Universidad Nacional de San Cristóbal de Huamanga
Departamento de Matemática y Física
Electromagnetismo
Capítulo II
Electrostática

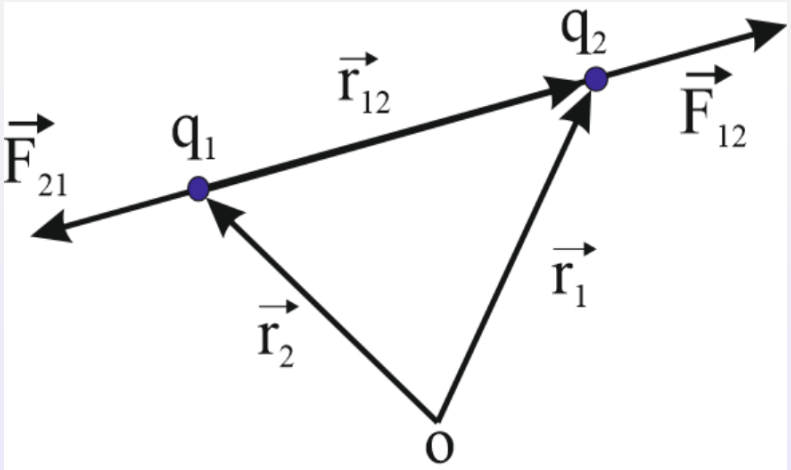
Wilmer Moncada Sosa
wilmer.moncada@unsch.edu.pe

Carga eléctrica

1. Por la acción de frotamiento, un peine de ebonita con un pedazo de lana adquieren la propiedad de cargarse.
2. La carga es una propiedad fundamental y característica de las partículas elementales que forman la materia, existen dos clases: positiva y negativa.
3. La carga no puede crearse ni destruirse.
4. En un sistema cerrado la carga neta se conserva.

Ley de Coulomb

1. Dos cargas puntuales ejercen entre sí fuerzas que actúan a lo largo de la línea que los une y que son inversamente proporcionales al cuadrado de la distancia que los separa.
2. Estas fuerzas son también proporcionales al producto de las cargas, son repulsivas para cargas iguales y atractivas para cargas contarias.



Donde: $\vec{r}_{12} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2 = -\vec{r}_{21}$

1. Ley de Coulomb.

$$\vec{F}_{12} = K_e \frac{q_1 q_2}{r_{12}^2}\hat{r}_{12} = K_e \frac{q_1 q_2}{r_{12}^2}\frac{\vec{r}_{12}}{r_{12}} = K_e \frac{q_1 q_2}{r_{12}^3}\vec{r}_{12} = K_e \frac{q_1 q_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^3}(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) = -\vec{F}_{21}$$

Donde: $K_e = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cong 9 * 10^9 \frac{Nm^2}{C^2}$; $[q]$: Coulomb; $[\vec{r}]$: metros; $[\vec{F}]$: Newton

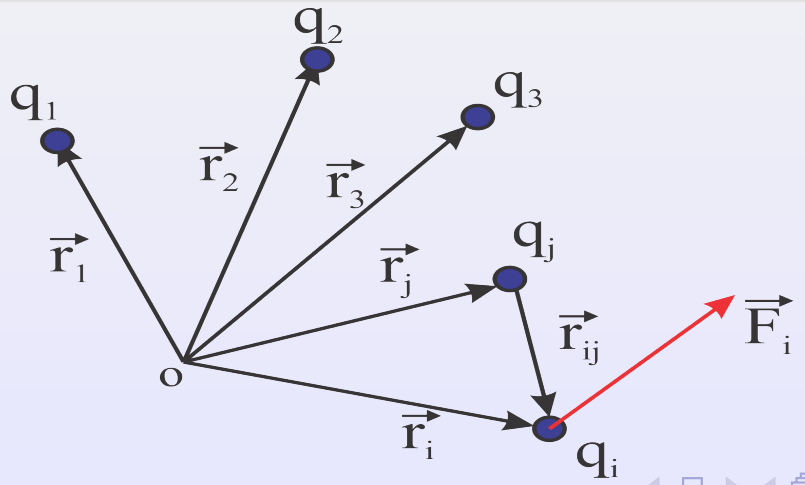
Siendo la permitividad del espacio libre: $\epsilon_0 = 8{,}854 * 10^{-12}\frac{C^2}{Nm^2} \approx \frac{10^{-9}}{36\pi}\frac{F}{m}$

