também apresentamos duas possibilidades para a corrente I (aqui não importa a direção do movimento da partícula, ou sua carga, mas apenas a direção da corrente, que é a mesma direção de $d\vec{l}$. Sabemos que a força é dada por

$$\vec{F} = -I \oint \vec{B} \times d\vec{l};$$

assim, é fácil ver para as duas correntes ali apresentadas, que sempre teremos a força $\vec{F}$ na direção do plano mediano (devido à alteração da direção da indução magnética, quando passamos pelo palno). As outras duas possibilidades estariam relacionadas com as direções opostas da corrente. O leitor pode verificar que o resultado será o mesmo.

- **Exercício 8.14:** (a) Temos que a equação (8.30) é dada por $\nabla \cdot \vec{B} = 0$. Se tivermos

$$\vec{B} = \frac{\vec{r}}{r} \times \nabla g\left(x, y, z\right),$$

então, teremos

$$\nabla \cdot \vec{B} = \nabla \cdot \left[\frac{\vec{r}}{r} \times \nabla g\left(x, y, z\right)\right] = \left[\nabla \times \left(\frac{\vec{r}}{r}\right)\right] \cdot \nabla g - \left[\nabla \times \nabla g\right] \cdot \frac{\vec{r}}{r}.$$

Lembrando que $\nabla \times (\vec{r}/r) = 0$ e que o rotacional de um gradiente é nulo, temos o resultado final. (b) Para encontrar a densidade de corrente, basta que façamos

$$\mu_0 \vec{J} = \nabla \times \vec{B}.$$

Assim,

$$\mu_0 \vec{J} = \nabla \times \left[\frac{\vec{r}}{r} \times \nabla g\left(x, y, z\right)\right] =$$

$$\begin{aligned} &= \left(\nabla \cdot \nabla g\right) \frac{\vec{r}}{r} - \left(\nabla \cdot \frac{\vec{r}}{r}\right) \nabla g + \left(\nabla g \cdot \nabla\right) \frac{\vec{r}}{r} - \left(\frac{\vec{r}}{r} \cdot \nabla\right) \nabla g = \\ &= \left(\nabla^2 g\right) \frac{\vec{r}}{r} + 4\pi\delta\left(\vec{r}\right) \nabla g + \left\{\frac{1}{r} \nabla g + \left[\nabla g \cdot \nabla \left(\frac{1}{r}\right)\right] \vec{r}\right\} - \left(\frac{\vec{r}}{r} \cdot \nabla\right) \nabla g. \end{aligned}$$

Algumas simplificações talvez possam ser feitas. Deixamos a cabo do leitor tentá-las. Lembre-se que devemos ter $\nabla \cdot \nabla g = \nabla^2 g = 0$. Assim,

$$\mu_0 \vec{J} = \left(4\pi\delta\left(\vec{r}\right) + \frac{1}{r} - \frac{\vec{r}}{r} \cdot \nabla\right) \nabla g - \left[\nabla g \cdot \frac{\vec{r}}{r}\right] \frac{\vec{r}}{r^2}.$$

- **Exercício 8.15:** Este é um exercício extremamente simples. Já sabemos que devemos ter (se estivermos na aproximação de correntes estacionárias, ou seja, se $\nabla \cdot \vec{J} = -\partial\rho/\partial t = 0$)

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J},$$

de modo que, tomando o rotacional de ambos os lados, temos

$$\nabla \times \nabla \times \vec{B} = \nabla\left(\nabla \cdot \vec{B}\right) - \nabla^2 \vec{B} = \mu_0 \nabla \times \vec{J}.$$

Note que só pudemos tomar $\nabla \times \left(\mu_0 \vec{J}\right) = \mu_0 \nabla \times \vec{J}$ devido à isotropia e homogeneidade do meio magnético. Agora note que, para um meio como o considerado, temos, pela Lei de Ohm,

$$\vec{J} = g\vec{E},$$

de modo que

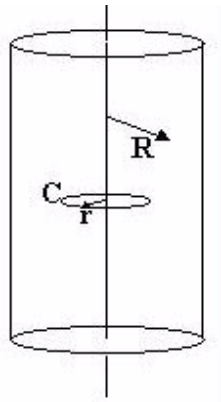
$$g\nabla \times \vec{E} = \nabla \times \vec{J}.$$

Mas como temos $\nabla \times \vec{E} = 0$, então ficamos com (usando que $\nabla \cdot \vec{B} = 0$)

$$\nabla^2 \vec{B} = 0,$$

como queríamos demonstrar.

- **Exercício 8.16:** Neste caso temos uma situação como a mostrada na figura a seguir:



e podemos aplicar a lei circuital de Ampère. Sabemos que a indução magnética, por razões de simetria, deve ser direcionada tangencialmente à qualquer circunferência centrada no eixo que passa pelo centro do condutor. Assim, a forma matemática da lei fica ($d\vec{l} = rd\theta\hat{\theta}$)

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \int_0^{2\pi} Brd\theta = \mu_0 I,$$

onde I é a corrente que passa pelo fio considerado. Note, entretanto, que a corrente I é dada por

$$I = \int_S \vec{J} \cdot \hat{n} da,$$

onde S é a seção reta limitada por C. Assim, se $r > R$, onde R é o raio do condutor, então estamos tomando *toda a seção reta do condutor* e a corrente I é a corrente total. Logo

$$B\,(2\pi r) = \mu_0 I \Rightarrow B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r},\ r \geq R.$$

Por outro lado, se temos $r \leq R$, então apenas *parte* da corrente está sendo considerada (a parte interna à circunferência com raio r). Neste caso, temos

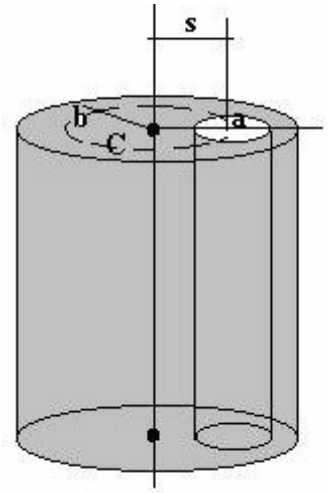
$$I_{in} = I\frac{\pi r^2}{\pi R^2},$$

onde o termo à direita fornece a porcentagem de corrente sendo considerada (o fio é considerado metal homogêneo). Logo, neste caso, ficamos com

$$B\,(2\pi r) = \mu_0 \frac{r^2}{R} \Rightarrow B = \frac{\mu_0 I}{2\pi} r,\ r \leq R.$$

Fica claro desta equação que $B = 0$ se $r = 0$, ou seja, a indução magnética se anula sobre o eixo do fio.

- **Exercício 8.17:** Considere a figura a seguir:



Adotando a sugestão do livro e assumindo que a cavidade carrega densidade de corrente $-\vec{J}$, enquanto que o cilindro carrega densidade de corrente $\vec{J}$, ficamos com (considerando-se a curva C)

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 J \pi s^2,$$

onde fizemos $I = \pi s^2 J$, uma vez que estamos considerando a curva C do cilindro (completo) de raio b para o qual a densidade de corrente é J e esta curva passa pelo centro da cavidade, que fica a uma distância s do centro do cilindro de raio b. A cavidade não contribui, visto que o campo em seu eixo é nulo (veja exercício anterior). Assim, tomando a curva C temos

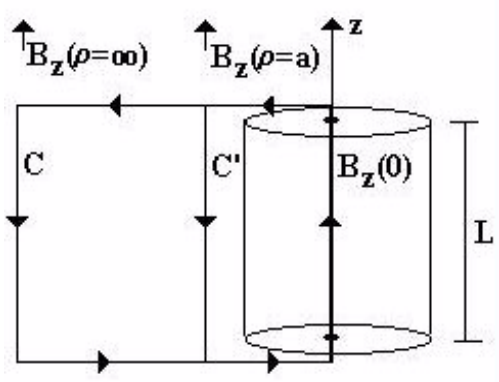
$$B\,(2\pi r) = \mu_0 \pi s^2 J$$

ou seja

$$B = \frac{\mu_0 s^2 J}{2},$$

como queríamos demonstrar.

- **Exercício 8.18:** Se nosso solenóide infinito pode ser considerado tal que a indução magnética só possui componente na direção z (mesma direção de orientação do solenóide), então podemos construir uma curva C como a apresentada na figura a seguir para o cálculo de $\vec{B}$.



De acordo com a figura, temos que o cálculo da integral

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \oint_{C'} \vec{B} \cdot d\vec{l}' = \mu_0 N I$$

deve ser o mesmo tanto para o percurso C quanto para o caminho C', uma vez que a quantidade de corrente envolvida em ambos os casos é exatamente a mesma. Note que estes dois caminhos passam sempre pelo eixo do solenóide. Assim, se o solenóide tem um comprimento L, então temos que

$$\int_0^L B_z\,(\rho = 0)\,dz - \int_L^0 B_z\,(\rho = a)\,dz = \mu_0 N I,$$

sendo que a varia para o primeiro ou segundo caminhos. Tome agora $a = \infty$; se $B_z(\rho = \infty) = 0$, então o resultado do cálculo anterior fica

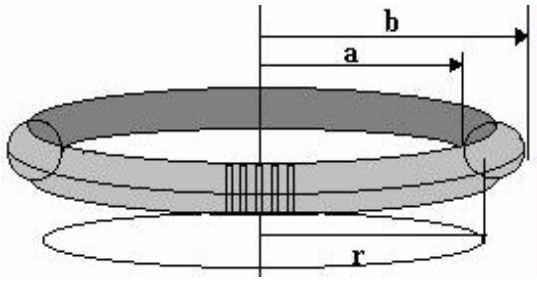
$$\int_0^L B_z(\rho = 0)\, dz = \mu_0 NI,$$

de modo que o campo no interior do solenóide deve ser considerado constante de forma a obtermos

$$BL = \mu_0 NI \Rightarrow B = \frac{\mu_0 NI}{L},$$

concordando com o resultado já obtido no limite $a/L \to \infty$. Ora, como os cálculos através de C e de C' dão o mesmo resultado e a diferença entre os caminhos se deve aos valores que B_z pode tomar nos pontos ρ fora do solenóide, estes valores devem ser iguais, implicando que B não pode variar com ρ fora do solenóide. Como o solenóide é infinito, B_z não pode variar com z, por simetria, implicando, portanto, que B tem que ser constante.

- **Exercício 8.19:** (a) Note que temos a configuração da figura a seguir:



A simetria do problema nos informa que só podemos ter a componente B_θ da indução magnética. Assim, podemos escolher uma curva C como a apresentada na figura anterior, de raio r, de forma que no seu interior passa uma corrente NI (cada espira comparece com um I e são N espiras). Assim, pela lei de Ampère, ficamos com (para a curva C no interior do solenóide)

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = 2\pi\rho B_\theta = \mu_0 NI$$

de modo que

$$B_\theta = \frac{\mu_0 NI}{2\pi\rho},$$

que é o mesmo resultado de um fio longo (com corrrente NI). Para $\rho < a$ temos que $I = 0$ e, portanto, $\vec{B} = 0$. Da mesma forma, para $\rho > b$, temos NI correntes

'para cima' e NI correntes 'para baixo', dando um líquido de $I_{tot} = 0$, de modo que, novamente, $\vec{B} = 0$.

(b) Assim, nos pontos $\rho = a$ e $\rho = b$ temos

$$B_\theta(a) = \frac{\mu_0 NI}{2\pi a},\ B_\theta(b) = \frac{\mu_0 NI}{2\pi b}$$

e queremos que o valor de $B_\theta(b)$ não seja menor do que $B_\theta(a)$ por mais de 25%. Assim, temos

$$\frac{1}{4} = 1 - \frac{B_\theta(b)}{B_\theta(a)} = 1 - \frac{a}{b} \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{3}{4}$$

o que dá

$$\frac{b}{a} = \frac{4}{3},$$

em concordância com o livro.

- **Exercício 8.20:** Uma maneira de resolver este problema é utilizando o resultado já conhecido da indução magnética para o caso de um fio comprido. Assim, temos

$$\vec{B}(\rho) = \frac{\mu_0 I}{2\pi\rho}\hat{\theta},$$

em coordenadas cilíndricas. Agora, sabemos que

$$\vec{B}(\rho) = \nabla \times \vec{A},$$

ou seja

$$\begin{aligned} \nabla \times \vec{A} &= \left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial A_z}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial z}\right)\hat{\rho} + \left(\frac{\partial A_\rho}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial \rho}\right)\hat{\theta} + \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial(\rho A_\theta)}{\partial \rho} - \frac{\partial A_\rho}{\partial \theta}\right)\hat{k} \\ &= \frac{\mu_0 I}{2\pi\rho}\hat{\theta} \end{aligned}$$

Notando que, por simetria, A_z (assim como nenhuma outra componente pode depender de θ ou z) , ficamos com

$$-\frac{\partial A_z}{\partial \rho}\hat{\theta} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial(\rho A_\theta)}{\partial \rho}\hat{k} = \frac{\mu_0 I}{2\pi\rho}\hat{\theta}.$$

Da mesma maneira, por simetria, não podemos ter A_θ diferente de zero. Portanto

$$-\frac{\partial A_z}{\partial \rho} = \frac{\mu_0 I}{2\pi\rho}$$

e ficamos com

$$A_z(\rho) = -\int_\rho^a \frac{\mu_0 I}{2\pi\rho} d\rho = \frac{\mu_0 I}{2\pi}\ln\rho + C,$$

onde C é uma constante que dá o nível de energia que se está adotando. Assim, cada fio tem um potencial vetorial magnético como o obtido acima (na direção z, obviamente). Agora, para um ponto P que esteja a uma distância ρ_1 e ρ_2 de dois fios, cada qual com corrente num sentido, ficamos, por superposição

$$A_z(P) = \frac{\mu_0 I}{2\pi}\ln\rho_1 - \frac{\mu_0 I}{2\pi}\ln\rho_2 = \frac{\mu_0 I}{2\pi}\ln\left(\frac{\rho_1}{\rho_2}\right),$$

como queríamos demonstrar.

- **Exercício 8-21:** Já vimos que uma situação como a descrita no problema (de um cabo coaxial) posui uma configuração de campo (obtida pela lei de Ampère) dada por

$$\begin{aligned} B^{(int)} &= \frac{\mu_0 I}{2\pi\rho}, \text{ para } \rho < b \\ B^{(ext)} &= 0, \text{ para } \rho > b, \end{aligned}$$

uma vez que não há corrente total quando estamos fora do cabo coaxial. A primeira indução magnética (como vimos no problema anterior) gera um potencial vetor magnético dado por

$$A_z^{(int)}(\rho) = \frac{\mu_0 I}{2\pi}\ln\rho + C,$$

enquanto que a segunda gera $A_z^{(ext)}(\rho) = 0$. No ponto $\rho = b$ elas devem ser iguais, de modo que

$$\frac{\mu_0 I}{2\pi}\ln b + C = 0$$

ou seja

$$C = -\frac{\mu_0 I}{2\pi}\ln b$$

e, portanto,

$$A_z^{(int)} = \frac{\mu_0 I}{2\pi}\ln\left(\frac{\rho}{b}\right),$$

como queríamos demonstrar.

[Note que se fôssemos calcular o potencial vetor magnético usando diretamente a sua definição integral, teríamos

$$\begin{aligned} \vec{A}(\vec{r}) &= \frac{\mu_0}{4\pi}\int\frac{\vec{J}(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|}dv' = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\int_{-L}^{+L}\frac{dz'}{\left[\rho^2+(z-z')^2\right]^{1/2}} \\ &= \frac{\mu_0 I}{2\pi}\ln\left[(z-z') + \sqrt{\rho^2+(z-z')^2}\right]_{-L}^{+L} \end{aligned}$$

que diverge se fizermos os limites tender para infinito $L \to \infty$.]

- **Exercício 8.22:** (a) para demonstrar que $\oint \vec{A} \cdot d\vec{l} = \Phi$ basta que notemos que (S é superfície *aberta* que define a curva C)

$$\Phi = \int_S \vec{B} \cdot \hat{n} da = \int_S \left(\nabla \times \vec{A} \right) \cdot \hat{n} da = \oint_C \vec{A} \cdot d\vec{l},$$

como desejado.

