ECUACIONES DIFERENCIALES PARCIALES

Ciencias Físico Matemáticas

COAQUIRA CÁRDENAS Víctor Alcides

Ayacucho, Noviembre del 2021



1. **Ecuaciones diferenciales de primer orden**
   - Propagación de Singularidades



Propagación de Singularidades

Volviendo al problema de Cauchy

$$\begin{cases} \alpha(x,y)u_x + \beta(x,y)u_y = \gamma(x,y) \\ u\big(f(s),g(s)\big) = h(s), \quad s \in I \subseteq \mathbb{R} \end{cases} \tag{1}$$

donde I es un intervalo abierto, las funciones α, β, γ son de clase C^1 en algún abierto $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ y h es una función real dado.

En sesiones anteriores vimos que, si $h \in C^1(I)$ y la curva plana $\xi(s) = (f(s), g(s))$ no es tangenta a las características planas, entonces el problema (1) tiene una única solución clásica en una vecindad de la curva ξ.



La solución en (x_o, y_o) se obtiene integrando la ecuación a lo largo de la curva característica que pasa por $(x_o, y_o) = \big(x(s_o, t_o), y(s_o, t_o)\big)$ de $t = 0$ que corresponde al punto $\big(f(s_o), g(s_o)\big) = \big(x(s_o, 0), y(s_o, 0)\big)$ hasta $t = t_o$.

Así, la solución en el punto $\big(f(s_o), g(s_o)\big) \in \xi$, por ello el punto $\big(f(s_o), g(s_o)\big)$ es llamado el dominio de dependencia de (x_o, y_o).

Si h (o h') tiene una discontinuidad en s_o, entonces u (o alguna de sus derivadas) tendrá discontinuidades a lo largo de la característica que pasa por $\big(f(s_o), g(s_o)\big)$.

Por lo tanto, las *singularidades* son *propagadas* a lo largo de las características planas.



Ejemplo.

Resolver el problema

$$\begin{aligned} xu_y - yu_x &= 4xy \\ u(x,0) &= h(x), \quad x \geq 0, \end{aligned}$$

donde

$$h(x) = \begin{cases} x^2, & 0 \leq x \leq 1, \\ 1, & x > 1. \end{cases}$$



Observación # 1

Consideremos una EDP lineal homogenea

$$\alpha(x,y)u_x + \beta(x,y)u_y = 0. \tag{2}$$

Introduciendo el vector $v(x,y) = \big(\alpha(x,y), \beta(x,y)\big)$ podemos escribir la ecuación (2) en la forma

$$v \cdot \nabla u = 0.$$

Así, toda solución de (2) es constante a lo largo de las líneas integrales del campo vectorial v, es decir, a lo largo de las características proyectadas, soluciones del sistema de características reducidas

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \alpha(x,y) \\ \frac{dy}{dt} &= \beta(x,y). \end{aligned} \tag{3}$$



El sistema (3) es localmente equivalente a la EDO

$$\beta(x,y)dx - \alpha(x,y)dy = 0.$$

Si una primera integral[1] $\phi = \phi(x,y)$ del sistema (3) es conocido, entonces la familia de las características proyectadas está dada en su forma implícita por

$$\phi(x,y) = c_1,\ c_1 \in \mathbb{R},$$

y la solución general de (2) estará dada por la fórmula

$$u\big(x,y\big) = \varphi\big(\phi(x,y)\big)$$

[1] Recordemos que una primera integral (también llamada constante de movimiento) para un sistema de EDO $\dfrac{dx}{dt} = f(x)$ es una C^1-función $\psi = \psi(x)$, que es constante a lo largo de las trayectorias del sistema, es decir, tal que $\nabla\psi \cdot f \equiv 0$.



Ejemplo # 1

Resolver el problema

$$yu_x + xu_y = 0,$$
$$u(x,0) = x^4.$$

Resolución: El sistema característico reducido es $\frac{dx}{dt} = y$; $\frac{dy}{dt} = x$, localmente equivalente a $xdx - ydy = 0$.

Integrando, encontramos que las características proyectadas que vienen a ser las hipérbolas $x^2 - y^2 = k$.