Además: $K_e = 1$ en el sistema C.G.S

Si se tiene más de dos cargas puntuales, por ejemplo un sistema de N cargas, la fuerza sobre la i-ésima carga es:

$$\vec{F}_i = q_i \sum_{j\neq i}^{N} \frac{q_j}{4\pi\epsilon_0}\frac{\vec{r}_{ij}}{r_{ij}^3} = q_i \sum_{j\neq i}^{N} \frac{q_j}{4\pi\epsilon_0}\frac{(\vec{r}_i - \vec{r}_j)}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|^3} = \sum_j \vec{F}_j$$

Donde: $\vec{r}_{ij} = \vec{r}_i - \vec{r}_j$; además queda establecido el principio de superposición de fuerzas.

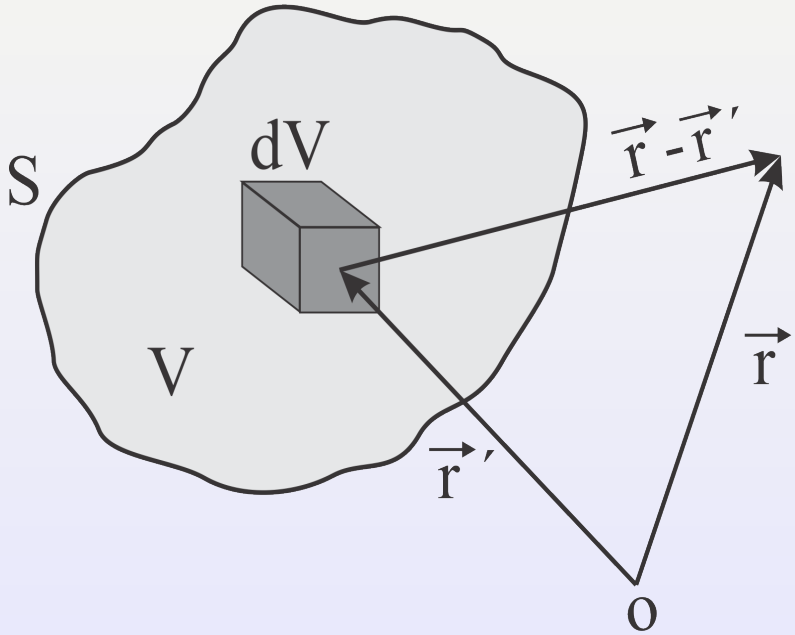


Para una distribución contínua de carga es necesario definir:

Densidad lineal de carga: $\lambda = \lim\limits_{\triangle l \to 0} \dfrac{\triangle q}{\triangle l} = \dfrac{dq}{dl}$

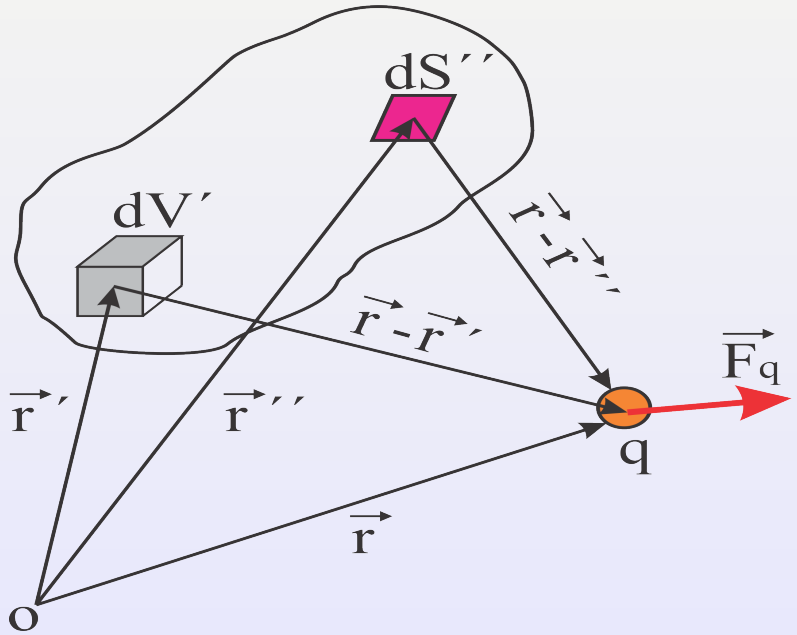
Densidad superficial de carga: $\sigma = \lim\limits_{\triangle S \to 0} \dfrac{\triangle q}{\triangle S} = \dfrac{dq}{dS}$