(b) Para uma distância ρ *fora* do solenóide, sabemos que $\vec{B} = 0$ ($\vec{B} = B_z \hat{k}$ no nosso caso). Se tomarmos os circuitos que utilizamos anteriormente (exercício 18), então a superfície limitada pelo circuito C' (com $\rho \to \infty$) tenderá para infinito e como o campo no exterior do cilindro é nulo, ficamos com

$$\int_S \vec{B} \cdot \hat{n} da = \oint_C \vec{A} \cdot d\vec{l},$$

onde S é a superfície limitada por uma curva C. Note, entretanto, que esta superfície tem orientação $d\vec{a} = \hat{k} da$, ou seja, está num plano perpendicular ao eixo do solenóide ($z = const.$). Assim, $d\vec{l}$, para incluir até o ponto ρ do solenóide, deve ser igual a $d\vec{l} = \rho d\theta \tilde{\theta}$ e ficamos com

$$B_z \pi \rho^2 = \int_0^{2\pi} A_\theta \rho d\theta.$$

Como, por simetria, A_θ não pode depender de θ, temos que

$$A_\theta^{(int)}(\rho) = \frac{B_z}{2} \rho = \frac{\mu_0 N I}{2L} \rho,$$

no interior do solenóide.

Fora do solenóide, teremos uma limitação na área S, visto que a indução magnética é nula no exterior. Assim, ficamos com

$$B_z \pi a^2 = \int_0^{2\pi} A_\theta \rho d\theta$$

para obter

$$A_\theta^{(ext)}(\rho) = \frac{\mu_0 N I}{2L} \frac{a^2}{\rho}.$$

(c) Sabemos que

$$\begin{cases} A_\theta^{(int)}(\rho) = \frac{\mu_0 N I}{2L} \rho \\ A_\theta^{(ext)}(\rho) = \frac{\mu_0 N I}{2L} \frac{a^2}{\rho} \end{cases},$$

de forma que

$$\begin{aligned} \nabla \times \vec{A}^{(int)} &= \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial A_z}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial z} \right) \hat{\rho} + \left(\frac{\partial A_\rho}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial \rho} \right) \hat{\theta} + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial (\rho A_\theta)}{\partial \rho} - \frac{\partial A_\rho}{\partial \theta} \right) \hat{k} \\ &= 0\tilde{\rho} + 0\hat{\theta} + \frac{1}{\rho} \left[\frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\mu_0 N I}{2L} \rho \right) \right] \hat{k} = \frac{\mu_0 N I}{L} \hat{k} \end{aligned}$$

que é o valor da indução magnética no interior do solenóide. Da mesma maneira, para o exterior, ficamos com

$$\begin{aligned}\nabla\times\vec{A}^{(ext)} &= \left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial A_z}{\partial\theta}-\frac{\partial A_\theta}{\partial z}\right)\hat{\rho}+\left(\frac{\partial A_\rho}{\partial z}-\frac{\partial A_z}{\partial\rho}\right)\hat{\theta}+\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial\left(\rho A_\theta\right)}{\partial\rho}-\frac{\partial A_\rho}{\partial\theta}\right)\hat{k}\\ &= 0\tilde{\rho}+0\hat{\theta}+\frac{1}{\rho}\left[\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\mu_0 NI}{2L}\frac{a^2}{\rho}\right)\right]\hat{k}=0\hat{k}=0,\end{aligned}$$

como já havíamos considerado.

- **Exercício 8.23:** (a) A equação (8.61) é

$$\vec{A}\left(\vec{r}\right)=\frac{\mu_0}{4\pi}\int_V\frac{\vec{J}\left(\vec{r}'\right)}{|\vec{r}-\vec{r}'|}dv'.$$

Tomando o divergente (sobre $\vec{r}$, naturalmente), ficamos com

$$\nabla\cdot\vec{A}\left(\vec{r}\right)=\frac{\mu_0}{4\pi}\int_V\nabla\cdot\left[\frac{\vec{J}\left(\vec{r}'\right)}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\right]dv',$$

mas

$$\begin{aligned}\nabla'\cdot\left[\frac{\vec{J}\left(\vec{r}'\right)}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\right] &= \frac{\nabla'\cdot\vec{J}\left(\vec{r}'\right)}{|\vec{r}-\vec{r}'|}+\vec{J}\left(\vec{r}'\right)\cdot\nabla'\left[\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\right]\\ &= \frac{\nabla'\cdot\vec{J}\left(\vec{r}'\right)}{|\vec{r}-\vec{r}'|}-\vec{J}\left(\vec{r}'\right)\cdot\nabla\left[\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\right]\\ &= -\vec{J}\left(\vec{r}'\right)\cdot\nabla\left[\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\right]\\ &= -\nabla\cdot\left[\frac{\vec{J}\left(\vec{r}'\right)}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\right]\end{aligned}$$

(usamos o fato de que $\nabla'\cdot\vec{J}\left(\vec{r}'\right)=0$, válido para correntes estacionárias) de modo que podemos escrever

$$\nabla\cdot\vec{A}\left(\vec{r}\right)=-\frac{\mu_0}{4\pi}\int_V\nabla'\cdot\left[\frac{\vec{J}\left(\vec{r}'\right)}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\right]dv'=-\oint_S\frac{\vec{J}\left(\vec{r}'\right)\cdot\hat{n}da'}{|\vec{r}-\vec{r}'|},$$

onde S é a superfície que 'fecha' o volume V. Note agora que podemos 'levar' S para o infinito, onde $\vec{J}\left(\vec{r}\right)$ se anula, de modo que

$$\nabla\cdot\vec{A}\left(\vec{r}\right)=0,$$

como queríamos demonstrar.

(b) Agora temos o seguinte caso

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A},$$

como sempre, e

$$\nabla \times \vec{B} = \nabla \times \nabla \times \vec{A} = \nabla \left(\nabla \cdot \vec{A} \right) - \nabla^2 \vec{A} = \mu_0 \vec{J}.$$

Agora vamos supor que $\vec{A}$ seja tal que $\nabla \cdot \vec{A} \neq 0$ (suponha que $\nabla \cdot \vec{A} = \gamma$) e vamos mostrar que poderíamos escolher *um outro* $\vec{A}'$ tal que $\nabla^2 \vec{A}' = -\mu_0 \vec{J}$, com $\nabla \cdot \vec{A}' = 0$. De fato, notemos que $\vec{B}$, sendo um rotacional de $\vec{A}$, nos permite uma liberdade de escolha (uma *calibragem*) do tipo

$$\vec{A} = \vec{A}' + \nabla \lambda,$$

onde λ é uma *função escalar qualquer* (que iremos escolher —calibrar—adequadamente). Como o rotacional de um gradiente é nulo, a equação $\vec{B} = \nabla \times \vec{A} = \nabla \times \vec{A}'$ permanece a mesma, ou seja, a indução magnética $\vec{B}$ definida por $\vec{A}$ ou por $\vec{A}'$ é a mesma. Tomemos agora o rotacional de $\vec{B}$, escrito em termos de $\vec{A}'$; ficamos com

$$\nabla \left(\nabla \cdot \vec{A}' \right) - \nabla^2 \vec{A}' = \mu_0 \vec{J}.$$

Note, agora, que

$$\nabla \cdot \vec{A}' = \nabla \cdot \vec{A} - \nabla^2 \vec{\lambda}.$$

Agora *escolhemos* a função escalar λ de modo que

$$\nabla^2 \lambda = \gamma$$

para obter

$$\nabla^2 \vec{A}' = -\mu_0 \vec{J}$$

com

$$\nabla \cdot \vec{A}' = 0.$$

Ora, como nossa escolha de λ é totalmente livre, poderíamos ter começado já com este $\vec{A}'$ e obtido as duas últimas equações.

(c) De fato, como λ é arbitrário, o potencial vetorial de $\vec{B}$ pode ter qualquer divergente desejado.

- **Exercício 8.24:** (a) Sejam os potenciais vetoriais:

$$\vec{A}_1 = -By\hat{\imath},\ \vec{A}_2 = Bx\hat{\jmath} \text{ e } \vec{A}_3 = -\frac{1}{2}\vec{r} \times \vec{B}.$$

Para mostrar que todos são possíveis potenciais vetoriais da indução magnética uniforme

$$\vec{B} = B\tilde{k}$$

precisamos apenas mostrar que o cálculo do rotacional dos $\vec{A}_i$ resulta nesta indução. Assim, ficamos com

$$\begin{gathered}
\nabla \times \vec{A}_1 = -\frac{\partial A_x}{\partial y}\tilde{k} = B\hat{k} \\
\nabla \times \vec{A}_2 = \frac{\partial A_y}{\partial x}\tilde{k} = B\hat{k} \\
\nabla \times \vec{A}_3 = -\frac{1}{2}\nabla \times \left(\vec{r} \times \vec{B}\right) = -\frac{1}{2}\left[\left(\nabla \cdot \vec{B}\right)\vec{r} - \left(\nabla \cdot \vec{r}\right)\vec{B} + \left(\vec{r} \cdot \nabla\right)\vec{B} - \left(\vec{B} \cdot \nabla\right)\vec{r}\right] \cdot \\
= -\frac{1}{2}\left[0 - 3\vec{B} - 0 - B\frac{\partial}{\partial z}\vec{r}\right] = \vec{B} = B\hat{k}
\end{gathered}$$

(b) Agora, tomando o divergente, ficamos com

$$\begin{gathered}
\nabla \cdot \vec{A}_1 = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} = 0 \\
\nabla \cdot \vec{A}_1 = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} = 0 \\
\nabla \cdot \vec{A}_3 = -\frac{1}{2}\nabla \cdot \left(\vec{r} \times \vec{B}\right) = -\frac{1}{2}\left[(\nabla \times \vec{r}) \cdot \vec{B} - \left(\nabla \times \vec{B}\right) \cdot \vec{r}\right] = 0
\end{gathered} ,$$

ou seja, *todos* os potenciais vetoriais possuem divergência nula.

(c) Seja agora $\vec{A}' = \vec{A}_1 - \vec{A}_2$. Assim,

$$\vec{A} = -By\hat{\imath} - Bx\hat{\jmath} = -B\left(y\hat{\imath} + x\hat{\jmath}\right) = -B\nabla\left(xy\right).$$

Desta maneira, $\vec{A} = \nabla\phi$, com $\phi = -Bxy$.

- **Exercício 8.25:** Tomemos o gradiente, em coordenadas cilíndricas, do potencial magnético φ^*, dado por

$$\varphi^* = \frac{-I}{2\pi}\theta.$$

Ficamos com

$$\vec{B} = -\mu_0\nabla\varphi^* = -\left(\hat{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho} + \frac{\hat{\theta}}{\rho}\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{\partial}{\partial z}\right)\varphi^* = \frac{\mu_0 I}{2\pi\rho},$$

que é o potencial de um fio reto e comprido, conduzindo uma corrente I. Note, entretanto, que a função φ^* não é *univalorada*, visto que, ao completarmos uma volta, seu valor não retorna ao valor da volta anterior, mas é acrescido de 2π. Assim, os mesmos pontos do espaço correspondem a distintos valores de φ^*. Interessantemente, já que o problema tem simetria planar, poderíamos pensar em definir o potencial φ^* como sendo

$$\varphi^* = -\frac{I}{2\pi}LogZ,$$

onde Z é a variável complexa $Z = \rho \exp(i\theta)$. Neste caso, teríamos (note que $\exp(i\theta) = \exp[i(\theta + 2k\pi)]$)

$$\varphi_k^* = \frac{-I}{2\pi} \log \rho - i \frac{I}{2\pi} (\theta + 2k\pi)$$

de modo que

$$\vec{B} = \mathrm{Re}\{-\mu_0 \nabla \varphi_k^*\} = \mathrm{Im}\{-\mu_0 \nabla \varphi_k^*\}$$

e o caráter multivalorado da função fica estabelecido imediatamente a partir da multivaloração do logarítimo de uma variável complexa. Neste caso, o uso de superfícies de Riemann para tornar a função univalorada pode ser uma possibilidade para eliminar o problema. É interessante mostrar essa possibilidade porque ela nos torna a comparação com o caso eletrostático muito mais próxima (lembre-se que em eletrostática o potencial seria dado por

$$\varphi = \frac{q}{2\pi\varepsilon_0} \ln \rho).$$

Para problemas planares a solução acima pode ser extremamente importante, já que podemos usar o método de transformações conformes para tratar praticamente de qualquer condição de contorno. Assim, problemas que envolveriam fios com condições de contorno *arbitrárias* poderiam ser tratados desta maneira.

- **Exercício 8.27:** (a) Sabemos que a indução magnética (sobre o eixo z) para uma espira é dada por

$$\vec{B}(z) = \frac{\mu_0 I}{2} \frac{a^2}{(z^2 + a^2)^{3/2}} \hat{k}$$

e que devemos ter

$$\vec{B}(z) = -\mu_0 \nabla \varphi^*.$$

Assim,

$$\nabla \varphi^* = \frac{-I}{2} \frac{a^2}{(z^2 + a^2)^{3/2}} \hat{k},$$

de modo que

$$\begin{aligned} \varphi^* &= \frac{-Ia^2}{2} \int \frac{dz}{(z^2 + a^2)^{3/2}} = \frac{-Ia^2}{2} \left[\frac{z}{a^2 \sqrt{z^2 + a^2}} \right]_{z=\infty}^{z} \\ &= \frac{I}{2} \left[1 - \frac{z}{\sqrt{z^2 + a^2}} \right], \end{aligned}$$

que é o resultado esperado.

(b e c) Agora, supondo que $z < a$, podemos escrever

$$\begin{aligned} \varphi^*(z) &= \frac{I}{2} \left[1 - \frac{z}{a} \frac{1}{\sqrt{\frac{z^2}{a^2} + 1}} \right] = \frac{I}{2} \left[1 - \frac{z}{a} \left(1 - \frac{z^2}{2a^2} + \frac{3z^4}{8a^4} + \cdots \right) \right] \\ &= \frac{I}{2} \left[1 - \left(\frac{r}{a} \right) \cos\theta + \frac{1}{2} \left(\frac{r}{a} \right)^3 \cos^3(\theta) - \frac{3}{8} \left(\frac{r}{a} \right)^5 \cos^5(\theta) + \cdots \right]. \end{aligned}$$

Agora vamos escrever

$$\varphi^*(r,\theta) = \frac{I}{2}\sum_{n=0}^{\infty} c_n \left(\frac{a}{r}\right)^{-n} P_n(\theta),$$

onde só tomaremos os valores ímpares de n. Ora, esta série nos fornece

$$\begin{aligned}\varphi_L^*(r,\theta) &= \frac{I}{2}\left\{c_1 + c_2\left(\frac{r}{a}\right)\cos\theta + c_3\left(\frac{r}{a}\right)^3 \frac{1}{2}\left(5\cos^3\theta - 3\cos\theta\right) + \right. \\ &\left. + c_5\left(\frac{r}{a}\right)^5 \frac{1}{8}\left(63\cos^5\theta - 70\cos^3\theta + 15\cos\theta\right) + \cdots\right\},\end{aligned}$$

se considerarmos este potencial $\varphi_L^*(r,\theta)$ sobre o eixo z ($\theta = 0$), ficamos com (lembrando que $P_n(1) = 1$)

$$\varphi_L^*(r,\theta) = \frac{I}{2}\left\{c_1 + c_2\left(\frac{z}{a}\right) + c_3\left(\frac{z}{a}\right)^3 + c_5\left(\frac{r}{a}\right)^5 + \cdots\right\}$$

de modo que bastaria escolher os coeficientes como coeficientes da expansão binomial acima mencionada. Explicitamente,

$$c_1 = 1,\ c_2 = -1,\ c_3 = \frac{1}{2},\ c_5 = \frac{3}{8},\ \text{etc.}$$

(d) Agora, com o $\varphi^*(r,\theta)$ obtido, podemos obter as componentes B_r e B_θ (os coeficientes já estão determinados, onde notamos que o problema foi escrito de tal forma que encontramos uma solução do mesmo em coordenadas esféricas que satisfaz a equação de Laplace (dada a escolha da forma do potencial, como já vimos) e que satisfaz também as condições de contorno (ser o potencial adequado para pontos sobre o eixo dos z). Para encontrar as componentes B_r e B_θ precisamos apenas usar

$$\vec{B} = -\mu_0 \nabla\varphi^*(r,\theta),$$

o que não será feito aqui (convidamos o leitor a fazê-lo).