Por lo tanto, $\phi(x,y) = x^2 - y^2 = k$ es una primera integral.

Entonces, la solución general de la EDP es

$$u(x,y) = \psi\big(\phi(x,y)\big) = \psi\big(x^2 - y^2\big).$$

Imponiendo la condición de Cauchy $u(x,0) = x^4$, tenemos $\psi(x^2) = x^4$, a partir del cual se tiene $\psi(\boxdot) = (\boxdot)^2$.

La solución del problema de Cauchy dado es $u(x,y) = x^4 + y^4 - 2x^2y^2$.



Ejemplo # 2 **(Ejemplo 2.2 Valéria Iório Pg. 61)**

Resolver el problema

$$u_x + bu_y = 0,$$
$$u(0,y) = \frac{1}{y}, \quad y \neq 0,$$

donde b es una constante.

Resolución:

En este caso la curva inicial es el eje de las ordenadas $x = 0$, pero la función es discontinua en el origen.

Resolviendo el sistema $\frac{dx}{1} = \frac{dy}{b} = \frac{dz}{0}$, o bien $\frac{dx}{dt} = 1$, $\frac{dy}{dt} = b$, $\frac{dz}{dt} = 0.$, se obtienen las características $y = bx + k$, donde c es una constante, la solución de la EDP no está definida a lo largo de la recta $y = bx$, de hecho,

$$u(x,y) = \psi(y - bx).$$

Como $u(0,y) = \psi(y - b\cdot 0) = \frac{1}{y} \rightsquigarrow \psi(y) = \frac{1}{y}$. Así, $\psi(y - bx) = \frac{1}{y - bx}$

Finalmente, $u(x,y) = \frac{1}{y - bx}$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ con $y \neq bx$.



Observación # 2

La situación en el caso no lineal, tanto en lo que se refiere a la *propagación de singularidades* como al *comportamiento de la solución*, es bastante diferente.

Para tener una idea de lo que puede acontecer, consideremos EDP no lineales de la forma

$$u_t + \big(q(u)\big)_x = 0. \;\; t > 0, \;\; x \in \mathbb{R}, \tag{4}$$

donde q es una función dada de clase C^2.

Observe que la equación (4) puede ser escrita en la forma

$$u_t + q'(u)u_x = 0. \tag{5}$$



Lo que corresponde a las *características planas* en este caso son las curvas en el plano xt satisfaciendo

$$\frac{dx}{dt} = q'(u), \tag{6}$$

donde $u = u\big(x(t), t\big)$.

A lo largo de tales curvas (de hecho son rectas) u es constante pues

$$\frac{d}{dt}u\big(x(t), t\big) = u_x \frac{dx}{dt} + u_t = u_t + q'(u)u_x = 0$$

Es claro que esas rectas no pueden ser determinadas a *priori*, una vez que la ecuación (6) involucra el valor (desconocido) de u a lo largo de la curva.

Podemos sin embargo usar esas curvas para hallar la solución de (4) satisfaciendo una determinada condición inicial

$$u(x, 0) = u_0(x)\,,\ x \in \mathbb{R}$$



La idea aquí es, como en el caso lineal, construir la solución utilizando las *características planas* que interceptan la *curva inicial plana* $t = 0$. Dado un $x_0 \in \mathbb{R}$, u es constante e igual a $u_0(x_0)$ a lo largo de la recta que pasa por el punto $(x_0, 0)$ y que satisface (6), esto es

$$u = u_0(x_0) \text{ a lo largo de la recta } x = q'\big(u_0(x_0)\big)t + x_0$$

Estas rectas son las *características planas* para el problema

$$\begin{aligned} u_t + \big(q(u)\big)_x &= 0, \quad t > 0, \ x \in \mathbb{R}, \\ u(x,0) &= u_0(x) \quad x \in \mathbb{R}. \end{aligned} \tag{7}$$



Ejemplo. (Ejemplo 2.2 Valéria Iório Pg. 63)

Resolver el problema de Cauchy

$$u_t + uu_x = 0,$$
$$u(x,0) = u_0(x),$$

donde

$$u_0(x) = \begin{cases} 1, & x < 0, \\ 1-x, & 0 \leq x \leq 1, \\ 0, & x > 1. \end{cases}$$



EDPs completamente no lineales

Consideramos una EDP de primer orden completamente no lineal de la forma

$$F(x, y, u, u_x, u_y) = 0. \tag{8}$$

Si $u_x = p$ y $u_y = q$, asumiremos que $F = F(x, y, u, p, q)$ es una función suave de sus argumentos y, para evitar casos triviales, que $F_p^2 + F_q^2 \neq 0$.