Densidad Volumétrica de carga: $\rho = \lim\limits_{\triangle V \to 0} \dfrac{\triangle q}{\triangle V} = \dfrac{dq}{dV}$



Si la carga se distribuye en un volumen V con densidad ρ y sobre una superficie S que limita a V con una densidad σ, entonces la fuerza ejercida por esta distribución de carga sobre una carga puntual q, situada en la posición $\vec{r}$, es:

$$\vec{F}_q = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\int_V \frac{\vec{r}-\vec{r'}}{\left|\vec{r}-\vec{r'}\right|^3}\rho(\vec{r'})\,dV' + \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\int_S \frac{\vec{r}-\vec{r''}}{\left|\vec{r}-\vec{r''}\right|^3}\sigma(\vec{r''})\,dS''$$



Si $\vec{F}$ es la fuerza ejercida por una carga q_1 sobre una carga de prueba q (de dimensiones muy pequeñas), la intensidad del campo producido por la carga q_1 en la posición $\vec{r}$ de la carga q, esta definido por:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{\vec{F}}{q}$$

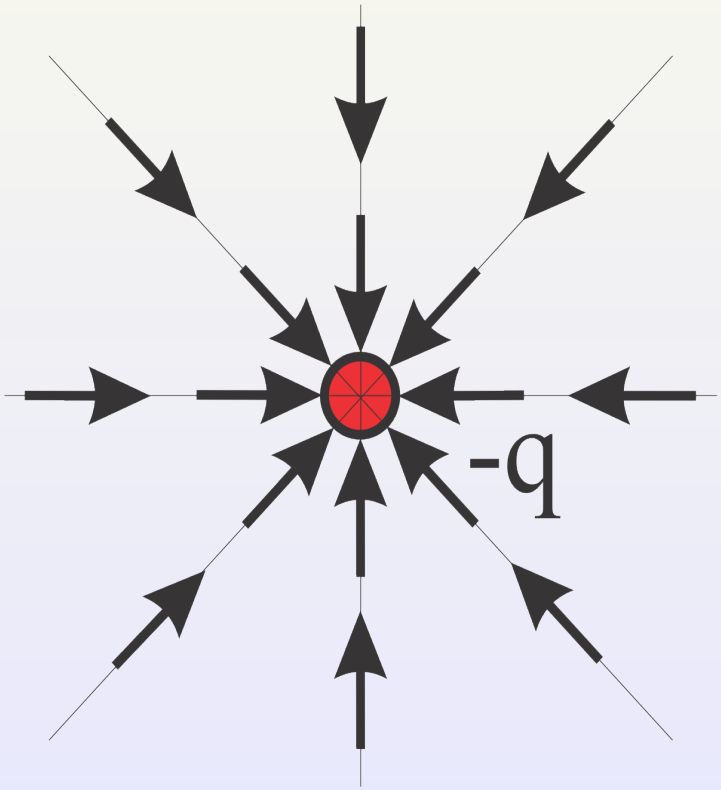
El general, el campo eléctrico es alterado por la carga de prueba q, entonces tenemos que tomar el límite de una carga infinitamente pequeña, tal que:

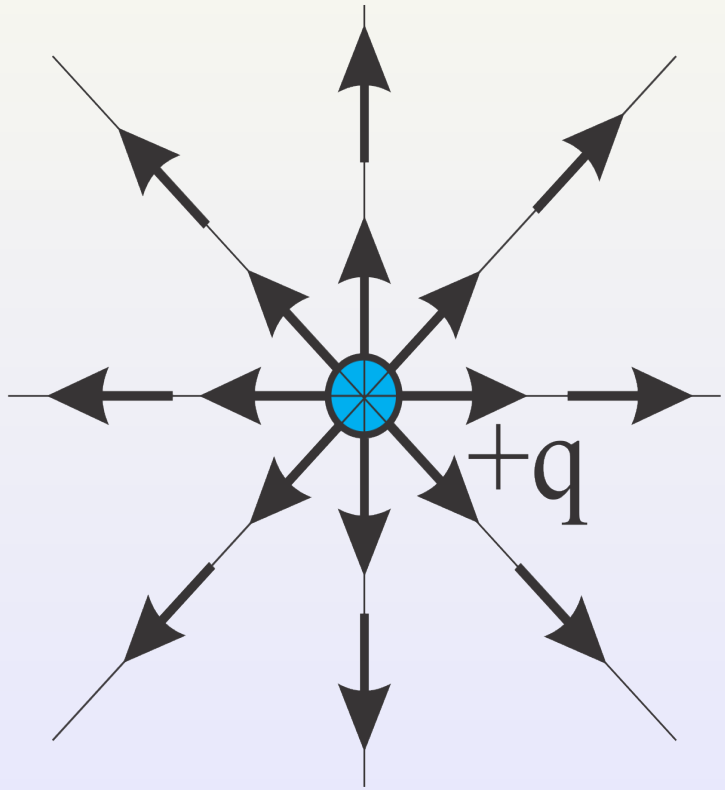
$$\vec{E} = \lim_{\triangle q \to 0} \frac{\triangle \vec{F}}{\triangle q} = \frac{d\vec{F}}{dq}$$

Usando la ley de Coulomb, el campo eléctrico de una carga puntual q_1 es:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0} \frac{(\vec{r}-\vec{r}_1)}{|\vec{r}-\vec{r}_1|^3}$$

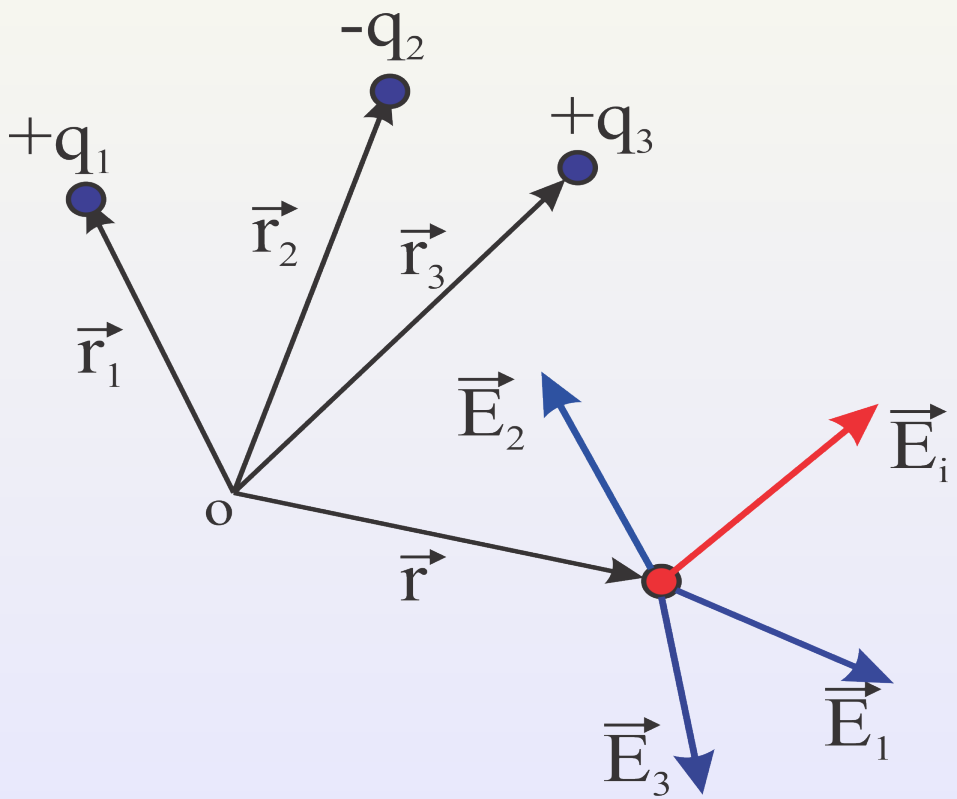
Este campo eléctrico puede ser visualizado por líneas de fuerza de tal manera que $\vec{E}(\vec{r})$ en un punto dado sigue la tangente a la línea de fuerza.
Para una carga positiva esta dirigida radialmente hacia afuera y para una carga negativa radialmente hacia dentro.