- **Exercício 8.28: (em andamento)** Temos uma configuração como a mostrada na figura a seguir

  Neste caso, um elemento de corrente (uma espira) fica dado por $dI = (a\sin\theta_1)\,\sigma\omega\,(ad\theta_1)\,d\phi_1$. Note que, sob integração na esfera toda, temos

$$I = \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} a^2\sigma\omega\sin\theta_1 d\theta_1 d\phi_1 = 4\pi a^2\sigma\omega$$

que é a corrente total. O potencial vetor, para esta espira, fica

$$\begin{aligned} dA_\phi\left(\vec{r}_2\right) &= \frac{\mu_0 a^2 \sigma\omega \sin\theta_1 d\theta_1}{4\pi}\int_0^{2\pi}\frac{d\phi_1}{|\vec{r}_2-\vec{r}_1|} \\ &= \frac{\mu_0 a^2 \sigma\omega \sin\theta_1 d\theta_1}{4\pi}\int_0^{2\pi}\frac{d\phi_1}{\left[r_2^2+a^2-2ar_2\cos\theta\right]^{1/2}}, \end{aligned}$$

onde θ é o ângulo entre $\vec{r}$ e $\vec{r}_1$. Para pontos fora da esfera, podemos fazer o integrando ficar (lembrando que o integrando é a função geratriz dos polinômios de Legendre)

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{r_2\left[1+\left(\frac{a}{r_2}\right)^2-2\left(\frac{a}{r_2}\right)\cos\theta\right]^{1/2}} = \frac{1}{r_2}\sum_{n=0}^{\infty}P_n\left(\cos\theta\right)\left(\frac{a}{r_2}\right)^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{a^n}{r_2^{n+1}}P_n\left(\cos\theta\right) \end{aligned}$$

Note, ainda, que $\cos\theta$ depende dos ângulos $\theta_1, \theta_2, \phi_1, \phi_2$, visto que, pela regra da soma de harmônicos esféricos, devemos ter

$$P_n\left(\cos\theta\right) = \frac{4\pi}{2n+1}\sum_{m=-n}^{n}Y_{nm}^*\left(\theta_1,\phi_1\right)Y_{nm}\left(\theta_2,\phi_2\right)$$

O resultado final fica

$$dA_\phi\left(\vec{r}_2\right) = \frac{\mu_0 a^2\sigma\omega\sin\theta_1 d\theta_1}{4\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=-n}^{n}\frac{4\pi}{2n+1}\frac{a^n}{r_2^{n+1}}Y_{nm}\left(\theta_2,\phi_2\right)\int_0^{2\pi}Y_{nm}^*\left(\theta_1,\phi_1\right)d\phi_1,$$

onde a integração nos garante que $m=0$ (caso contrário a integral se anula). Assim, ficamos com

$$dA_\phi\left(\vec{r}_2\right) = \frac{\mu_0 a^2\sigma\omega\sin\theta_1 d\theta_1}{4\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{4\pi}{2n+1}\frac{a^n}{r_2^{n+1}}Y_{n0}\left(\theta_2,\phi_2\right)Y_n^*\left(\theta_1,\phi_1\right)$$

onde notamos que

$$Y_{n0}\left(\theta_2,\phi_2\right) = \sqrt{\frac{2n+1}{4\pi}}P_n\left(\cos\theta_2\right)$$

e, portanto

$$dA_\phi\left(\vec{r}_2\right) = \frac{\mu_0 a^2\sigma\omega\sin\theta_1 d\theta_1}{4\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a^n}{r_2^{n+1}}P_n\left(\cos\theta_2\right)P_n\left(\cos\theta_1\right).$$

Agora, para obter o potencial vetorial final, integramos em θ_1 para obter

$$A_\phi\left(\vec{r}_2\right) = \frac{\mu_0 a^2\sigma\omega}{4\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a^n}{r_2^{n+1}}P_n\left(\cos\theta_2\right)\int_0^{\pi}\sin\theta_1 P_n\left(\cos\theta_1\right)d\theta_1$$

que seleciona $n = 0$. Assim,

$$A_\phi(\vec{r}_2) = \frac{\mu_0 a^2 \sigma \omega}{4\pi} \frac{1}{r_2},$$

o que era um resultado esperado, já que A_ϕ não deveria depender de ϕ_2, por razões de simetria. Com este $A_\phi(\vec{r}_2)$ (a única componente não nula), podemos calcular a indução magnética como sendo

$$\begin{aligned}
\vec{B} &= \nabla \times \vec{A}(\vec{r}_2) = \hat{r} \frac{1}{r_2 \sin\theta_2} \left[\frac{\partial (A_\phi \sin\theta_2)}{\partial \theta_2} - \frac{\partial A_\theta}{\partial \phi_2} \right] + \hat{\theta} \frac{1}{r_2} \left[\frac{1}{\sin\theta_2} \frac{\partial A_r}{\partial \phi} - \frac{\partial (r_2 A_\phi)}{\partial r_2} \right] \\
&\quad + \hat{\phi} \frac{1}{r_2} \left[\frac{\partial (r_2 A_\theta)}{\partial r_2} - \frac{\partial A_r}{\partial \theta_2} \right] \\
&= \hat{r} \frac{1}{r_2 \sin\theta_2} A_\phi \cos\theta_2 - \hat{\theta} \frac{1}{r_2} \frac{\partial}{\partial r_2} \left(r_2 \frac{\mu_0 a^2 \sigma \omega}{4\pi} \frac{1}{r_2} \right) = \\
&= \hat{r} \frac{1}{\sin\theta_2} \left[\frac{\mu_0 a^2 \sigma \omega}{4\pi} \frac{1}{r_2^2} \cos\theta_2 \right] = \hat{r} \frac{1}{\sin\theta_2} \left[\frac{\mu_0 a^2 \sigma^2}{4\pi} \frac{\vec{\omega} \cdot \vec{r}_2}{r_2^3} \right],
\end{aligned}$$

já que $\vec{\omega} = \omega \hat{k}$. [Incomoda-me o termo $(\sin\theta_2)^{-1}$ que ainda sobrou, mas não vejo como poderia retirá-lo] Note que, assim (com $\vec{m} = a^2 \sigma^2 \vec{\omega}$ e sem o termo $\sin\theta_2$)

$$\vec{B} = -\mu_0 \nabla \varphi^*,$$

onde

$$\varphi^*(\vec{r}_2) = \frac{\vec{m} \cdot \vec{r}_2}{4\pi r_2^3}$$

Capítulo 12

1. **Exercício 16.1:** temos a condição inicial $C\Delta\varphi = Q_0$, que é a carga inicial no capacitor, após ter sido carregado. Também temos que $\vec{J} = g\vec{E}$. Usando a equação da continuidade, dada por

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{J} = 0$$

ficamos com

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + g\nabla \cdot \vec{E} = 0$$

e, usando a eq. de maxwell $\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon}$, ficamos com (tendo integrado no volume)

$$\frac{\partial q\left(t\right)}{\partial t} = -\frac{g}{\varepsilon} q\left(t\right)$$

o que dá, após integração e substituição da condição inicial, o resultado

$$q\left(t\right) = C\Delta\varphi e^{-gt/\varepsilon},$$

como desejado. O item (b) pode ser obtido imediatamente a partir da derivação do resultado anterior e é dado por

$$i\left(t\right) = -\frac{g}{\varepsilon} C\Delta\varphi e^{-gt/\varepsilon}.$$

Finalmente, o item (c) é imediatamente obtido como $\vec{B} = 0$ pela simetria do problema.

2. **Exercício 16.3:** O item (a) pode ser obtido se usarmos a equação de Maxwell

$$\nabla \times \vec{H} - \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \vec{J}$$

e a integrarmos sobre a superfície do dielétrico. A integral de superfície de $\nabla \times \vec{H}$ torna-se uma integral de linha sobre $\vec{H}$ e a integral de superfície sobre $\vec{D}$ é simples de ser obtida, já que $\vec{D}$ é constante. Assim, ficamos com

$$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{l} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \cdot \iint \hat{n} dA,$$

onde já usamos o fato de que, no dielétrico, $\vec{J} = 0$. Assim, ficamos com (note que $\vec{H}$ é constante sobre C, por simetria)

$$2\pi a H_\theta = \pi a^2 \frac{\partial D_z}{\partial t},$$

onde já expressamos o restultado em termos das componentes distintas de zero dos campos. Assim,

$$H_\theta = \frac{1}{2} a \frac{\partial D_z}{\partial t}.$$

Note, entretanto, que, pela lei de Gauss, temos

$$\frac{\partial D_z}{\partial t} = \frac{\partial \rho}{\partial t}$$

que, integrada sobre o volume, fornece

$$\pi a^2 L \frac{\partial D_z}{\partial t} = I_z$$

e, portanto,

$$\frac{1}{2} a \frac{\partial D_z}{\partial t} = \frac{I_z}{2\pi a}.$$

Assim, temos que

$$H_\theta = \frac{1}{2} a \frac{\partial D_z}{\partial t} = \frac{I_z}{2\pi a},$$

que é o resultado desejado. O item (b) pode ser obtido imediatamente, já que o vetor de Poynting é dado por

$$\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H} = -E_z H_\theta \hat{r} = -\frac{1}{2} a E_z \frac{\partial D_z}{\partial t} \hat{r}.$$

A integral desse vetor sobre a superfície fica dada por

$$\iint \vec{S} \cdot \hat{r} dA = -\left(2\pi a d\right) \frac{1}{2} a E_z \frac{\partial D_z}{\partial t} = -\pi a^2 d E_z \frac{\partial D_z}{\partial t},$$

como queríamos demostrar.

3. **Exercício 16.4:** Temos a corrente na direção do fio, que indicamos por $\hat{z}$. Assim, o campo elétrico está na direção contrária e, portanto, $\vec{E} = -E_z \hat{z}$. O campo magnético $\vec{H}$ se encontra na direção $\hat{\theta}$ (coordenadas cilíndricas), de modo que o vetor de Poynting aponta para a direção radial para fora, ou seja, $\vec{S} = E_z H_\theta \hat{r}$ e implica numa radiação de energia para fora do fio por efeito Joule. O calor associado a essa emissão pode ser calculado facilmente pela integral

$$Q_{Joule} = -\iiint \vec{E} \cdot \vec{J} dV = -\frac{J_z^2}{g} V.$$

Como $J_z = I/A$ e $V = AL$ (para uma região de comprimento L do fio), ficamos com

$$Q_{Joule} = -\frac{I^2 L}{gA}.$$

Já a integração do vetor de Poynting pode ser feita usando-se

$$Q_{Poynting} = \iint E_z H_\theta dA = \frac{J_z}{g} H_\theta \left(2\pi a L\right),$$

onde a é o raio do fio. Entretanto, temos para esse problema que

$$H_\theta = \frac{I}{2\pi a}$$

e, usando novamente que $J_z = I/A$, ficamos com

$$Q_{Poynting} = \frac{I^2 L}{gA},$$

ou seja, toda a emissão Joule é feita por radiação via vetor de Poynting.

4. **Exercício 16.5:** começamos por notar que $\vec{E}$ é campo eletrostático, de forma que deve valer $\nabla \times \vec{E} = 0$. Também temos que $\vec{H}$ é magnetostático, de forma que deve valer $\nabla \times \vec{H} = \vec{J}$. Assim, a integração do vetor de Poynting sobre uma superfície S fornece

$$\iint\limits_A \vec{S} \cdot \hat{n} dA = \iint\limits_A \left(\vec{E} \times \vec{H}\right) \cdot \hat{n} dA,$$

onde A é **superfície fechada**. Assim, podemos usar o teorema da divergência, para obter

$$\iint\limits_A \vec{S} \cdot \hat{n} dA = \iiint\limits_V \nabla \cdot \left(\vec{E} \times \vec{H}\right) dV$$

que dá, usando as identidades vetoriais,

$$\begin{aligned} \iint_A \vec{S} \cdot \hat{n} dA &= \iiint_V \left[\vec{H} \cdot \left(\nabla \times \vec{E}\right) - \vec{E} \cdot \left(\nabla \times \vec{H}\right)\right] dV \\ &= -\iiint_V \vec{E} \cdot \vec{J} dV \end{aligned}$$

sendo que o último resultado é a perda de energia do sistema por efeito Joule. Entretanto, na região considerada, existe um campo eletrostático e um magnetostático e, assim, não pode haver dissipação de energia líquida. Deste modo, a última integral tem que se anular e ficamos com

$$\iint\limits_A \vec{S} \cdot \hat{n} dA = 0.$$

5. **Exercício 16.6:** Temos que

$$\frac{\partial^2 E}{\partial z^2} = \varepsilon\mu \frac{\partial^2 E}{\partial t^2}.$$

Fazendo as mudanças de variável

$$\xi = t + \sqrt{\varepsilon\mu} z \quad ; \quad \eta = t - \sqrt{\varepsilon\mu} z$$

ficamos com

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial \xi}{\partial z}\frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial \eta}{\partial z}\frac{\partial}{\partial \eta} = \sqrt{\varepsilon\mu}\left(\frac{\partial}{\partial \xi} - \frac{\partial}{\partial \eta}\right)$$

e, portanto,

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} = \varepsilon\mu\left(\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} - 2\frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2}{\partial \eta^2}\right).$$

Um raciocínio análogo nos leva a

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} = \varepsilon\mu\left(\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + 2\frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2}{\partial \eta^2}\right).$$

Assim, a equação de onda original implica que devemos ter

$$\frac{\partial^2 E}{\partial \xi \partial \eta} = 0$$

cuja solução geral é facilmente percebida como sendo

$$E = E_1(\xi) + E_2(\eta).$$

6. **Exercício 16.7:** Para encontrar $\vec{B}$ podemos usar a equação de Faraday. Assim, temos que

$$\nabla \times \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0.$$

O rotacional de $\vec{E}$ fornece

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \hat{\imath} E_0 \omega \sqrt{\varepsilon\mu}\cos\left[\omega\left(\sqrt{\varepsilon\mu}z - t\right)\right] + \hat{\jmath} E_0 \sqrt{\varepsilon\mu}\sin\left[\varepsilon\left(\sqrt{\varepsilon\mu}z - t\right)\right]$$

que integrado gera o campo magnético

$$\vec{H} = -E_0\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\left\{\hat{\imath}\cos\left[\omega\left(\sqrt{\varepsilon\mu}z - t\right)\right] - \hat{\jmath}\sin\left[\varepsilon\left(\sqrt{\varepsilon\mu}z - t\right)\right]\right\}.$$

Assim, o vetor de Poynting $\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}$ fica dado por

$$\vec{S} = E_0^2\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\hat{k},$$

como desejado.

7. **Exercício 16.8:** Temos que $\vec{F}_v = \rho\vec{E} + \vec{J} \times \vec{B}$. Usando a lei de Gauss e a lei de Ampére modificada para isolar ρ e $\vec{J}$, respectivamente, ficamos com

$$\begin{aligned}
\vec{F}_v &= \varepsilon_0\vec{E}\left(\nabla \cdot \vec{E}\right) + \frac{1}{\mu_0}\left(\nabla \times \vec{B}\right) \times \vec{B} - \varepsilon_0\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \times \vec{B} \\
&= \varepsilon_0\vec{E}\left(\nabla \cdot \vec{E}\right) - \varepsilon_0\frac{\partial\left(\vec{E} \times \vec{B}\right)}{\partial t} + \frac{1}{\mu_0}\left(\nabla \times \vec{B}\right) \times \vec{B} + \varepsilon_0\vec{E} \times \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}
\end{aligned}$$

que, usando a lei de Faraday, fornece

$$\vec{F}_v = \varepsilon_0 \vec{E}\left(\nabla \cdot \vec{E}\right) - \varepsilon_0 \frac{\partial\left(\vec{E}\times\vec{B}\right)}{\partial t} + \frac{1}{\mu_0}\left(\nabla\times\vec{B}\right)\times\vec{B} - \varepsilon_0\vec{E}\times\left(\nabla\times\vec{E}\right).$$

Agora

$$\vec{E}\times\left(\nabla\times\vec{E}\right) = \frac{1}{2}\nabla\left(\vec{E}\cdot\vec{E}\right) - \left(\vec{E}\cdot\nabla\right)\vec{E},$$

o mesmo valendo para $\vec{B}$. Assim, ficamos com

$$\begin{aligned}\vec{F}_v &= -\varepsilon_0\frac{\partial\left(\vec{E}\times\vec{B}\right)}{\partial t} + \varepsilon_0\vec{E}\left(\nabla\cdot\vec{E}\right) - \frac{1}{2}\varepsilon_0\nabla\left(E^2\right) + \left(\vec{E}\cdot\nabla\right)\vec{E} \\ &\quad + \frac{1}{\mu_0}\left(\vec{B}\cdot\nabla\right)\vec{B} - \frac{1}{2\mu_0}\nabla\left(B^2\right) + \frac{1}{\mu_0}\vec{B}\left(\nabla\cdot\vec{B}\right),\end{aligned}$$

onde o último termo foi incluído apenas para ressaltar a simetria do resultado, já que é identicamente nulo.

8. **Exercício 16.9:** Temos que

$$\vec{E} = \hat{\imath}E_0\sin\left[\frac{2\pi}{\lambda}(z-ct)\right].$$

Como temos $\varphi = 0$, sabemos que

$$\vec{E} = -\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}.$$

Assim, é fácil mostrar que

$$\vec{A} = -\hat{\imath}\frac{\lambda E_0}{2\pi c}\cos\left[\frac{2\pi}{\lambda}(z-ct)\right].$$

Mas todo esse cálculo só está consistente se tivermos $\nabla\cdot\vec{A} = 0$, uma vez que colocamos $\varphi = 0$ e temos que satisfazer a condição de Lorentz. Mas é fácil mostrar que $\nabla\cdot\vec{A} = 0$, uma vez que depende apenas de z, mas tem componente apenas na direção x (faça a conta).