En el caso cuasilineal,

$$F = F(x, y, u, p, q) = \alpha(x, y, u) \cdot p + \beta(x, y, u) \cdot q - \gamma(x, y, u)$$

$$\begin{aligned} F_p &= \alpha(x, y, u), \\ F_q &= \beta(x, y, u), \end{aligned} \tag{9}$$

La ecuación (8) tiene también una interpretación geométrica. Sea $u = u(x, y)$ una solución suave y consideremos un punto (x_0, y_0, z_0) en su gráfica.



La ecuación (8) constituye un vínculo entre las componentes u_x y u_y del vector normal $n_0 = (-u_x(x_0, y_0), -u_y(x_0, y_0), 1)$.

Razonando por analogía con el caso cuasilineal, a partir de (9) se llega a la ecuación

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= F_p(x, y, u, p, q), \\ \frac{dy}{dt} &= F_q(x, y, u, p, q), \end{aligned} \tag{10}$$

donde $z(t) = u\big(x(t), y(t)\big)$ y

$$\begin{aligned} p = p(t) &= u_x\big(x(t), y(t)\big), \\ q = q(t) &= u_y\big(x(t), y(t)\big), \end{aligned} \tag{11}$$

Así, teniendo en cuenta (10), la ecuación para z es:

$$\frac{dz}{dt} = u_x \frac{dx}{dt} + u_y \frac{dy}{dt} = pF_p + qF_q \tag{12}$$



Las ecuaciones (12) y (10) corresponden al sistema característico auxiliar de Lagrange, pero con dos incógnitas más: $p(t)$ y $q(t)$.

Necesitamos dos ecuaciones más. Procediendo formalmente, a partir de (10) podemos escribir

$$\begin{aligned}\frac{dp}{dt} &= u_{xx}\big(x(t),y(t)\big)\frac{dx}{dt} + u_{yy}\big(x(t),y(t)\big)\frac{dy}{dt}\\ &= u_{xx}\big(x(t),y(t)\big)F_p + u_{yy}\big(x(t),y(t)\big)F_q.\end{aligned}$$

tenemos que eliminar las derivadas de segundo orden.

Como u es una solución de (8), se cumplirá la identidad

$$F(x,y,u(x,y),u_x(x,y),u_y(x,y)) \equiv 0.$$

La diferenciación parcial con respecto a x nos da $u_{xy} = u_{yx}$;

$$F_x + F_u u_x + F_p u_{xx} + F_q u_{xy} \equiv 0.$$



Calculando a lo largo de $x = x(t)$, $y = y(t)$, obtenemos

$$u_{xx}\big(x(t), y(t)\big) F_p + u_{xy}\big(x(t), y(t)\big) F_q = -F_x - pF_z \tag{13}$$

Así, deducimos para p la siguiente ecuación diferencial:

$$\frac{dp}{dt} = -F_x(x, y, z, p, q) - pF_z(x, y, z, p, q).$$

Del mismo modo, encontramos

$$\frac{dq}{dt} = -F_y(x, y, z, p, q) - qF_z(x, y, z, p, q).$$

En conclusión, nos lleva al siguiente sistema característico de cinco ecuaciones autónomas:

$$\begin{aligned}
\frac{dx}{dt} &= F_p \\
\frac{dy}{dt} &= F_q \\
\frac{dz}{dt} &= pF_p + qF_q \\
\frac{dp}{dt} &= -F_x - pF_z \\
\frac{dq}{dt} &= -F_y - qF_z
\end{aligned} \tag{14}$$



