SÍLABO - CURSO DE VARIEDADES DIFERENCIALES

FRANCISCO VILLACIS

Descripción:

Las variedades diferenciales son uno de los espacios centrales en el estudio de geometría diferencial y la física. Desde tiempos antiguos, los matemáticos han estudiado geometrías no-euclideanas (como la geometría esférica y la proyectiva), pero no fue hasta el tiempo de Gauss que se dió una formalización del análisis geométrico en espacios no-euclideanos (es decir, de variedes) cuando este formuló y demostró su teorema egregium. Informalmente, una variedad es un espacio que localmente (i.e. si haces "zoom" a un punto) se ve como un espacio euclideano. Por ejemplo, desde el espacio la tierra se ve como una esfera, pero visto desde nuestro punto de vista local, esta se ve plana (i.e. $\mathbb{R}^2$). La gran mayoría hemos sido expuestos a diferentes teoremas sobre variedades desde la escuela. Por ejemplo, sabemos que para todo poliedro convexo (la generelazación de un polígono en $\mathbb{R}^3$) con V vértices, A aristas y C caras, tenemos que

$$V - A + C = 2.$$

Nótese que este resultado es puramente intrínseco, no se hace ninguna referencia a un espacio ambiente donde el poliedro pueda encontrarse. Nótese que todo poliedro convexo puede ser deformado continuamente a una esfera, por lo que podemos considerar al borde del poliedro como una figura equivalente a una esfera S^2. En este caso, el borde del poliedro sería una triangulación de la esfera y la combinación $V - A + C$ se convertiría en la caracteristica de Euler de la triangulación de S^2, denotada $\chi(S^2; \tau)$, donde τ denota la triangulación de S^2. Ya que todo polihedro nos da la misma caracteristica de Euler, este valor es independiente de la triangulación, es decir, este valor es una propiedad intrínseca de la esfera S^2. En este caso, podemos escribir que

$$\chi(S^2; \tau) = \chi(S^2) = 2.$$

El teorema de Gauss-Bonnet nos da que

$$\int_{S^2} e(TS^2) = \chi(S^2) = 2,$$

donde $e(TS^2)$ es la clase de Euler del haz tangente de S^2. Todas las nociones relacionadas a este teorema serán dadas en este curso.

Más generalmente, la meta es formalizar esta noción de un espacio que localmente se ve como $\mathbb{R}^n$ pero globalmente puede tener una geometría muy diferente de forma intrínseca. También haremos construcciones en estos espacios las cuales nos permitirán hacer cálculo en ellos (como diferenciar e integrar). Se darán ciertas aplicaciones a la física según se vea necesario. Cada semana se subirá una hoja de problemas recomendados. Recomiendo resolverlos para tener un entendimiento más profundo y

Date: July 10, 2021.

sacarle mayor provecho al curso. No proveeré soluciones a los problemas pero cada quién está invitado a contactarme si desean pistas o solucionar un problema juntos.

Requisitos:

Asumo que estan familiarizados con teoría de conjuntos básica (unión, intersección, funciones, etc), demostraciones y que están familiarizados con cálculo de una y varias variables desde un pusto de vista (semi)-formal (conocer la definición de la derivada y de la integral en término de límites, etc). También asumo que tienen bases en ecuaciones diferenciales ordinarias (cómo resolver estas, y los teoremas de existencia y unicidad). Tener conocimiento de ánalisis en espacios métricos o topología general es recomendado pero no necesario (daré un repaso de topología al inicio, pero habrán momentos que sólo deberán aceptar ciertos resultados como ciertos si es que no tienen las bases).

Temas:

(1) Repaso de topología:
   - Conjuntos abiertos y cerrados,
   - Funciones continuas entre espacios topológicos,
   - Bases de un espacio topológico y axiomas de enumerabilidad,
   - Axiomas de separación,
   - Conectividad y compacidad,
   - Espacios cocientes,
   - Espacios localmente compactos,
   - Grupos fundamentales y espacios recubridores;

(2) Repaso de teoremas importante de cálculo vectorial y ecuaciones diferenciales:
   - Teorema de la función inversa;
   - Teorema de la función implícita;
   - Cambio de variables (integración);
   - Teorema de existencia y unicidad de soluciones de ecuaciones diferenciales ordinarias;

(3) Variedades diferenciales con y sin bordes;
(4) Funciones diferenciables entre variedades;
(5) Subvariedades;
(6) Espacios tangentes;
(7) Haces vectoriales;
(8) Secciones de haces vectoriales (campos vectoriales, campos tensoriales, etc);
(9) Curvas integrales y flujos de campos vectoriales;
(10) Formas diferenciales en variedades;
(11) Orientabilidad;
(12) Integración en variedades y el teorema de Stokes;
(13) Distribuciones y foliaciones;
(14) (Co)homología de variedades.

Referencias:

La referencia principal para el curso será el libro de John Lee, Introduction to Smooth Manifolds. Este libro es bastante explicíto al demostrar resultados, en el sentido que explica paso a paso los detalles y no suele omitir resultados. Desgraciadamente, esto vuelve al libro bastante largo y técnico, pero es una excelente referencia para estudiar de forma autodidacta y para usar de referencia luego. El repaso de topología será basado en el primer apéndice de ese libro.

Otro libro que usaré bastante es el primer volumen de la magnifica serie de libros en geometría diferencial de Spivak: A Comprehensive Course in Differential Geometry (Volume 1). Este libro da una excelente intuición geométrica de lo que son las variedades y su geometría. El único lado malo de este libro es que esconde bastante la topología que hay detrás de las construcciones. No obstante, sigue siendo una excelente referencia y recomiendo completamente leer este libro.

Hay bastantes otros libros más sobre variedades diferenciales los cuales estarán incluidos en el archivo de Google Drive del curso (véase el final de este documento para el link), y recomiendo fuertemente leer diferentes libros sobre este tema. El concepto de variedades y las diferentes construcciones que veremos son muy abstractas y no hay una única forma correcta de pensar en ellas, por lo que leer el punto de vista de diferentes autores les ayudará a tener una intuición más fuerte y poder entenderlas de la forma más apropiada para cada uno.

Horario:

Cada lunes a las 17h00-19h00 (GMT-5). Primera clase es el 19 de Julio y se extenderá indeterminadamente durante el verano.

Enlace de Meet: https://meet.google.com/cju-mcay-qgb.

Carpeta de Drive con los apuntes y hojas de ejercicio:
https://drive.google.com/drive/folders/1JdA3i55THRP7_iePS3CRA9KPsIExnw94?usp=sharing.