9. **Exercício 16.10:** Temos que $\rho = 0$ e que $\vec{J} = 0$. Sabemos que as equações de Maxwell são dadas, para esses casos, por

$$\begin{aligned}\nabla\cdot\vec{E} &= 0 \\ \nabla\cdot B &= 0 \\ \nabla\times\vec{E} + \tfrac{\partial\vec{B}}{\partial t} &= 0 \\ \nabla\times\vec{B} - \varepsilon\mu\tfrac{\partial\vec{E}}{\partial t} &= 0\end{aligned}\quad .$$

Com a escolha dos potenciais de forma que

$$\vec{E} = -\nabla\varphi - \frac{\partial\vec{A}}{\partial t} \quad ; \quad \vec{B} = \nabla\times\vec{A}$$

satisfazemos a segunda e terceira equações de Maxwell. Fica faltando mostar que satisfazemos igualmente a primeira e a quarta. A quarta fica dada por

$$\nabla \times \left(\nabla \times \vec{A}\right) - \varepsilon\mu \frac{\partial}{\partial t}\left(-\nabla\varphi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}\right) = 0$$

ou seja,

$$\nabla^2 \vec{A} - \varepsilon\mu \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} - \nabla\left(\nabla \cdot \vec{A} + \frac{\partial \varphi}{\partial t}\right) = 0.$$

A primeira equação de Maxwell fica

$$\nabla \cdot \vec{E} = \nabla^2\varphi + \frac{\partial}{\partial t}\left(\nabla \cdot \vec{A}\right) = 0.$$

Se colocarmos $\nabla \cdot \vec{A} = 0$ e que $\vec{A}$ satisfaz a

$$\nabla^2 \vec{A} - \varepsilon\mu \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = 0,$$

então temos que

$$\nabla \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0,$$

ou seja, o potencial escalar é do tipo eletrostático (daí o nome 'calibre de Coulomb'). Esse resultado é consistente com o resultado

$$\nabla^2\varphi = 0$$

que obtemos da equação para φ acima.

10. **Exercício 16.11:** Temos que

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon}$$

e, portanto, substituindo para os potenciais

$$\nabla^2\varphi + \frac{\partial}{\partial t}\left(\nabla \cdot \vec{A}\right) = 0,$$

já que $\rho = 0$. A equação de Ampére modificada fornece

$$\nabla \times \left(\nabla \times \vec{A}\right) - \varepsilon\mu \frac{\partial}{\partial t}\left(-\nabla\varphi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}\right) = \mu\vec{J}$$

que, rearranjando os termos e usando que $\vec{J} = g\vec{E}$, fornece

$$\nabla^2 \vec{A} - \varepsilon\mu \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} - \mu g \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = \nabla\left(\mu g\varphi + \varepsilon\mu \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{A}\right).$$

Assim, essa última equação fica da forma desejada se fizermos

$$\nabla \cdot \vec{A} = -\mu g \varphi - \varepsilon \mu \frac{\partial \varphi}{\partial t}.$$

Ficamos, portanto, com

$$\nabla^2 \vec{A} - \varepsilon \mu \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} - \mu g \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = 0.$$

Já a equação para o potencial escalar, obtida mais acima, fica

$$\nabla^2 \varphi + \frac{\partial}{\partial t}\left(-\mu g \varphi - \varepsilon \mu \frac{\partial \varphi}{\partial t}\right) = 0,$$

ou seja,

$$\nabla^2 \varphi - \varepsilon \mu \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - \mu g \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0,$$

que é o resultado desejado.

11. **Exercício 16.12:** $\rho = 0$, $\vec{J} = 0$, $\mu = \mu_0$ e $\vec{P} = \vec{P}(x, y, z, t)$. Temos que

$$\begin{aligned} \vec{E} &= \nabla \times \left(\nabla \times \vec{Z}\right) - \frac{1}{\varepsilon_0}\vec{P} \\ \vec{B} &= \frac{1}{c^2}\nabla \times \frac{\partial \vec{Z}}{\partial t} \end{aligned}$$

e sabemos que $\vec{Z}$ satisfaz à equação

$$\nabla^2 \vec{Z} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{Z}}{\partial t^2} = -\frac{\vec{P}}{\varepsilon_0}.$$

A lei de Gauss pode ser obtida diretamente, tomando-se o divergente de $\vec{E}$ para obter

$$\nabla \cdot \vec{E} = -\frac{1}{\varepsilon_0}\nabla \cdot \vec{P}$$

e notando que devemos ter $\nabla \cdot \vec{P} = 0$, que, como sabemos, representa a distribuição volumétrica das cargas de polarização e que se anula quando essa distribuição é uniforme. A equação de Faraday pode ser obtida tomando-se o rotacional de $\vec{E}$, dado por

$$\nabla \times \vec{E} = \nabla \times \left[\nabla\left(\nabla \cdot \vec{Z}\right) - \nabla^2 \vec{Z}\right] - \frac{1}{\varepsilon_0}\nabla \times \vec{P}$$

e a derivada temporal de $\vec{B}$, dada por

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \frac{1}{c^2}\nabla \times \frac{\partial^2 \vec{Z}}{\partial t^2}.$$

Assim, ficamos com

$$\nabla \times \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\nabla \times \left[\nabla^2 \vec{Z} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{Z}}{\partial t^2} - \frac{1}{\varepsilon_0} \vec{P} \right] = 0$$

e, portanto, vale a lei de Faraday. A divergência de $\vec{B}$ é obviamente nula, visto que $\vec{B}$ está dado por um rotacional. A última equação é a de Ampére modificada, que pode ser escrita na forma

$$\begin{aligned} \nabla \times \vec{B} - \mu_0 \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} &= \frac{1}{c^2} \nabla \times \left(\nabla \times \frac{\partial \vec{Z}}{\partial t} \right) - \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \left[\varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P} \right] \\ &= \frac{1}{c^2} \nabla \times \left(\nabla \times \frac{\partial \vec{Z}}{\partial t} \right) - \mu_0 \varepsilon_0 \nabla \times \left(\nabla \times \frac{\partial \vec{Z}}{\partial t} \right) = 0, \end{aligned}$$

valendo a quarta equação de Maxwell.

12. **Exercício 16.13:** usa as mesmas idéias do anterior.

13. **Exercício 16.14:** idem.

Capítulo 17

1. **Exercício 17.1:** considere $\vec{F}(\vec{r}) = \vec{A}e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}$, com $\vec{A}$ um vetor constante. Temos que

$$\begin{aligned}\nabla\cdot\vec{F} &= \frac{\partial F_x}{\partial x}+\frac{\partial F_y}{\partial y}+\frac{\partial F_z}{\partial z}\\ &= A_x ik_x e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}+A_y ik_y e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}+A_z ik_z e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}\\ &= i\vec{k}\cdot\vec{A}e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} = i\vec{k}\cdot\vec{F}(\vec{r})\end{aligned}$$

   Da mesma forma

$$\nabla\times\vec{F}(\vec{r}) = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k}\\ \partial_x & \partial_y & \partial_z\\ A_x e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} & A_y e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} & A_z e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}\end{vmatrix}$$

   e, portanto,

$$\begin{aligned}\left[\nabla\times\vec{F}\right]_x &= (A_z ik_y - A_y ik_z)\,e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}\\ \left[\nabla\times\vec{F}\right]_y &= (A_x ik_z - A_z ik_x)\,e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}\\ \left[\nabla\times\vec{F}\right]_z &= (A_y ik_x - A_x ik_y)\,e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}\end{aligned}$$

   Assim, ficamos com

$$\nabla\times\vec{F}(\vec{r}) = i\vec{k}\times\vec{A}e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} = i\vec{k}\times\vec{F}(\vec{r}),$$

   como desejado.

2. **Exercício 17.2:** Para uma onda plana no vácuo temos que

$$E = cB.$$

   Como também temos que

$$H = \frac{1}{\mu_0}B$$

   e $c = 1/\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}$, ficamos com

$$\frac{E}{H} = \mu_0 c = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}.$$

3. **Exercício 17.3:** As ondas planas têm polarização circular, mesmos ω, $\vec{k}$ e amplitude E, mas as polarizações são opostas, ou seja, $\phi = \pi/2$ e $\phi = -\pi/2$, para cada uma delas. Assim, temos que

$$E_1 = E(\vec{p}\sin\omega t + \vec{s}\cos\omega t) \text{ e } E_2 = E(-\vec{p}\sin\omega t + \vec{s}\cos\omega t).$$

   A onda resultante da superposição dessas duas ondas é dada por

$$E_T = 2E\vec{s}\cos\omega t$$

   e possui amplitude $2E$.

4. **Exercício 17.6:** Sejam $\vec{A}$ e $\vec{B}$ vetores complexos. Assim, $\vec{A} = \vec{A}_r + i\vec{A}_i$ e $\vec{B} = \vec{B}_r + i\vec{B}_i$. Deste modo temos que

$$\mathrm{Re}\left\{\vec{A}\right\} \cdot \mathrm{Re}\left\{\vec{B}\right\} = \vec{A}_r \cdot \vec{B}_r$$

enquanto que

$$\mathrm{Re}\left\{\vec{A} \cdot \vec{B}\right\} = \vec{A}_r \cdot \vec{B}_r - \vec{A}_i \cdot \vec{B}_i.$$

Assim, podemos ter $\mathrm{Re}\left\{\vec{A} \cdot \vec{B}\right\} = 0$ com $\vec{A}_r \cdot \vec{B}_r = \vec{A}_i \cdot \vec{B}_i$, mas de tal modo que nenhum dos dois membros é nulo.

5. **Exercício 17.7:** As ondas têm os mesmos ω, $\vec{k}$ e sentido de polarização $\vec{p}$, mas têm amplitudes e fases diferentes, dados por $E_1, 0$ e E_2, ϕ. Suas representações são

$$\vec{E}_1 = \vec{p}E_1 \cos\left(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r}\right) \text{ e } \vec{E}_2 = \vec{p}E_2 \cos\left(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} - \phi\right).$$

O vetor de Poynting é dado por

$$S = \frac{n}{c\mu_0}E^2 = \frac{n}{c\mu_0}\left[E_1 \cos\left(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r}\right) + E_2 \cos\left(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} - \phi\right)\right]^2 =$$

$$\begin{aligned} = \quad & \frac{n}{c\mu_0}\left[E_1^2 \cos^2\left(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r}\right) + E_2^2 \cos^2\left(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} - \phi\right) + \right. \\ & \left. + 2E_1E_2 \cos\left(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r}\right) \cos\left(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} - \phi\right)\right] \end{aligned}$$

Agora podemos tomar a média temporal deste resultado lembrando que

$$\left\langle \cos^2 \alpha \right\rangle_T = \frac{1}{2}$$

e que

$$\cos\left(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r}\right) \cos\left(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} - \phi\right) =$$

$$= \cos\left(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r}\right)\left[\cos\left(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r}\right)\cos\phi + \sin\left(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r}\right)\sin\phi\right] =$$

$$= \cos^2\left(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r}\right)\cos\phi + \cos\left(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r}\right)\sin\left(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r}\right)\sin\phi$$

Agora

$$\left\langle \cos\alpha \sin\alpha \right\rangle_T = 0,$$

então

$$\left\langle \cos\left(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r}\right) \cos\left(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} - \phi\right)\right\rangle = \frac{1}{2}\cos\phi.$$

Desta maneira, ficamos com

$$\langle S \rangle_T = \frac{n}{c\mu_0}\frac{1}{2}\left[E_1^2 + E_2^2 + 2E_1E_2\cos\phi\right],$$

como queríamos demonstrar.

6. **Exercício 17.8:** Temos duas ondas no vácuo de mesma frqüência e amplitude, com polarização linear que se superpõem para dar uma onda estacionária no vácuo. Tais ondas ficam representadas por

$$\vec{E}_1 = \vec{p}E\cos\left(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r}\right) \text{ e } \vec{E}_2 = \vec{p}E\cos\left(\omega t + \vec{k}\cdot\vec{r}\right).$$

Agora temos que

$$\vec{E} = \vec{p}E\left[\cos\left(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r}\right) + \cos\left(\omega t + \vec{k}\cdot\vec{r}\right)\right].$$

Note entretanto, que

$$\cos(a-b) + \cos(a+b) = 2\cos a\cos b$$

de modo que ficamos com

$$\vec{E} = \vec{p}2E\cos(\omega t)\cos\left(\vec{k}\cdot\vec{r}\right)$$

e o vetor de Poynting fica

$$S = \frac{n}{c\mu_0}E^2 = \frac{n}{c\mu_0}4\cos^2(\omega t)\cos^2\left(\vec{k}\cdot\vec{r}\right),$$

e sua média temporal fica

$$\langle S\rangle_T = \frac{2n}{c\mu_0}\cos^2\left(\vec{k}\cdot\vec{r}\right).$$

7. **Exercício 17.9:** Para uma onda plana em um meio condutor temos

$$\vec{B} = \frac{\hat{n}}{c}\vec{u}\times\vec{E}.$$

Como $\vec{E}$ é elipticamente polarizado, com $\hat{\mathbf{E}} = E_p e^{i\phi}\vec{p} + E_s\vec{s}$, temos que $(\hat{n} = n + ik)$

$$\vec{B} = \frac{\hat{n}}{c}\left(\vec{u}\times\vec{p}E_p e^{i\phi} + \vec{u}\times\vec{s}E_s\right) = \frac{\hat{n}}{c}\left(-\vec{p}E_s + \vec{s}E_p e^{i\phi}\right).$$

Assim, temos que

$$\begin{aligned}
\mathrm{Re}\left\{\hat{\mathbf{E}}\right\} &= E_p\cos\phi\vec{p} + E_s\vec{s} \\
\mathrm{Re}\left\{\hat{\mathbf{B}}\right\} &= \frac{1}{c}\left[-nE_s\vec{p} + (n\cos\phi - k\sin\phi)E_p\vec{s}\right]
\end{aligned}$$

Ficamos com

$$\begin{aligned}
\mathrm{Re}\left\{\hat{\mathbf{E}}\right\}\cdot\mathrm{Re}\left\{\hat{\mathbf{B}}\right\} &= \frac{1}{c}\left\{-nE_pE_s\cos\phi + nE_pE_s\cos\phi - kE_pE_s\sin\phi\right\} \\
&= -\frac{k}{c}E_pE_s\sin\phi
\end{aligned}$$

como desejado.

8. **Exercício 17.11:** Temos que $K_i = K_r$ no caso em questão. Queremos calcular os n e k. Usando as expressões (17.52) do livro, chegamos a ($K_r = K$)

$$\begin{aligned} n &= \sqrt{\frac{1}{2}\left[K + K\sqrt{2}\right]} = \sqrt{K}\sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2}} = 1.098684114\sqrt{K} \\ k &= \sqrt{\frac{1}{2}\left[-K + K\sqrt{2}\right]} = \sqrt{K}\sqrt{\frac{-1+\sqrt{2}}{2}} = 0.4550898604\sqrt{K} \end{aligned}$$

Temos ainda que

$$\delta = \frac{c}{k\omega} = \frac{c}{k\frac{2\pi c}{n\lambda}} = \frac{n\lambda}{2\pi k}$$

de forma que

$$\frac{\delta}{\lambda} = \frac{n}{2\pi k} = 0.3842340223,$$

como desejado.

9. **Exercício 17.12:** O meio é quase transparente. Temos que

$$\delta = \frac{c}{k\omega},$$

mas $k = K_i/2n = g/(2n\varepsilon_0\omega)$ de forma que $k\omega = g/2n\varepsilon_0$ e ficamos com

$$\delta = \frac{c2n\varepsilon_0}{g}.$$

Agora, como

$$c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}},$$

o resultado pode ser escrito como

$$\delta = \frac{2n\varepsilon_0}{g\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}} = \frac{2n}{g\sqrt{\mu_0/\varepsilon_0}},$$

como desejado.