Obsérvese que $F = F\big(x(t), y(t), z(t), p(t), q(t)\big)$ es una primera integral de (8). De hecho,

$$\begin{aligned}\frac{dF}{dt} &= F_x\frac{dx}{dt} + F_y\frac{dy}{dt} + F_z\frac{dz}{dt} + F_p\frac{dp}{dt} + F_q\frac{dq}{dt}\\ &= F_xF_p + F_yF_q + F_z(pF_p + qF_q) + F_p(-F_x - pF_z) + F_q(-F_y - qF_z)\\ &\equiv 0,\end{aligned}$$

y por lo tanto, si $F\big(x(t_0), y(t_0), z(t_0), p(t_0), q(t_0)\big) = 0$ en algún t_0, entonces $F\big(x(t), y(t), z(t), p(t), q(t)\big) \equiv 0$



Observación

Se sabe que, un problema de Cauchy consiste en buscar una solución u de (8), asumiendo valores prescritos en una curva dada γ_0 en el plano XY.
Si γ_0 tiene la parametrización $x = f(s),\ y = g(s),\ s \in I \subseteq \mathbb{R}$ queremos que

$$u\big(f(s), g(s)\big) = h(s),\ s \in I$$

donde $h = h(s)$ es una función dada.

Suponemos que $0 \in I$ y que f, g, h son funciones suaves en I.

Sea además γ_0 la *curva inicial*, parametrizada por
$x = f(s),\ y = g(s),\ z = h(s)$, donde estas ecuaciones sólo especifican los puntos *iniciales* para x, y y z.

Para resolver el sistema característico, primero tenemos que completar γ_0 en una franja

$$\big(f(s),\ g(s),\ h(s),\ \delta(s),\ \phi(s)\big)$$

donde $\delta(s) = u_x\big(f(s), g(s)\big)$ y $\phi(s) = u_y\big(f(s), g(s)\big)$.

Las dos funciones $\delta(s)$ y $\phi(s)$ representan los valores iniciales de p y q y no pueden elegirse arbitrariamente.



Una primera condición que deben satisfacer $\delta(s)$ y $\phi(s)$ es

$$F\big(x(t), y(t), z(t), p(t), q(t)\big) \equiv 0$$

Y una segunda condición proviene de diferenciar $h(s) = u\big(f(s), g(s)\big)$.

El resultado de este último es la llamada condición de franja

$$h'(s) = \delta(s) f'(s) + \phi(s) g'(s)\big)$$

Ahora, estamos en condiciones de dar un procedimiento (formal) para construir una solución del problema de Cauchy.

Determinar una solución $u = u(x, y)$ de la ecuación (8), tal que $u\big(f(s), g(s)\big) = h(s),\ s \in I$ consistirá en:

1. Resolver para $\delta(s)$ y $\phi(s)$ el sistema (no lineal).

$$\begin{cases} F\big(f(s), g(s), h(s), \delta(s), \phi(s)\big) = 0 \\ \qquad\qquad \delta(s) f'(s) + \phi(s) g'(s) = h'(s) \end{cases} \tag{15}$$



2. Resolver el sistema característico (14) con condiciones iniciales

$$x(0) = f(s)\,,\ y(0) = g(s)\,,\ z(0) = h(s)\,,\ p(0) = \delta(s)\,,\ q(0) = \phi(s).$$

del cual encontramos la solución

$$x = X(t,s)\,,\ y = Y(t,s)\,,\ z = Z(t,s)\,,\ p = P(t,s)\,,\ q = Q(t,s).$$

3. Resolver $x = X(t,s),\ y = Y(t,s)$ para encontrar s y t en términos de x y y, finalmente sustituir $s = S(x,y)$ y $t = T(x,y)$ en $z = Z(t,s)$ para obtener la solución $z = u(x,y)$.

Ejemplo # 1.

Resolver el problema de Cauchy

$$u_x u_y = u,$$
$$u(0,y) = y^2.$$



Resolución:

La EDP dada es $u_x u_y = u \iff u_x u_y - u = 0$.