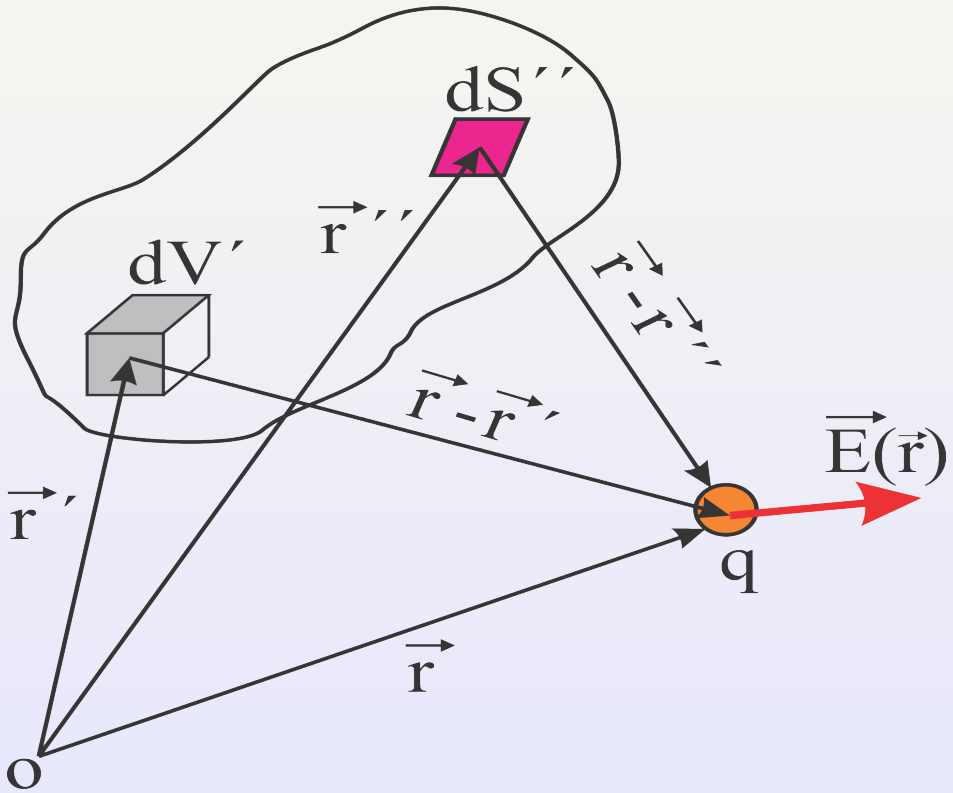
De acuerdo con el principio de superposición para un sistema de cargas puntuales, se tiene:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\sum_i \frac{q_i(\vec{r}-\vec{r}_i)}{|\vec{r}-\vec{r}_i|^3} = \sum_i \vec{E}_i$$