Capítulo 18

1. **Exercício 18.1:**O coeficiente de reflexão de Fresnel para uma onda s-polarizada que incide no ar (meio1) sobre um dielétrico (meio2) é dado por

$$r_{12,s} = \frac{\cos\theta_1 - n\cos\theta_2}{\cos\theta_1 + n\cos\theta_2},$$

onde θ_1 é o ângulo de incidência no meio 1, θ_2 é o ângulo de refração e fizemos $n_1 = 1$ por ser o ar. Se $\theta_1 = \theta_B$, então, como sabemos que $\tan\theta_B = n$ (por $n_1 = 1$), temos que

$$\cos^2\theta_B = \frac{1}{\sec^2\theta_B} = \frac{1}{1+\tan^2\theta_B} = \frac{1}{1+n^2}$$

e, portanto,

$$\cos\theta_B = \frac{1}{\sqrt{1+n^2}} \text{ and } \sin\theta_B = \frac{n}{\sqrt{1+n^2}}.$$

A lei de Snell fornece

$$\sin\theta_2 = \frac{\sin\theta_B}{n} = \frac{1}{\sqrt{1+n^2}} \text{ e } \cos\theta_2 = \frac{n}{\sqrt{1+n^2}}$$

e, portanto

$$r_{12,s} = \frac{\frac{1}{\sqrt{1+n^2}} - \frac{n^2}{\sqrt{1+n^2}}}{\frac{1}{\sqrt{1+n^2}} + \frac{n^2}{\sqrt{1+n^2}}} = \frac{1-n^2}{1+n^2},$$

como queríamos demonstrar.

2. **Exercício 18.2:** Uma onda p-polarizada incide no meio 1 (ar) sobre o meio 2 (dielétrico) segundo o ângulo $\theta_1 = \pi/2 - \delta$. Temos que encontrar $R_p(\delta)$ quando $\delta \to 0$ em termos de K. Temos para a onda p-polarizada que

$$r_{12,p} = \frac{n\cos(\pi/2-\delta) - \cos\theta_2}{n\cos(\pi/2-\delta) + \cos\theta_2} = \frac{n\sin\delta - \cos\theta_2}{n\sin\delta + \cos\theta_2}.$$

A lei de Snell nos fornece que $n\sin\theta_2 = \sin(\pi/2-\delta) = \cos\delta$ e, portanto,

$$\cos\theta_2 = \sqrt{1 - \frac{\cos^2\delta}{K}},$$

onde usamos $K = n^2$. Quando $\delta \to 0$ podemos aproximar

$$\sin\delta = \delta \text{ e } \cos\delta = 1$$

até a ordem δ^2. Assim, ficamos com o termo de Fresnel

$$r_{12,p} = \frac{\sqrt{K}\delta - \sqrt{1-\frac{1}{K}}}{\sqrt{K}\delta + \sqrt{1-\frac{1}{K}}} = \frac{K\delta - \sqrt{K-1}}{K\delta + \sqrt{K-1}}.$$

Nós ainda poderíamos fazer

$$r_{12,p} = \frac{\frac{K}{\sqrt{K-1}}\delta - 1}{\frac{K}{\sqrt{K-1}}\delta + 1}$$

e expandir o denominador em série de MacLaurin para obter

$$r_{12,p} = \left(\frac{K}{\sqrt{K-1}}\delta - 1\right)\left(1 - \frac{K}{\sqrt{K-1}}\delta\right) = -\left(1 - \frac{K}{\sqrt{K-1}}\delta\right)^2.$$

Como $R_P = r_{12,p}^2$, ficamos com

$$R_p = \left[\frac{K\delta - \sqrt{K-1}}{K\delta + \sqrt{K-1}}\right]^2 = \left(1 - \frac{K}{\sqrt{K-1}}\delta\right)^4.$$

A inclinação da curva em termos de δ é dada por

$$\frac{dR_p}{d\theta_1} = -\frac{dR_p}{d\delta} = \frac{4K}{\sqrt{K-1}} - \frac{12K}{K-1}\delta + o\left(\delta^2\right).$$

3. **Exercício 18.3:** Agora a onda é p-polarizada e incide do meio 1 (constante K) para o ar e temos

$$r_{12,p} = \frac{\cos\left(\theta_c - \delta\right) - \sqrt{K}\cos\theta_2}{\cos\left(\theta_c - \delta\right) + \sqrt{K}\cos\theta_2}.$$

Temos que

$$\sin\theta_c = \frac{1}{\sqrt{K}}$$

e, portanto,

$$\cos\theta_c = \sqrt{1 - \frac{1}{K}} = \sqrt{\frac{K-1}{K}}$$

Expandindo o cosseno da soma e usando as substituições necessárias, temos

$$r_{12,p} = \frac{\sqrt{1-\frac{1}{K}}\cos\delta + \frac{1}{\sqrt{K}}\sin\delta - \sqrt{K}\cos\theta_2}{\sqrt{1-\frac{1}{K}}\cos\delta + \frac{1}{\sqrt{K}}\sin\delta + \sqrt{K}\cos\theta_2}.$$

Usando a lei de Snell, ficamos com

$$\sin\theta_2 = \sqrt{K}\sin\left(\theta_c - \delta\right) = \left(\cos\delta - \sqrt{K-1}\sin\delta\right) \simeq \left(1 - \sqrt{K-1}\delta\right).$$

Assim

$$\cos\theta_2 \simeq \sqrt{1 - \left(1 - \sqrt{K-1}\delta\right)^2} = \sqrt{2\sqrt{K-1}\delta}.$$

Substituindo, ficamos com

$$r_{12,p} = \frac{\sqrt{K-1} + \delta - \sqrt{2\sqrt{K-1}\delta}}{\sqrt{K-1} + \delta + \sqrt{2\sqrt{K-1}\delta}}$$

Assim, $R_p = r_{12,p}^2$ fica, em primeira aproximação (fazer com o maple)

$$R_p = 1 - 4K\sqrt{\frac{2\delta}{\sqrt{K-1}}},$$

como queríamos demonstrar.

4. **Exercício 18.5:** A luz é p-polarizada e é refletida por uma superfície metálica vindo do ar ($n_1 = 1$ e $n_2 = n + ik$). Para calcular R_p temos que calcular $r_{12,p}$ lembrando que é um valor complexo e que $R_p = |r_{12,p}|^2$. Temos que as mesmas expressões valem para o coeficiente de Fresnel e, assim

$$r_{12,p} = \frac{(n+ik)\cos\theta_1 - \cos\theta_2}{(n+ik)\cos\theta_1 + \cos\theta_2}.$$

Se usamos a aproximação (exigida pelo problema) de $\cos\theta_2 \sim 1$, temos que

$$r_{12,p} = \frac{(n+ik)\cos\theta_1 - 1}{(n+ik)\cos\theta_1 + 1} = \frac{n^2\cos^2\theta_1 + k^2\cos^2\theta_1 - 1 + 2ik\cos\theta_1}{n^2\cos^2\theta_1 + 2n\cos\theta_1 + k^2\cos^2\theta_1 + 1}.$$

Com esse resultado, ficamos com

$$R_p = \frac{n^2\cos^2\theta_1 - 2n\cos\theta_1 + k^2\cos^2\theta_1 + 1}{n^2\cos^2\theta_1 + 2n\cos\theta_1 + k^2\cos^2\theta_1 + 1}.$$

Para achar o mínimo, basta derivar em termos de θ_1 para obter

$$\frac{dR_p}{d\theta_1} = 0 = \frac{n\sin\theta_1\left(n^2\cos^2\theta_1 + k^2\cos^2\theta_1 - 1\right)}{\left(n^2\cos^2\theta_1 + 2n\cos\theta_1 + k^2\cos^2\theta_1 + 1\right)^2}.$$

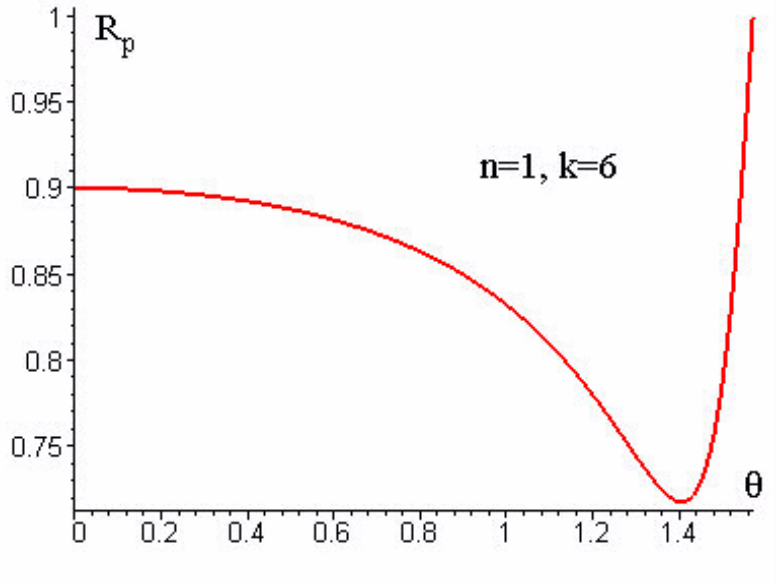
A solução dessa equação implica que

$$\theta_1 = 0 \text{ ou } n^2\cos^2\theta_1 + k^2\cos^2\theta_1 = 1.$$

A solução $\theta_1 = 0$ era esperada, visto que nesse ângulo de ataque teremos R_p máximo. A outra solução deve dar o valor mínimo deste. Assim, temos

$$\cos\theta_1 = \frac{1}{\sqrt{n^2+k^2}}$$

como solução esperada, como queríamos demonstrar. Podemos traçar o gráfico de $R_p(\theta_1)$ para valores arbitrários de n e k, para ver seu comportamento. Na figura abaixo, mostramos esse comportamento para os valores $n = 1$, $k = 6$.



Note que, para estes valores, temos R_p mínimo em $\theta_1 = \arccos\left(1/\sqrt{37}\right) = 1.405647649$.

5. **Exercício 18.6:** Nas condições $k \simeq n \gg 1$ valem as condições de Hagen-Rubens. Note que temos, nesse caso,

$$\frac{2}{k} = 2\sqrt{\frac{2\varepsilon_0\omega}{g}},$$

ou seja,

$$\frac{g}{k^2} = 2\varepsilon_0\omega.$$

A dissipação da energia é dada pelo termo de Joule, $\vec{J}\cdot\vec{E}$ que, na aproximação linear da lei de Ohm, fica

$$d = -gE_2^2,$$

e usamos E_2 pois se trata da onda no meio 2, o metal. Para calcular E_2^2, usamos a relação que envolve os coeficientes de Fresnel,

$$|E_2|^2 = |t_{12}|^2 |E_1|^2,$$

onde

$$t_{12} = \frac{2n_1}{n_2 + n_1}.$$

Com $n_2 = n + ik$, ficamos com

$$|t_{12}|^2 = 4n_1 \frac{1}{(n_1 + n)^2 + k^2} \simeq \frac{2n_1}{k^2}$$

e, portanto,

$$|E_2|^2 = \frac{2n_1}{k^2}\,|E_1|^2\,.$$

Assim, a dissipação fica

$$d = -\frac{2n_1 g}{k^2}\,|E_1|^2 = -4\varepsilon_0\omega n_1^2\,|E_1|^2\,.$$

Se o meio 1 é o ar, então $n_1 = 1$. Se temos $E_1 = 10^3 V/m$ e $f = 10^{10} Hz$, então, $\omega = 2\pi 10^{10} Hz$ e

$$d = -4 \times 8.85 \times 10^{-12} \times 2\pi \times 10^{10} = -2.22 J/m^3.$$

6. **Exercício 18.7:**Uma onda no ar $n_1 = 1$ incide numa superfície condutora com um ângulo θ_1 no intervalo onde a relação de Hagen-Rubens é válida. Assim, temos que

$$r_{12,s} = \frac{\cos\theta_1 - (n+ik)}{\cos\theta_1 + (n+ik)}$$

que gera, após cálculos semelhantes ao que fizemos no exercício anterior,

$$R_s = \frac{n^2 + k^2 + \cos^2\theta_1 - 2n\cos\theta_1}{n^2 + k^2 + \cos^2\theta_1 + 2n\cos\theta_1}.$$

Como temos a absorvância definida como $A_s = 1 - R_s$, ficamos com

$$A_s = \frac{4n\cos\theta_1}{n^2 + k^2 + \cos^2\theta_1 + 2n\cos\theta_1}.$$

No limite de validade da relação de Hagen-Rubens temos que $n \simeq k \gg 1$. Assim, podemos colocar

$$A_s = \frac{2\cos\theta_1}{k},$$

como desejado. Para a onda p-polarizada é a mesma coisa.

7. **Exercício 18.8:** A incidência é normal $\theta_1 = 0$ do ar $n_1 = 1$ para uma superfície condutora $n_2 = n + ik$. Assim, temos que

$$r_{12,s} = \frac{1 - (n+ik)}{1 + (n+ik)} = -\frac{n^2 + k^2 - 1 + 2ik}{n^2 + k^2 + 1 + 2n}.$$

Assim, temos que a parte real e a parte imaginária são dadas por

$$\mathrm{Re}\,\{r_{12,s}\} = -\frac{n^2 + k^2 - 1}{n^2 + k^2 + 1 + 2n} \;\text{ e }\; \mathrm{Im}\,\{r_{12,s}\} = -\frac{2k}{n^2 + k^2 + 1 + 2n}$$

de modo que sua fase fica

$$\alpha_s = \tan^{-1}\left\{\frac{2k}{n^2 + k^2 - 1}\right\},$$

como queríamos demonstrar.

8. **Exercício 18.10:** Temos uma onda que sai de um meio n_1, passa por uma película n_2 e sai pelo meio n_3. Temos que, para onda p-polarizada com incidência normal

$$r_{12,p} = \frac{n_2 - n_1}{n_2 + n_1} \text{ e } r_{23,p} = \frac{n_3 - n_2}{n_3 + n_2}.$$

Podemos transformar as quantidades em $r_{23,p}$ de modo a colocá-la escrita em termos de elementos dos meios 1 e 2, para comparar o resultado com $r_{12,p}$. Assim, temos $n_2 = \sqrt{n_1 n_3}$ e

$$r_{23,p} = \frac{\frac{n_2^2}{n_1} - n_2}{\frac{n_2^2}{n_1} + n_2} = \frac{n_2^2 - n_2 n_1}{n_2^2 + n_2 n_1} = \frac{n_2 - n_1}{n_2 + n_1} = r_{12,p},$$

como queríamos demonstrar. Para incidência normal temos que

$$R = \frac{r_{12}^2 + r_{23}^2 + 2r_{12}r_{23}\cos\beta}{1 + r_{12}^2 r_{23}^2 + 2r_{12}r_{23}\cos\beta}.$$

Se $\cos\beta = -1$, então ficamos com o numerador igual a zero, dado que $r_{23,p} = r_{12,p}$.

9. **Exercício 18.11:** A freqüência do feixe é ω e ele incide do ar ($n_1 = 1$) para um filme dielétrico de índice de refração $n_2 = n$ com espessura d. Os coeficientes de transmissão e reflexão são dados por

$$r = \frac{r_{12} + r_{23}e^{i\beta}}{1 + r_{12}r_{23}e^{i\beta}}$$

o que fornece

$$R = \frac{r_{12}^2 + r_{23}^2 + 2r_{12}r_{23}\cos\beta}{1 + r_{12}^2 r_{23}^2 + 2r_{12}r_{23}\cos\beta},$$

como visto no problema anterior. Entretanto, sabemos que

$$r_{12} = \frac{n-1}{n+1} \text{ e } r_{23} = \frac{1-n}{1+n}$$

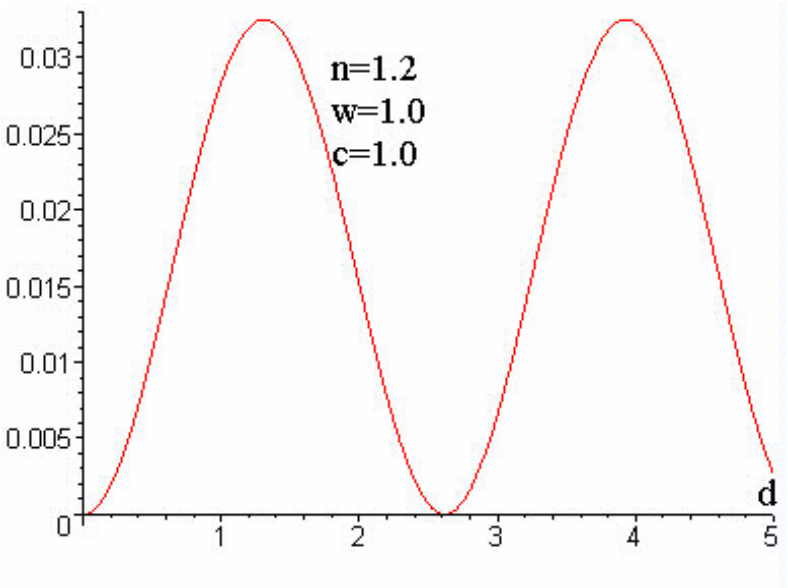
de modo que ficamos com

$$R = \frac{\left(n^2-1\right)^2(1-\cos\beta)}{n^4 + 6n^2 + 1 - \left(n^2-1\right)^2\cos\beta}$$

Neste caso, temos que $\beta = 2d\frac{\omega}{c}n$ (ver 18.84 no texto) de modo que

$$R = \frac{\left(n^2-1\right)^2\left[1-\cos\left(2d\frac{\omega}{c}n\right)\right]}{n^4 + 6n^2 + 1 - \left(n^2-1\right)^2\cos\left(2d\frac{\omega}{c}n\right)}.$$

Supondo n fico e ω fixo, o comportamento de R em termos de d fica dado como mostra a figura abaixo:



10. **Exercício 18.12:** Temos que:

    (a) Para $\beta_1 = 0$, a equação matricial fica

    $$\begin{pmatrix} E_1 \\ E_1' \end{pmatrix} = \frac{1}{t_{12}} \begin{pmatrix} 1 & r_{12} \\ r_{12} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_2 \\ 0 \end{pmatrix},$$

    o que dá

    $$E_1 = \frac{1}{t_{12}} E_2,$$

    o que é verdade, visto que sabemos que $E_2 = t_{12} E_1$, por definição do coeficiente de transmissão de Fresnel. Também obtemos que

    $$E_1' = \frac{r_{12}}{t_{12}} E_2$$

    e usando a expressão para E_2 em termos de E_1, ficamos com $E_1' = r_{12} E_1$, que é o resultado esperado.