Luego, si $u_x = p \; ; \; u_y = q$, se tiene .

$$F = F(x, y, u, u_x, u_y) = F(x, y, z, p, q) = pq - z \; = F(z, p, q),$$

donde $F_x = 0, \quad F_y = 0, \quad F_z = -1, \quad F_p = q, \quad F_q = p.$

Y el sistema característico de cinco ecuaciones autónomas:

$$\begin{aligned}
\frac{dx}{dt} &= F_p = q \\
\frac{dy}{dt} &= F_q = p \\
\frac{dz}{dt} &= pF_p + qF_q = p(q) + q(p) = 2pq = 2z \qquad (16) \\
\frac{dp}{dt} &= -F_x - pF_z = -0 - p(-1) = p \\
\frac{dq}{dt} &= -F_y - qF_z = -0 - q(-1) = q
\end{aligned}$$



Una parametrización de la curva inicial γ_0 es

$$\begin{aligned} x &= f(s) = 0, \\ y &= g(s) = s, \\ z &= h(s) = s^2, \end{aligned}$$

donde $f'(s) = 0, \;\; g'(s) = 1, \;\; h'(s) = 2s$

1. Para completar la franja inicial resolvemos para $\delta(s)$ y $\phi(s)$ el siguiente sistema

$$\begin{cases} F\big(f(s),\, g(s),\, h(s),\, \delta(s),\, \phi(s)\big) = 0 \\ \delta(s)f'(s) + \phi(s)g'(s) = h'(s) \end{cases}$$

Es decir, relvamos

$$\begin{cases} \delta(s)\phi(s) - h(s) = 0 \\ \delta(s)\cdot 0 + \phi(s)\cdot 1 = 2s \end{cases} \iff \begin{cases} \delta(s)\phi(s) = s^2 \\ \phi(s) = 2s \end{cases}$$

Así, $\phi(s) = 2s \quad$ y $\quad \delta(s) = \dfrac{s}{2}$.



2. Resolvamos el sistema característico (16) con condiciones iniciales

$$x(0) = f(s)\,,\ y(0) = g(s)\,,\ z(0) = h(s)\,,\ p(0) = \delta(s)\,,\ q(0) = \phi(s).$$

- Si, $\dfrac{dp}{dt} = p \rightsquigarrow \dfrac{dp}{p} = dt \rightsquigarrow \ln p = t + c_1 \rightsquigarrow p = k_1 e^t$

  Como $p(0) = \delta(s)$, es decir $k_1 e^0 = \dfrac{s}{2} \rightsquigarrow k_1 = \dfrac{s}{2}$, así $p = \dfrac{1}{2} s e^t$.
- Si, $\dfrac{dq}{dt} = q \rightsquigarrow \dfrac{dq}{q} = dt \rightsquigarrow \ln q = t + c_2 \rightsquigarrow q = k_2 e^t$

  Como $q(0) = \phi(s)$, es decir $k_2 e^0 = 2s \rightsquigarrow k_2 = 2s$, así $q = 2se^t$.
- Si, $\dfrac{dz}{dt} = 2z \rightsquigarrow \dfrac{dz}{z} = 2dt \rightsquigarrow \ln z = 2t + c_3 \rightsquigarrow z = k_3 e^{2t}$

  Como $z(0) = h(s)$, es decir $k_3 e^{2\cdot 0} = s^2 \rightsquigarrow k_3 = s^2$, así $z = s^2 e^{2t}$.
- Si, $\dfrac{dx}{dt} = q \rightsquigarrow \dfrac{dx}{dt} = 2se^t \rightsquigarrow dx = 2se^t dt \rightsquigarrow x = 2se^t + k_4$

  Como $x(0) = f(s)$, es decir $2se^0 + k_4 = 0 \rightsquigarrow k_4 = -2s$, así

  $$x = 2se^t - 2s = 2s(e^t - 1) = X(s,t) \quad \cdots (i).$$



- Si, $\dfrac{dy}{dt} = p \rightsquigarrow \dfrac{dy}{dt} = \dfrac{1}{2}se^t \rightsquigarrow dy = \dfrac{1}{2}se^t dt \rightsquigarrow y = \dfrac{1}{2}se^t + k_5$