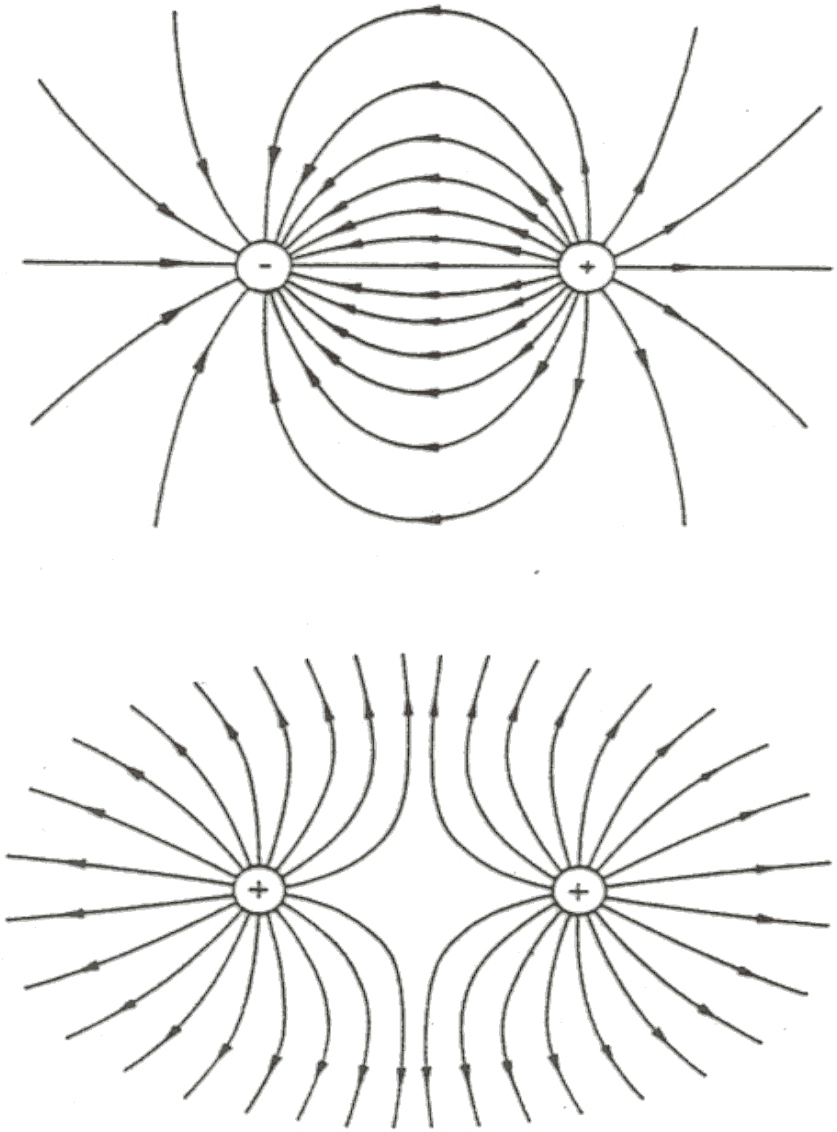


Para una distribución continua de carga, en lugar de la carga q_i se debe colocar el elemento de carga $\rho(\vec{r}')dV'$ para una distribución volumétrica o $\sigma(\vec{r}'')dS''$ para una distribución superficial, luego:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\iiint_V \frac{(\vec{r}-\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}\rho(\vec{r}')dV' + \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\iint_S \frac{(\vec{r}-\vec{r}'')}{|\vec{r}-\vec{r}''|^3}\sigma(\vec{r}'')dS''$$



Trazado de un campo eléctrico con ayuda de líneas de fuerza.



Potencial eléctrico

Si $\nabla \times \vec{A} = 0$, entonces $\vec{A} = \nabla\phi$, donde ϕ es una función de (x, y, z), por lo que es conveniente desarrollar la ecuación:

$$\nabla \times \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} = \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \nabla \times (\vec{r} - \vec{r}') + \left[\nabla \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \right] \times (\vec{r} - \vec{r}') \tag{1}$$

Usando la relación:

$$\nabla \times (\varphi \vec{F}) = \varphi \nabla \times \vec{F} + \nabla\varphi \times \vec{F} \tag{2}$$

Como:

$$\nabla \times (\vec{r} - \vec{r}') = 0 \tag{3}$$

y

$$\nabla \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} = -3 \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^5} \Longrightarrow -3 \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^5} \times (\vec{r} - \vec{r}') = 0 \tag{4}$$

Reemplazando las ecuaciones (3) y (4) en (1) se obtiene:

$$\nabla \times \frac{\vec{r}-\vec{r}'}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3} = 0 \tag{5}$$

Luego, en la expresión general del campo eléctrico:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left(\sum_{i=1}^{N} \frac{q_i(\vec{r}-\vec{r}_i)}{|\vec{r}-\vec{r}_1|^3} + \int_V \frac{(\vec{r}-\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}\rho(\vec{r}')dV' + \int_S \left(\frac{(\vec{r}-\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}\sigma(\vec{r}')da'\right)\right. \tag{6}$$