    (b) Temos agora que (o sinal na dos expoentes complexos parece estar errado, mas isso não é relevante, pois precisamos apenas de $r^* r$ e $t^* t$)

    $$\begin{pmatrix} E_1 \\ E_1' \end{pmatrix} = \frac{1}{t_{12} t_{23}} \begin{pmatrix} 1 & r_{12} \\ r_{12} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-i\beta_2/2} & r_{23} e^{-i\beta_2/2} \\ r_{23} e^{i\beta_2/2} & e^{i\beta_2/2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_2 \\ 0 \end{pmatrix}$$
    $$= \frac{1}{t_{12} t_{23}} \begin{pmatrix} e^{-i\beta_2/2} + r_{12} r_{23} e^{i\beta_2/2} & r_{23} e^{-i\beta_2/2} + r_{12} e^{i\beta_2/2} \\ r_{12} e^{-i\beta_2/2} + r_{23} e^{i\beta_2/2} & e^{i\beta_2/2} + r_{12} r_{23} e^{-i\beta_2/2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

o que fornece

$$E_1 = \frac{1}{t_{12}t_{23}}\left(e^{-i\beta_2/2} + r_{12}r_{23}e^{i\beta_2/2}\right)E_3.$$

Reorganizando os termos, ficamos com

$$E_3 = \frac{t_{12}t_{23}e^{i\beta_2/2}}{1 + r_{12}r_{23}e^{i\beta_2}}.$$

Da mesma forma, ficamos com

$$E_1' = \frac{1}{t_{12}t_{23}}\left(r_{12}e^{-i\beta_2/2} + r_{23}e^{i\beta_2/2}\right)E_3$$

e, substituindo E_3 em termos de E_1, ficamos com

$$E_1' = \frac{r_{12} + r_{23}e^{-i\beta_2}}{1 + r_{12}r_{23}e^{i\beta_2}}E_1,$$

o que corresponde às definições do livro texto.

11. **Exercício 18.13:** Uma superfície metálica tem sobreposta uma película dielétrica. O cáculo da reflectância é dado por (incidência normal)

$$R = \frac{r_{12}^2 + r_{23}^2 + 2r_{12}r_{23}\cos\beta}{1 + r_{12}^2r_{23}^2 + 2r_{12}r_{23}\cos\beta}$$

onde

$$r_{12} = \frac{n-1}{n+1} \text{ e } r_{23} = \frac{n_3 - n}{n_3 + n},$$

onde n é o índice de refração da película (de espessura d) e $n_3 = n + ik$ e como o condutor é perfeito, $k \to \infty$, de modo que

$$r_{23} = \pm 1.$$

Assim, ficamos com

$$R = \frac{\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^2 + 1 + 2\left(\frac{n-1}{n+1}\right)\cos\beta}{1 + \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^2 + 2\left(\frac{n-1}{n+1}\right)\cos\beta} = 1,$$

como queríamos demonstrar.

12. **Exercício 18.14:** A radiação incide normalmente a partir do ar sobre um filme metálico espesso de tal forma que podemos desprezar as múltiplas reflexões. Assim, temos que

$$\hat{t} = \hat{t}_{12}\hat{t}_{23}.$$

Temos que

$$t_{12} = \frac{2}{1+(n+ik)}$$

e também

$$t_{23} = \frac{2\,(n+ik)}{1+(n+ik)}.$$

Assim, ficamos com

$$T = \left|\hat{t}\right|^2 = \frac{n^2+k^2}{1+4n+6n^2+2k^2+4n^3+4nk^2+n^4+2n^2k^2+k^4}.$$

Eta exercício idiota! Desculpem aí por ter indicado.

13. **Exercício 18.18:** Se vamos apenas somar as **intensidades**, então a intensidade refletida fica dada por

$$R = R_{12} + T_{12}R_{23}T_{21} + T_{12}R_{23}R_{12}R_{23}T_{21} + \cdots$$

e portanto

$$R = R_{12} + T_{12}R_{23}T_{21}\left[1 + R_{23}R_{12} + \cdots\right]$$

e, visto que temos uma série geométrica, ficamos com

$$R = R_{12} + \frac{T_{12}R_{23}T_{21}}{1-R_{21}R_{23}}.$$

Assim,

$$R = \frac{R_{12} - R_{12}R_{21}R_{23} + T_{12}R_{23}T_{21}}{1-R_{21}R_{23}};$$

note, entretanto, que

$$\hat{r}_{12} = -\hat{r}_{21} \Rightarrow R_{12} = R_{21}.$$

Assim, ficamos com

$$R = \frac{R_{12} + R_{23}\left(T_{12}T_{21} - R_{12}^2\right)}{1-R_{12}R_{23}}.$$

Agora note que

$$T_{12} = \frac{4n_1^2}{\left(n_2+n_1\right)^2} \text{ e } T_{21} = \frac{4n_2^2}{\left(n_2+n_1\right)^2}$$

de modo que

$$T_{21}T_{12} - R_{12}^2 = -\frac{n_2^2 - 6n_1n_2 + n_1^2}{\left(n_2+n_1\right)^2}$$

ao mesmo tempo que

$$1 - 2R_{12} = -\frac{n_2^2 - 6n_1n_2 + n_1^2}{\left(n_2+n_1\right)^2}.$$

Assim, podemos escrever

$$R = \frac{R_{12} + R_{23}\left(1 - 2R_{12}\right)}{1 - R_{12}R_{23}} = \frac{R_{12} + R_{23} - 2R_{12}R_{23}}{1 - R_{12}R_{23}},$$

como queríamos demonstrar. Se $R_{12} = R_{23}$, então facilmente chegamos a

$$R = 2\frac{R_{12} - R_{12}^2}{1 - R_{12}^2} = 2\frac{R_{12}\left(1 - R_{12}\right)}{\left(1 - R_{12}\right)\left(1 + R_{12}\right)}$$

o que fornece

$$R = \frac{2R_{12}}{1 + R_{12}},$$

como desejado.

14. **Exercício 18.17:** Encontrar $\vec{E}$ e $\vec{B}$ para ondas TM propagando-se no plano yz entre duas placas condutoras em $y = 0$ e $y = a$. Temos que, para TM o campo magnético $\vec{B}$ deve ser dado por (onde usamos que $r_s = -1$ nas placas para o campo elétrico)

$$\vec{B} = \hat{\imath} B_0 \left[e^{ik(y\cos\theta + z\sin\theta) - \omega t} \pm e^{ik(-y\cos\theta + z\sin\theta) - \omega t}\right]$$

de forma que ficamos com

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \nabla \times \vec{B}$$

e

$$\nabla \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ B_x & 0 & 0 \end{vmatrix} = \hat{\jmath}\partial_z B_x - \hat{k}\partial_y B_x$$

fornecendo

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial E_y}{\partial t} = B_0 ik\sin\theta \left[e^{ik(y\cos\theta + z\sin\theta)} \pm e^{ik(-y\cos\theta + z\sin\theta)}\right] e^{-i\omega t}$$

e, portanto, ($\omega = kc$)

$$E_y = -cB_0\sin\theta \left[e^{ik(y\cos\theta + z\sin\theta)} \pm e^{ik(-y\cos\theta + z\sin\theta)}\right] e^{-i\omega t}.$$

Da mesma forma

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial E_z}{\partial t} = B_0 ik\cos\theta \left[e^{ik(y\cos\theta + z\sin\theta)} \mp e^{ik(-y\cos\theta + z\sin\theta)}\right] e^{-i\omega t}$$

e, portanto,

$$E_z = cB_0\cos\theta \left[e^{ik(y\cos\theta + z\sin\theta)} \mp e^{ik(-y\cos\theta + z\sin\theta)}\right] e^{-i\omega t}$$

Note que $E_z = 0$ em $y = 0$ de modo que temos que escolher o sinal negativo na expressão anterior. Mas isso significa que temos que escolher o sinal positivo na expressão inicial para $\vec{B}$. Desta forma, ficamos com

$$\begin{aligned} B_x &= B_0 \cos(ky \cos\theta)\, e^{i[kz \sin\theta - \omega t]} \\ E_y &= -cB_0 \sin\theta \cos(ky \cos\theta)\, e^{i[kz \sin\theta - \omega t]} \\ E_z &= cB_0 \cos\theta \sin(ky \sin\theta)\, e^{i[kz \sin\theta - \omega t]} \end{aligned}$$

15. **Exercícios 18.19 e 18.20:** chatíssimos... basta substituir na expressão. FAÇAM! hehehe

Capítulo 19

1. **Exercício 19.2:** Sabemos que a Maxwelliana é dada pela expressão

$$f(\omega) = \frac{\omega_p^2}{\omega_0^2} \frac{\gamma/4}{(\omega_0 - \omega)^2 + \gamma^2/4}$$

de forma que seu ponto de máximo é obtido exatamente sobre $\omega = \omega_0$ e é dado por

$$M = f(\omega_0) = \frac{\omega_p^2}{\omega_0^2} \frac{\gamma/4}{\gamma^2/4} = \frac{\omega_p^2}{\gamma\omega_0^2}.$$

Na altura média, ficamos com

$$\frac{M}{2} = \frac{\omega_p^2}{\omega_0^2} \frac{\gamma/4}{(\omega_0 - \omega)^2 + \gamma^2/4}.$$

Usando o M dado acima, ficamos com

$$\frac{\omega_p^2}{\gamma\omega_0^2} = \frac{\omega_p^2}{\omega_0^2} \frac{\gamma/4}{(\omega_0 - \omega)^2 + \gamma^2/4}$$

cuja solução gera o resultado

$$\omega_0 - \omega = \pm\frac{\gamma}{2},$$

que é o resultado desejado.

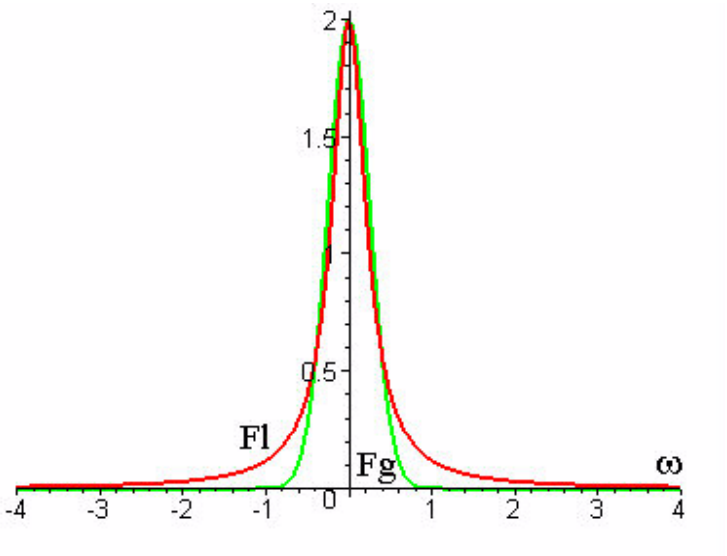
2. **Exercício 19.5:** A lorentziana tem a forma

$$F_L(\omega) = \frac{1}{\gamma} \frac{\gamma^2}{2(\omega_0 - \omega)^2 + \gamma^2},$$

implicando uma altura máxima 2 e uma largura de meio máximo 1/2 ($\gamma = 0.5$), centrada em $\omega_0 = \omega$. A gaussiana com as mesmas características é dada por

$$F_G(\omega) = \frac{1}{\gamma} \exp\left(-\frac{2(\omega - \omega_0)^2}{\gamma^2}\right).$$

Seus gráficos podem ser vistos na figura abaixo: ($M = 2$, $g = 0.5$, $\omega_0 = 0$)



3. **Exercício 19.6:** Temos que

$$K(\omega) = K_\infty + \frac{\omega_p^2}{\omega_T^2 - \omega^2}$$

e também que $K(\omega_L) = 0$. Com este último vínculo, obtemos que

$$0 = K_\infty + \frac{\omega_p^2}{\omega_T^2 - \omega_L^2}$$

que, resolvendo para ω_p fornece

$$\omega_p^2 = -K_\infty \left(\omega_T^2 - \omega_L^2\right).$$

Agora

$$K(0) = K_0 = K_\infty + \frac{\omega_p^2}{\omega_T^2}.$$

Substituindo nessa última expressão o resultado obtido para ω_p, fica-se com

$$\frac{K_0}{K_\infty} = \frac{\omega_L^2}{\omega_T^2},$$

como queríamos demonstrar.

4. **Exercício 19.8:** A constante dielétrica complexa é dada por

$$\hat{g} = \frac{g_0}{1 - i\omega\tau} = \frac{g_0\left(1 + i\omega\tau\right)}{1 + \omega^2\tau^2}$$

de modo que

$$g_r = \frac{g_0}{1+\omega^2\tau^2} \text{ e } g_i = \frac{g_0\omega\tau}{1+\omega^2\tau^2}.$$

Assim, disso resulta que, para $\omega = 1/\tau$,

$$g_r = g_i = \frac{g_0}{2}.$$

5. **Exercício 19.9:** O comportamento das constantes do problema é dado por

$$\frac{\gamma}{\omega_p} = 10^{-2}.$$

Queremos obter n e k, do índice de refração complexo $\hat{n} = n + ik$, para a freqüência $\omega = \omega_p$. Para o caso em questão, temos que

$$K_r - 1 = -\frac{\omega_p^2}{\omega^2+\gamma^2} \text{ e } K_i = \frac{\omega_p^2\gamma}{\omega\left(\omega^2+\gamma^2\right)}.$$

Se calcularmos estes valores em $\omega = \omega_p$, como desejado, ficamos com

$$\begin{aligned} K_r &= 1 - \frac{1}{1+\left(\gamma/\omega_p\right)^2} = 1 - \frac{1}{1+10^{-4}} = .999900e-4 \\ K_i &= \frac{\gamma/\omega_p}{1+\left(\gamma/\omega_p\right)^2} = \frac{10^{-2}}{1+10^{-4}} = .9999000100e-2 \end{aligned}$$

Assim, K_i é duas ordens de grandeza maior do que K_r. Agora, temos que

$$\begin{aligned} n &= \sqrt{\frac{1}{2}\left[K_r + \sqrt{K_r^2+K_i^2}\right]} \simeq \sqrt{\frac{K_i}{2}} = .7071067810\sqrt{K_i} \\ k &= \sqrt{\frac{1}{2}\left[-K_r + \sqrt{K_r^2+K_i^2}\right]} \simeq \sqrt{\frac{K_i}{2}} = .7071067810\sqrt{K_i} \end{aligned}$$

como desejado.