  Como $y(0) = g(s)$, es decir $\dfrac{1}{2}se^0 + k_5 = s \rightsquigarrow k_5 = \dfrac{1}{2}s$, así

  $y = \dfrac{1}{2}se^t + \dfrac{1}{2}s = \dfrac{1}{2}s(e^t + 1) = Y(s,t) \quad \cdots (ii).$

3. Resolvamos $x = X(t,s),\ y = Y(t,s)$ para s y t en términos de x e y, sustituir $s = S(t,x)$ y $t = T(t,x)$ en $z = Z(t,s)$ para finalmente obtener la solución $z = u(x,y)$. Esto es,

(a) de $(i) \div (ii)$: $\dfrac{x}{y} = 4\dfrac{e^t - 1}{e^t + 1} \rightsquigarrow \dfrac{x}{4y} = 1 - \dfrac{2}{e^t + 1}$,

$$\frac{2}{e^t + 1} = 1 - \frac{x}{4y} \rightsquigarrow \frac{e^t + 1}{2} = \frac{4y}{4y - x} \rightsquigarrow e^t = \frac{4y + x}{4y - x} \quad \cdots (iii),$$

(b) $(iii) \div (ii)$: $y = s\dfrac{4y}{4y - x} \rightsquigarrow s = \dfrac{4y - x}{4} = S(x,y)$

$$z = u(x,y) = \left(\frac{4y - x}{4}\right)^2 \frac{(4y + x)^2}{(4y - x)^2} = \frac{1}{16}(4y + x)^2$$



Ejemplo # 2.

Resolver el problema de Cauchy

$$u_x^2 - 3u_y^2 = u,$$

$$u(x,0) = x^2.$$

Resolución:

La EDP dada es $u_x^2 - 3u_y^2 = u \iff u_x^2 - 3u_y^2 - u = 0$.

Luego, si $u_x = p$; $u_y = q$, se tiene .

$$F = F(x,y,u,u_x,u_y) = F(x,y,z,p,q) = p^2 - 3q^2 - z = F(z,p,q),$$

donde $F_x = 0$, $F_y = 0$, $F_z = -1$, $F_p = 2p$, $F_q = -6q$.



Y el sistema característico de la EDP es:

$$\begin{aligned}
\frac{dx}{dt} &= F_p = 2p \\
\frac{dy}{dt} &= F_q = -6q \\
\frac{dz}{dt} &= pF_p + qF_q = p(2p) + q(-6q) = 2p^2 - 6q^2 = 2z \qquad (17) \\
\frac{dp}{dt} &= -F_x - pF_z = -0 - p(-1) = p \\
\frac{dq}{dt} &= -F_y - qF_z = -0 - q(-1) = q
\end{aligned}$$



Una parametrización de la curva inicial γ_0 es

$$\begin{aligned} x &= f(s) = s, \\ y &= g(s) = 0, \\ z &= h(s) = s^2, \end{aligned}$$

donde $f'(s) = 1, \;\; g'(s) = 0, \;\; h'(s) = 2s$

1. Para completar la franja inicial resolvemos para $\delta(s)$ y $\phi(s)$ el siguiente sistema

$$\begin{cases} F\big(f(s),\, g(s),\, h(s),\, \delta(s),\, \phi(s)\big) = 0 \\ \delta(s)f'(s) + \phi(s)g'(s) = h'(s) \end{cases}$$

Es decir, relvamos

$$\begin{cases} \delta^2(s) - 3\phi(s) - h(s) = 0 \\ \delta(s)\cdot 1 + \phi(s)\cdot 0 = 2s \end{cases} \iff \begin{cases} \delta^2(s) - 3\phi(s) = s^2 \\ \delta(s) = 2s \end{cases}$$

Así, $\delta(s) = 2s \quad$ y $\quad \phi(s) = \pm s$.