6. **Exercício 19.13:** A tangente do ângulo desejado é dada por

$$\tan\theta = \frac{\left(K_0-1\right)\omega\tau}{K_0+\left(\omega\tau\right)^2}.$$

Como procuramos um máximo e a tangente é uma função crescente, podemos derivar diretamente a tangente para obter

$$\frac{d\tan\theta}{d\tau} = \frac{(K_0-1)\omega}{K_0+\omega^2\tau^2} - \frac{\left(K_0-1\right)\omega\tau\left(2\omega^2\tau\right)}{\left[K_0+\omega^2\tau^2\right]^2} = 0$$

dando, depois de simplificações,

$$\omega = \frac{K_0}{\tau} \text{ ou } \tau = \frac{K_0}{\omega}.$$

Para tal valor, as constantes dielétricas real e imaginária ficam

$$K_r = \frac{K_0 - 1}{1 + K_0^2} \simeq \frac{1}{K_0} \simeq 0 \text{ e } K_i = \frac{(K_0 - 1) K_0}{1 + K_0^2} \simeq 1.$$

7. **Exercício 19.14:** Temos que

$$\hat{g} = -i\omega\hat{\chi}$$

de modo que

$$g_r(\omega) = \omega\chi_i(\omega) \text{ e } g_i(\omega) = -\omega\chi_r(\omega).$$

Temos também que

$$\chi_r(\omega) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\omega'\chi_i(\omega')}{\omega'^2 - \omega^2} d\omega';$$

multiplicando ambos os membros por ω^2 e tomando o limite com $\omega \to \infty$ temos que

$$-\frac{\pi}{2}\lim_{\omega\to\infty} \omega^2\chi_r(\omega) = \int_0^\infty \omega'\chi_i(\omega')\, d\omega'.$$

Usando a relação para $g_r(\omega)$ ficamos com

$$\int_0^\infty g(\omega)\, d\omega = -\frac{\pi}{2}\lim_{\omega\to\infty} \omega^2\chi_r(\omega).$$

Note, entretanto, que para $\omega \to \infty$ devemos ter (essa parte o livro não deixa clara, infelizmente, gerando os problemas para a solução)

$$\chi_r(\omega) = \varepsilon(\omega) - 1 = -\frac{\omega_p^2}{\omega^2},$$

de modo que

$$\int_0^\infty g(\omega)\, d\omega = -\frac{\pi}{2}\lim_{\omega\to\infty} \omega^2\chi_r(\omega) = \frac{\pi}{2}\omega_p^2 = \frac{\pi N e^2}{2m},$$

como queríamos demonstrar. Por outro lado, podemos começar com

$$g_r(\omega) = \omega\chi_i(\omega)$$

e escrever

$$\lim_{\omega\to\infty} g_r(\omega) = \lim_{\omega\to\infty} -\frac{2\omega^2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\chi_r(\omega')}{\omega'^2 - \omega^2} d\omega' = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \chi_r(\omega)\, d\omega$$

e, portanto,

$$\int_0^\infty \chi_r(\omega)\, d\omega = \frac{\pi}{2}\lim_{\omega\to\infty} g_r(\omega).$$

Com a relação entre $g_r(\omega)$ e $\chi_i(\omega)$ e lembrando que $\chi_i(\omega)$ vai para zero com ω^3, quando $\omega \to \infty$, temos que

$$\int_0^\infty \chi_r(\omega)\, d\omega = \frac{\pi}{2}\lim_{\omega\to\infty} g_r(\omega) = 0,$$

como esperado.

8. **Exercício 19.15:** Temos que

$$\chi_i(\omega) = \frac{\pi}{2}\omega_0\chi_0\delta(\omega-\omega_0) \text{ e } E(t) = \frac{E_0}{\omega_0}\delta(t).$$

Assim, usando a expressão (19.82) do livro, temos que

$$P(t) = \int_0^\infty f(t')\,E(t-t')\,dt'.$$

Substituindo $E(t)$ nessa expressão, ficamos com

$$P(t) = \frac{E_0}{\omega_0}\int_0^\infty f(t')\,\delta(t-t')\,dt' = \frac{E_0}{\omega_0}f(t).$$

Mas, de acordo com a expressão (19.83), temos que

$$f(t) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \chi_i(\omega)\sin(\omega t)\,d\omega.$$

Assim, usando a expressão para $\chi_i(\omega)$ ficamos com

$$f(t) = \omega_0\chi_0\int_0^\infty \delta(\omega-\omega_0)\sin(\omega t)\,d\omega = \omega_0\chi_0\sin(\omega_0 t).$$

Juntando os resultados, ficamos com

$$P(t) = E_0\chi_0\sin(\omega_0 t),$$

como queríamos demonstrar.

9. **Exercício 19.16:** Para fazer as mesmas passagens para $J(t)$ ao invés de $P(t)$, lembramos que temos que desenvolver os resultados em termos de uma relação **linear** entre $J(t)$ e o campo elétrico $E(t)$ (já que esse é um dos pressupostos das relações de Kramers-Kronig) além de ser uma relação **causal** (sendo este o outro pressuposto). Assim, escrevemos

$$J(t) = \int_0^\infty h(t)\,E(t-t')\,dt',$$

onde

$$E(t) = \int_{-\infty}^{+\infty}\hat{E}(\omega)\,e^{-i\omega t}d\omega \text{ e } J(t) = \int_{-\infty}^{+\infty}\hat{g}(\omega)\,\hat{E}(\omega)\,e^{-i\omega t}d\omega.$$

Assim, podemos escrever

$$E(t-t') = \int_{-\infty}^{+\infty}\hat{E}(\omega)\,e^{-i\omega\left(t-t'\right)}d\omega$$

e substituir na primeira expressão para obter

$$J(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{E}(\omega)\, e^{-i\omega t} \int_0^{\infty} h(t')\, e^{+i\omega t'}\, dt' d\omega$$

que implica, por comparação com a outra expressão para $J(t)$ em

$$\hat{g}(\omega) = \int_0^{\infty} h(t')\, e^{+i\omega t'}\, dt'$$

e, portanto,

$$\begin{aligned} g_r(\omega) &= \int_0^{\infty} h(t') \cos(\omega t')\, dt' \\ g_i(\omega) &= \int_0^{\infty} h(t') \sin(\omega t')\, dt' \end{aligned}$$

como no caso da suscetiblidade. Invertendo a equação para $g_i(\omega)$ ficamos com

$$h(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} g_i(\omega') \sin(\omega' t)\, d\omega'$$

e substituindo em $g_r(\omega)$ temos finalmente

$$g_r(\omega) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} g_i(\omega') \sin(\omega' t') \cos(\omega t')\, dt' d\omega'.$$

Integrando sobre t', ficamos com

$$\begin{aligned} g_r(\omega) &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\omega' g_i(\omega')}{\omega'^2 - \omega^2} d\omega' \\ g_i(\omega) &= -\frac{2}{\pi}\omega \int_0^{\infty} \frac{g_r(\omega')}{\omega'^2 - \omega^2} d\omega' \end{aligned}$$

como queríamos demonstrar (as integrais são feitas pelo método dos resíduos).

(a) Agora vamos usar a relação $\hat{g} = -i\omega\hat{\chi}$. Assim, ficamos, para a expressão de $g_i(\omega)$, com

$$-\omega\chi_r(\omega) = -\frac{2}{\pi}\omega \int_0^{\infty} \frac{\omega' \chi_i(\omega')}{\omega'^2 - \omega^2} d\omega'$$

dando

$$\chi_r(\omega) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\omega' \chi_i(\omega')}{\omega'^2 - \omega^2} d\omega',$$

que é similar àquela já encontrada. Já para $g_r(\omega)$ pode-se repetir os passos acima para ficar com

$$\chi_i(\omega) = -\frac{2}{\omega\pi} \int_0^{\infty} \frac{\omega'^2 \chi_r(\omega')}{\omega'^2 - \omega^2} d\omega',$$

que é diferente da anteriormente obtida, mas que tem que ser passível de ser levada nela.

(b) Temos que

$$\begin{aligned}\hat{g}(\omega) &= g_r(\omega) + i g_i(\omega) \\ &= \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\omega' g_i(\omega')\, d\omega'}{\omega'^2 - \omega^2} - \frac{2i}{\pi}\omega \int_0^\infty \frac{g_r(\omega')\, d\omega'}{\omega'^2 - \omega^2}\end{aligned}$$

de modo que

$$\hat{g}(0) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{g_i(\omega')}{\omega'} d\omega'.$$

Mas como $g_i(\omega) = -\omega\chi_r(\omega)$, ficamos com

$$-\frac{\pi}{2}\hat{g}(0) = \int \chi_r(\omega)\, d\omega.$$

A expressão para $\int_0^\infty g(\omega)\, d\omega$ pode ser obtida por meios similares.

Capítulo 20

1. **Exercício 20.1:** Se a oscilação é radial, então temos que a aceleração é dada por

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = a\widehat{r},$$

onde $\widehat{r}$ é o vetor unitário na direção radial. Mas os campos que contribuem para a radiação são dados por

$$\vec{B}\left(\vec{r},t\right) = -\frac{\mu_0}{4\pi c r^2}\vec{r}\times\ddot{\vec{p}} \quad \text{e} \quad \vec{E}\left(\vec{r},t\right) = -\frac{c}{r}\vec{r}\times\vec{B}\left(\vec{r},t\right).$$

Como a aceleração é radial, temos que

$$\ddot{\vec{p}} = ea\widehat{r}$$

e o produto vetorial na expressão de $\vec{B}\left(\vec{r},t\right)$ se anula. Assim, $\vec{B}\left(\vec{r},t\right) = 0$ e portanto, $\vec{E}\left(\vec{r},t\right) = 0$.

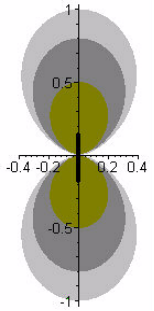
2. **Exercício 20.2:** Para ver isso, temos que integrar o vetor de Poynting apenas com relação ao tempo, pois a integração sobre o elemento de superfície $d\Omega$ elimina justamente as componentes θ e ϕ da emissão de radiação. Temos que

$$S = \frac{E_\theta B_\phi}{\mu_0}R^2 = \frac{1}{\mu_0}\frac{lI_0\omega}{4\pi\varepsilon_0 c^2}\frac{\sin\theta}{R}\frac{\mu_0 I_0 l\omega}{4\pi c}\frac{\sin\theta}{R}\cos^2\left[\omega\left(t-\frac{r}{c}\right)\right]$$

que, promediado no tempo, fica

$$\bar{S} = \frac{1}{2}\frac{I_0^2 l^2\omega^2}{16\pi^2\varepsilon_0 c^3}\sin^2\theta.$$

Como esperado, até mesmo pelas características de simetria do problema, não há dependência em ϕ (o problema tem simetria cilíndrica, já que é esta a conformação do dipolo). Considerando o termo multiplicativo como uma constante, a configuração de radiação (média no tempo) fica dada como mostrado na figura abaixo.



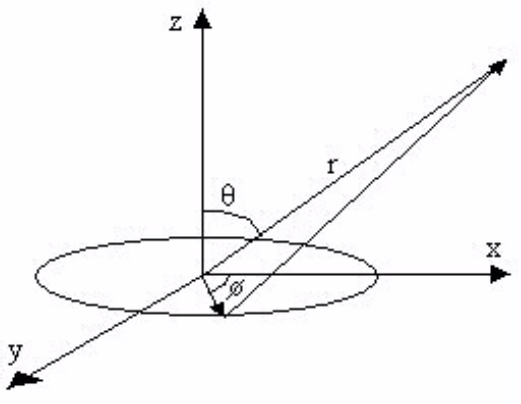
3. **Exercício 20.3:** Temos uma espira circular de fio, conduzindo a corrente $I = I_0 \cos \omega t$. Sabemos que

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint \frac{I\left(r', t - |\vec{r} - \vec{r}'|/c\right)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d\vec{l},$$

onde $d\vec{l}$ é tomado sobre a espira e, portanto, vale $d\vec{l} = Rd\phi\widehat{\phi}$, onde R é o raio da espira. Note que, em coordenadas cartesianas, tomando x, y e z do ponto de observação, $\vec{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$, e $\vec{r}' = x'\mathbf{i} + y'\mathbf{j}$, temos que

$$\begin{aligned} |\vec{r} - \vec{r}'| &= r\left[1 - \tfrac{2\vec{r}\cdot\vec{r}'}{r^2}\right]^{1/2} = r - \tfrac{\vec{r}\cdot\vec{r}'}{r} \\ &= r - R\sin\theta\cos\phi' \end{aligned} ,$$

onde θ é o ângulo entre o eixo z e o vetor $\vec{r}$ (cf. figura 1). Note que colocamos o eixo x sob o ponto de observação e que o ângulo ϕ' refere-se à posição das cargas (e portanto, vem com a linha).



Esquema de variáveis no exercício 20.3

Substituindo na expressão para o $\vec{A}(\vec{r}, t)$, temos que

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{1}{r} \oint I\left(r', t - \frac{r - R\sin\theta\cos\phi'}{c}\right) d\vec{l}'.$$

Este é o termo em primeira ordem associado à expansão do potencial vetor (já colocamos o r para fora da integral). Esta expressão pode ser comparada com a expressão (8.69) do livro texto, onde igual termo aparece, *mas se anula devido a termos a corrente I constante*. Note, entretanto, que agora temos uma corrente que não é constante. Para fazermos esta integração, podemos expandir o termo da corrente, que escrevemos nova-

mente como

$$\begin{array}{c}\vec{A}\left(\vec{r},t\right)=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{1}{r}\oint I\left(r',t-\frac{r}{c}+\frac{R\sin\theta}{c}\right)d\vec{l}'\\ =\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{1}{r}\left[\oint I\left(t-\frac{r}{c}\right)d\vec{r}'+\oint\frac{\vec{r}'.\vec{r}}{cr}\left(\frac{\partial I}{\partial t}\right)_{R\sin\theta=0}d\vec{l}'\right]\\ =0+\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{1}{r}\frac{1}{c}\frac{dI\left(t-\frac{r}{c}\right)}{dt}\sin\theta\int_0^{2\pi}\cos^2\phi' R^2 d\phi'\widehat{\phi}=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{1}{cr}\frac{dI\left(t-\frac{r}{c}\right)}{dt}\sin\theta\left(\pi R^2\right)\widehat{\phi}\\ =\frac{\mu_0}{4\pi}A\frac{1}{cr}\sin\theta\frac{dI\left(t-\frac{r}{c}\right)}{dt}\widehat{\phi}\end{array}$$

onde colocamos a espira com área na direção z, para termos o elemento de linha na direção $\widehat{\phi}$ (em coordenadas esféricas). Assim, temos

$$\vec{A}\left(\vec{r},t\right)=A_\phi\widehat{\phi}$$

e

$$A_\phi=\frac{\mu_0}{4\pi}a\sin\theta\frac{\dot{I}\left(t-\frac{r}{c}\right)}{cr},$$

e ficamos apenas com a componente $\widehat{\phi}$ do potencial vetor. Ora, o rotacional deste termo é dado pela expressão

$$\begin{array}{c}\nabla\times\vec{A}=\widehat{r}\frac{1}{r\sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial\theta}\left(A_\phi\sin\theta\right)-\frac{\partial A_\theta}{\partial\phi}\right]+\widehat{\theta}\frac{1}{r}\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial A_r}{\partial\phi}-\frac{\partial(rA_\phi)}{\partial r}\right]\\ +\widehat{\phi}\frac{1}{r}\left[\frac{\partial(rA_\theta)}{\partial r}-\frac{\partial A_r}{\partial\theta}\right]\end{array}$$

e portanto

$$\begin{array}{c}\nabla\times\vec{A}=\widehat{r}\frac{1}{r\sin\theta}\left[\cos\theta A_\phi+\frac{\partial A_\phi}{\partial\theta}\right]-\widehat{\theta}\frac{1}{r}\frac{\partial(rA_\phi)}{\partial r}=\\ =\widehat{r}\cot\theta\frac{A_\phi}{r}-\widehat{\theta}\left[\frac{\partial A_\phi}{\partial r}+\frac{1}{r}A_\phi\right]\end{array}.$$

Note, entretanto, que o termo em $\widehat{r}$ e o último termo em $\widehat{\theta}$ dão contribuições com $r^{-\alpha}$, $\alpha\geq 2$ e, portanto, não são relevantes para a parte radiativa. Assim, ficamos com

$$\vec{B}\left(\vec{r},t\right)=B_\theta^{rad}\left(\vec{r},t\right)\widehat{\theta},$$

onde

$$\begin{array}{c}B_\theta^{rad}\left(\vec{r},t\right)=-\frac{\partial A_\phi}{\partial r}=-\frac{\mu_0}{4\pi}a\sin\theta\frac{\partial}{\partial r}\frac{\dot{I}\left(t-\frac{r}{c}\right)}{r}\\ =-\frac{\mu_0}{4\pi}a\left[\frac{\dot{I}\left(t-\frac{r}{c}\right)}{r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial\dot{I}\left(t-\frac{r}{c}\right)}{\partial r}\right].\end{array}$$

O primeiro termo novamente pode ser desprezado e ficamos com

$$B_\theta^{rad}\left(\vec{r},t\right)=-\frac{\mu_0}{4\pi}a\frac{\sin\theta}{cr}\frac{\partial\dot{I}\left(t-\frac{r}{c}\right)}{\partial r}.$$

A derivada acima fica

$$\frac{\partial\dot{I}\left(t-\frac{r}{c}\right)}{\partial r}=-\frac{I_0\omega^2}{c}\cos\left[\omega\left(t-\frac{r}{c}\right)\right]$$

e, portanto

$$B_\theta\left(\vec{r},t\right)=\frac{\mu_0 I_0}{4\pi}a\frac{\omega^2}{c^2 r}\sin\theta\cos\left[\omega\left(t-\frac{r}{c}\right)\right].$$

O campo elétrico pode ser obtido de cálculos similares.