2. Resolvamos el sistema característico (17) con condiciones iniciales

$$x(0) = f(s)\,,\ y(0) = g(s)\,,\ z(0) = h(s)\,,\ p(0) = \delta(s)\,,\ q(0) = \phi(s).$$

- Si, $\dfrac{dp}{dt} = p \rightsquigarrow \dfrac{dp}{p} = dt \rightsquigarrow \ln p = t + c_1 \rightsquigarrow p = k_1 e^t$

  Como $p(0) = \delta(s)$, es decir $k_1 e^0 = 2s \rightsquigarrow k_1 = 2s$, así $p = 2se^t$.

- Si, $\dfrac{dq}{dt} = q \rightsquigarrow \dfrac{dq}{q} = dt \rightsquigarrow \ln q = t + c_2 \rightsquigarrow q = k_2 e^t$

  Como $q(0) = \phi(s)$, es decir $k_2 e^0 = \pm s \rightsquigarrow k_2 = \pm s$, así $q = \pm se^t$.

- Si, $\dfrac{dz}{dt} = 2z \rightsquigarrow \dfrac{dz}{z} = 2dt \rightsquigarrow \ln z = 2t + c_3 \rightsquigarrow z = k_3 e^{2t}$

  Como $z(0) = h(s)$, es decir $k_3 e^{2\cdot 0} = s^2 \rightsquigarrow k_3 = s^2$, así $z = s^2 e^{2t}$.

- Si, $\dfrac{dx}{dt} = 2p \rightsquigarrow \dfrac{dx}{dt} = 2(2se^t) \rightsquigarrow dx = 4se^t dt \rightsquigarrow x = 4se^t + k_4$

  Como $x(0) = f(s)$, es decir $4se^0 + k_4 = s \rightsquigarrow k_4 = -3s$, así

  $$x = 4se^t - 3s = 4s(e^t - 1) + s = X(s,t) \quad \cdots (i).$$



- Si, $\dfrac{dy}{dt} = -6q \rightsquigarrow \dfrac{dy}{dt} = -6(\pm se^t) \rightsquigarrow dy = \mp 6se^t dt \rightsquigarrow y = \mp 6se^t + k_5$

  Como $y(0) = g(s)$, es decir $\mp 6se^0 + k_5 = 0 \rightsquigarrow k_5 = \pm 6s$, así

  $y = \mp 6se^t \pm 6s = \mp 6s(e^t - 1) = Y(s,t) \quad \cdots (ii)$.

3. Resolvamos $x = X(t,s),\ y = Y(t,s)$ para s y t en términos de x y y, sustituir $s = S(t,x)$ y $t = T(t,x)$ en $z = Z(t,s)$ para finalmente obtener la solución $z = u(x,y)$. Esto es,

(a) de $(ii):\ s(e^t - 1) = -\dfrac{y}{6}$, esto en $(i):\ x = 4\Big(-\dfrac{y}{6}\Big) + s$

$$s = x + \frac{2}{3}y \rightsquigarrow s = \frac{3x+2y}{3} = S_1(x,y)$$

$$\frac{3x+2y}{3}(e^t - 1) = -\frac{y}{6} \rightsquigarrow e^t - 1 = -\frac{y}{2(3x+2y)} \rightsquigarrow e^t = \frac{3(2x+y)}{2(3x+2y)},$$

$$z = u(x,y) = \left(\frac{3x+2y}{3}\right)^2 \frac{9(2x+y)^2}{4(3x+2y)^2} = \frac{1}{4}(2x+y)^2$$



(b) de $(ii):\ s(e^t-1)=\dfrac{y}{6}$, esto en $(i):\ x=4\left(\dfrac{y}{6}\right)+s$

$$s=x-\frac{2}{3}y \rightsquigarrow s=\frac{3x-2y}{3}=S_2(x,y)$$

$$\frac{3x-2y}{3}(e^t-1)=\frac{y}{6} \rightsquigarrow e^t-1=\frac{y}{2(3x-2y)} \rightsquigarrow e^t=\frac{3(2x-y)}{2(3x-2y)},$$

$$z=u(x,y)=\left(\frac{3x-2y}{3}\right)^2\frac{9(2x-y)^2}{4(3x-2y)^2}=\frac{1}{4}(2x-y)^2$$

Finalmente,

$$\boxed{u(x,y)=\frac{1}{4}(2x-y)^2}$$