4. **Exercício 20.4:** Para calcular a relação, devemos usar a fração (o resultado para o vetor de Poyinting do dipolo magnético usa a resposta do livro, à qual o aluno deve ter chegado após o exercício anterior—o termo $\frac{1}{2}$ refere-se ao fato de estarmos comparando potências médias)

$$\frac{P_{ele}}{P_{mag}}=\frac{\frac{I_0^2 l^2}{6\pi\varepsilon_0}\frac{\omega^2}{c^3}\frac{1}{2}}{\frac{\mu_0 I_0^2 A^2}{6\pi}\frac{\omega^4}{c^3}\frac{1}{2}}.$$

Como o diâmetro de A é igual a l, temos que $A=\pi(l/2)^2=\pi l^2/4$. Assim, ficamos com

$$\frac{P_{ele}}{P_{mag}}=\frac{16c^2}{\pi^2 l^2\omega^2}.$$

Assim, se o comprimento é $l=2m$ e a freqüência é $\omega=10^6 Hz$, temos

$$\frac{P_{ele}}{P_{mag}}=\frac{36}{\pi^2}10^4,$$

aproximadamente 10^4 vezes maior para a emissão do dipolo elétrico.

5. **Exercício 20.6:** Temos que

$$\varphi\left(\vec{r},t\right)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{Q}{r}+\frac{\vec{r}\cdot\vec{p}\left(t-\frac{r}{c}\right)}{r^3}+\frac{\vec{r}\cdot\dot{\vec{p}}\left(t-\frac{r}{c}\right)}{cr^2}\right]$$

e

$$\vec{A}\left(\vec{r},t\right)=\frac{\mu_0}{4\pi r}\dot{\vec{p}}\left(t-\frac{r}{c}\right).$$

A condição de Lorentz é dada por

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial\varphi}{\partial t}+\nabla\cdot\vec{A}\left(\vec{r},t\right)=0.$$

Agora,

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial\varphi}{\partial t}=\frac{\varepsilon_0\mu_0}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{\vec{r}\cdot\dot{\vec{p}}\left(t-\frac{r}{c}\right)}{r^3}+\frac{\vec{r}\cdot\ddot{\vec{p}}\left(t-\frac{r}{c}\right)}{cr^2}\right]$$

enquanto que

$$\begin{aligned}\nabla\cdot\vec{A}\left(\vec{r},t\right)=\tfrac{\mu_0}{4\pi}\nabla\cdot\left[\frac{\dot{\vec{p}}\left(t-\frac{r}{c}\right)}{r}\right]&=\tfrac{\mu_0}{4\pi}\left[\left(\nabla\tfrac{1}{r}\right)\cdot\dot{\vec{p}}\left(t-\tfrac{r}{c}\right)+\tfrac{1}{r}\nabla\cdot\dot{\vec{p}}\left(t-\tfrac{r}{c}\right)\right]\\&=-\tfrac{\mu_0}{4\pi}\left[\tfrac{\vec{r}\cdot\dot{\vec{p}}\left(t-\frac{r}{c}\right)}{r^3}+\tfrac{\vec{r}\cdot\ddot{\vec{p}}\left(t-\frac{r}{c}\right)}{r^2 c}\right]\end{aligned}.$$

Estas duas últimas relações mostram que a condição de Lorentz é satisfeita.

6. **Exercício 20.8:** Temos que o momento de dipolo pode ser representado por

$$\vec{p} = p_0 \left(\mathbf{i} \cos \omega t + \mathbf{j} \sin \omega t\right),$$

representando um dipolo perpendicular à direção z, girando no plano xy com freqüência ω e mantendo o seu módulo como p_0. Desta forma, temos que

$$\ddot{\vec{p}} = -\omega^2 \vec{p}.$$

Os campos ficam dados por

$$\vec{B}\left(\vec{r}, t\right) = \frac{\mu_0 \omega^2}{4\pi c r^2} \vec{r} \times \vec{p} \quad \text{e} \quad \vec{E}\left(\vec{r}, t\right) = -\frac{\mu_0 \omega^2}{4\pi r^3} \vec{r} \times \left(\vec{r} \times \vec{p}\right).$$

O vetor de Poynting é

$$\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H} = \frac{\vec{E} \times \vec{B}}{\mu_0} = \frac{\mu_0 \omega^4}{16\pi^2 r^5} \left|\vec{r} \times \vec{p}\right|^2 \vec{r}.$$

Note que agora não podemos fixar a direção de $\vec{p}$ como o eixo z, como foi feito no texto principal. Isso altera drasticamente o cálculo da potência irradiada (confira a expressão).

7. **Exercício 20.9:** Sabemos que

$$E_k = \frac{e^2}{8\pi \varepsilon_0 r}.$$

(a) Queremos calcular $\frac{PT}{E_k}$, onde T é o período orbital. Sabemos ainda que

$$P = \frac{e^2}{4\pi \varepsilon_0} \frac{2}{3} \frac{\dot{v}^2}{c^3}.$$

Assim, temos que

$$\frac{PT}{E_k} = \frac{e^2}{4\pi \varepsilon_0} \frac{2}{3} \frac{\dot{v}^2}{c^3} \frac{T}{\frac{e^2}{8\pi \varepsilon_0 r}} = \frac{4}{3} \frac{\dot{v}^2 r T}{c^3}.$$

Mas $T = \frac{2\pi}{\omega}$ e como o movimento é circular, temos que

$$\dot{v} = \frac{v^2}{r},$$

devido à força centrípeta. Assim,

$$\frac{PT}{E_k} = \frac{4}{3} \frac{\dot{v}^2 r T}{c^3} = \frac{8\pi}{3} \frac{v^4}{c^3 \left(r\omega\right)}.$$

Mas, novamente, como o movimento é circular, temos que $r\omega = v$, de modo que

$$\frac{PT}{E_k} = \frac{8\pi}{3} \left(\frac{v}{c}\right)^3,$$

como queríamos demonstrar.

(b) Temos que

$$\frac{v}{c} = \frac{1}{137n};$$

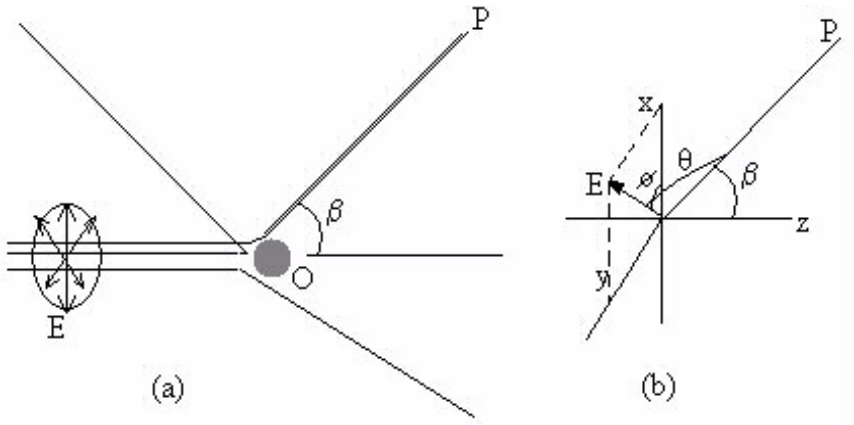
se $n = 2$, então

$$\frac{PT}{E_k} = \frac{8\pi}{3}\left(\frac{1}{137 \times 2}\right)^3 = \frac{\pi}{3 \times 137^3} = 4.072 \times 10^{-7}.$$

8. Da expressão (20.53) do capítulo, sabemos que a intensidade do feixe incidente é dada por

$$S_0 = \frac{1}{\mu_0 c} E^2.$$

Considere o esquema do fenômeno e o esquema de eixos mostrados na figura abaixo ((a) e (b), respectivamente).



Sabemos também que o ângulo entre dois vetores quaisquer, em coordenadas esféricas, é dado por (Jackson, p. 77)

$$\cos\gamma = \cos\theta\cos\theta' + \sin\theta\sin\theta'\cos\left(\phi - \phi'\right),$$

onde γ é o ângulo entre os vetores quaisquer, θ, ϕ são os ângulos esféricos de um deles e θ'e ϕ' os ângulos esféricos do outro (ou seja, os ângulos que fazem com os eixos cartesianos em coordenadas esféricas). Adaptando ao nosso problema, como mostrado na figura anterior (b), temos (chamando os ângulos com linha como aqueles associados ao campo elétrico e os sem linha como os associados ao vetor OP)

$$\gamma = \theta, \quad \theta'_E = \frac{\pi}{2}, \quad \phi'_E = \phi, \quad \phi_{op} = 0, \quad \theta_{op} = \beta,$$

ficamos com

$$\cos\theta = \cos\beta\cos\frac{\pi}{2} + \sin\beta\sin\frac{\pi}{2}\cos\phi = \sin\beta\cos\phi,$$

de modo que a expressão para $d\sigma_T/d\Omega$, dada no livro (20.52) como

$$\frac{d\sigma_T}{d\Omega} = R_e^2 \sin^2\theta$$

fica

$$\frac{d\sigma_T}{d\Omega} = R_e^2 \left(1 - \sin^2\beta\cos^2\phi\right).$$

Ora, integrando sobre todos os ϕ's, como é óbvio, se queremos a média sobre todos estes ângulos, temos que (lembrar como se calcula média de ângulos e que $\left\langle\cos^2\phi\right\rangle = 1/2$)

$$\frac{d\sigma_T}{d\Omega} = R_e^2\left(1 - \frac{\sin^2\beta}{2}\right) = R_e^2\left(1 - \frac{1-\cos^2\beta}{2}\right) = R_e^2\left(\frac{1+\cos^2\beta}{2}\right),$$

que é o resultado do livro (20.53). Como trata-se da medida da *intensidade* espalhada e não da potência espalhada, deve-se ter

$$I_S = I_0\left(\frac{1+\cos^2\beta}{2}\right)\frac{R_e^2}{r^2},$$

já que a intensidade espalhada decai com r^2, visto ser esférica.

Capítulo 21

1. **Exercício 21.1:**

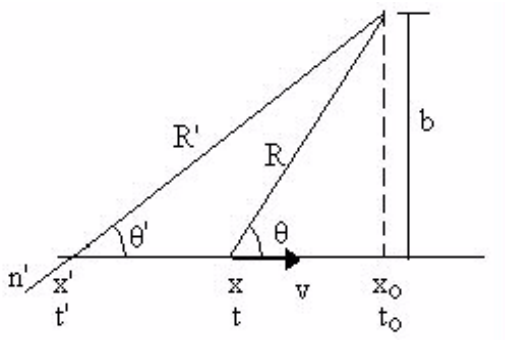
   (a) Devemos demonstrar que

   $$R^* = R\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\sin\theta\right)^2}.$$

   Sabemos que

   $$R^* = R'\left(1 + \frac{\vec{n}' \cdot \vec{v}}{c}\right).$$

   Considere a disposição de eixos mostrada na figura abaixo (semelhante à do livro):

   Note que usando as equações desenvolvidas no livro, chegamos ao resultado (Eq. 21.23 do livro)

   $$\begin{aligned} R^* &= \sqrt{v^2\left(t_0 - t\right)^2 + b^2\left(1 - v^2/c^2\right)} = \sqrt{v^2\left(t_0 - t\right)^2 + b^2\left(1 - v^2/c^2\right)} \\ &= \sqrt{v^2\left(t_0 - t\right)^2 + R^2\sin^2\theta\left(1 - v^2/c^2\right)} \end{aligned},$$

   onde usamos que $b = R\sin\theta$. Note agora que

   $$v^2\left(t_0 - t\right)^2 = R\cos\theta,$$

   de modo que

   $$R^* = \sqrt{R^2\cos^2\theta + R^2\sin^2\theta\left(1 - v^2/c^2\right)} = R\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\sin\theta\right)^2},$$

   como queríamos demonstrar.

   (b) O campo elétrico fica dado por

   $$\vec{E}\left(\vec{r}, t\right) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)\frac{\vec{R}}{R^{*3}}.$$

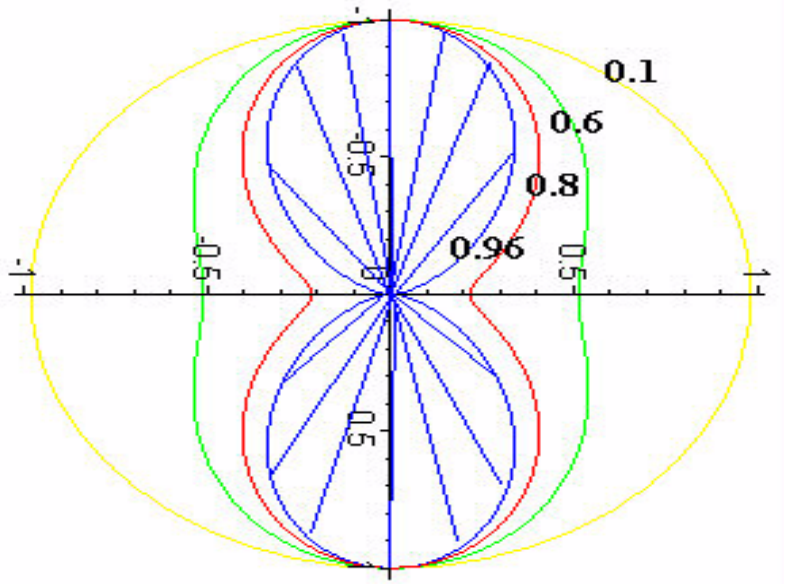
Assim, o resultado anterior implica que

$$\vec{E}\left(\vec{r},t\right)=E_0\frac{\vec{R}}{R^3}\frac{1}{\left[1-\left(\frac{v}{c}\sin\theta\right)^2\right]^{3/2}}$$

e

$$\left|\vec{E}\right|=\frac{E_0}{R^2}\frac{1}{\left[1-\left(\frac{v}{c}\sin\theta\right)^2\right]^{3/2}}$$

e o gráfico, para vários valores de v/c estão mostradas na figura a seguir.



Os vetores de campo elétrico estão mostrados para o caso $v/c=0.96$. A densidade de linhas de campo deixa de ser esférica (como no caso $v=0$ ou, aproximadamente, para $v=0.1$) e passa a haver uma maior densidade de linhas de campo na direção perpendicular ao eixo do movimento da partícula.

2. Agora temos que calcular o campo magnético $d\vec{B}$ devido a uma distribuição de cargas dq com velocidade constante v. Temos, evidentemente, que

$$\begin{aligned}d\vec{B}=\tfrac{1}{c^2}\vec{v}\times\vec{E}&=\tfrac{1}{4\pi\varepsilon_0c^2}\left(1-\tfrac{v^2}{c^2}\right)\tfrac{(dq)\vec{v}\times\vec{R}}{R^{*3}}\\&=\tfrac{1}{4\pi\varepsilon_0c^2}\left(1-\tfrac{v^2}{c^2}\right)\tfrac{(vdq)\sin\theta}{R^2\left[1-(v\sin\theta/c)^2\right]^{3/2}}\\&=\tfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(1-\tfrac{v^2}{c^2}\right)\tfrac{\sin\theta Idx}{R^2\left[1-(v\sin\theta/c)^2\right]^{3/2}}\end{aligned}\quad .$$

Usando agora o fato que

$$dx = R\sin\theta d\theta,$$

ficamos com

$$dB = \frac{I}{4\pi\varepsilon_0 R c^2}\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)\frac{\sin\theta d\theta}{\left[1-(v\sin\theta/c)^2\right]^{3/2}}$$

e, portanto,

$$\begin{aligned} B(R) &= \tfrac{\mu_0 I}{4\pi R}\left(1-\tfrac{v^2}{c^2}\right)\int_0^{\pi}\tfrac{udu}{\left[1-(vu/c)^2\right]^{3/2}} \\ &= \tfrac{\mu_0 I}{4\pi R}\left(1-\tfrac{v^2}{c^2}\right)\tfrac{2}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)} \\ &= \tfrac{\mu_0 I}{2\pi R} \end{aligned} .$$

Portanto,

$$B(R) = \frac{\mu_0 I}{2\pi R},$$

que é o resultado usual, como queríamos demonstrar.

3. Agora devemos supor que a aceleração de uma partícula está na mesma direção de sua velocidade. Temos, portanto, que

$$\frac{d\vec{v}}{dt} \shortparallel \vec{v}.$$

O vetor de Poynting fica (Eq. 21.56)

$$\vec{S} = \frac{q^2}{16\pi^2\varepsilon_0 c^3}\frac{\vec{R}'\left(\vec{R}'\times\dot{\vec{v}}'\right)^2}{R'^5},$$

de modo que, na direção do movimento, $\vec{R}' \parallel \dot{\vec{v}}'$ e $\vec{S} = 0$.