Todos los términos tienen la expresión: $\frac{(\vec{r}-\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}$

Luego: $\nabla \times \vec{E}(\vec{r}) = 0$

Entonces:

$$\vec{E}(\vec{r}) = -\nabla\phi(\vec{r}) \tag{7}$$

En la ecuación (7) se hace una integración de línea desde un punto de referencia en la que $\phi(ref) = 0$ hasta un punto $\vec{r}$ donde se quiere determinar el potencial eléctrico:

$$\int_{ref}^{\vec{r}} \vec{E}(\vec{r}') \cdot d\vec{r}' = -\int_{ref}^{\vec{r}} \nabla\phi \cdot d\vec{r}' \tag{8}$$

Por la definición de gradiente:

$$\nabla\phi \cdot d\vec{r}' = d\phi \tag{9}$$

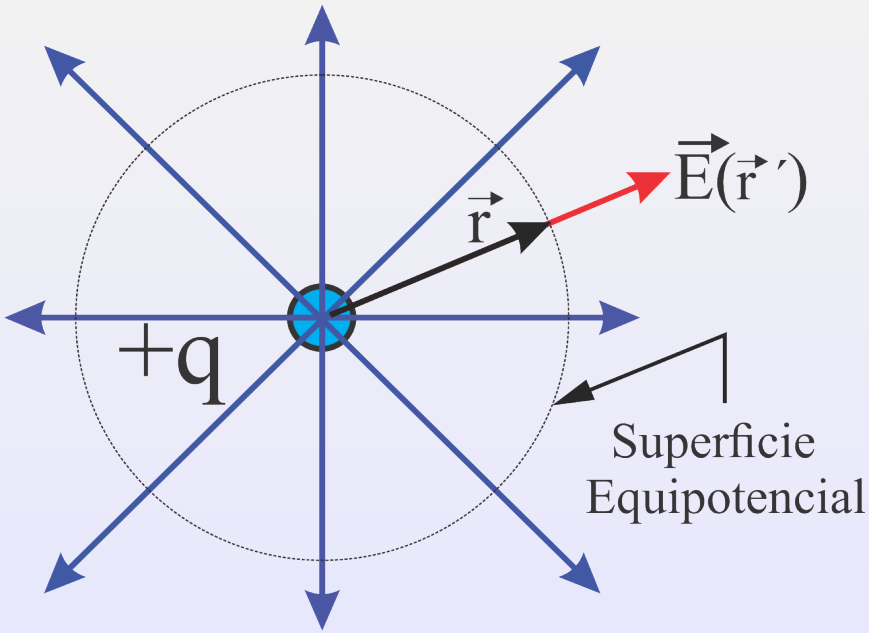
Reemplazando la ecuación (9) en (8) hace que el segundo miembro de la ecuación (8) se convierta en una diferencial perfecta.

$$-\int_{ref}^{\vec{r}} \nabla\phi \cdot d\vec{r}' = -\varphi(\vec{r}) = \int_{ref}^{\vec{r}} \vec{E}(\vec{r}') \cdot d\vec{r}' \tag{10}$$

La ecuación (10) es la inversa de la ecuación (8). Para el caso de una carga puntual se tiene que la ecuación (8) queda como:

$$\varphi(\vec{r}) = -\int_{ref}^{\vec{r}} \vec{E}(\vec{r}') \cdot d\vec{r}' = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0}\int_{ref}^{\vec{r}} \frac{\hat{r}' \cdot d\vec{r}'}{r^2} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} \tag{11}$$

Para cualquier punto a la distancia r del origen de coordenadas el potencial eléctrico tiene el mismo valor, definiendo así una superficie equipotencial $\phi(\vec{r}) = cte$.



Generalizando el potencial eléctrico que corresponde a la ecuación (7), se tiene:

$$\varphi(\vec{r}) = \int_r \vec{E}(\vec{r}) \cdot d\vec{r}$$

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^{N} \frac{q_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV' + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_S \frac{\sigma(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} da' \quad (12)$$

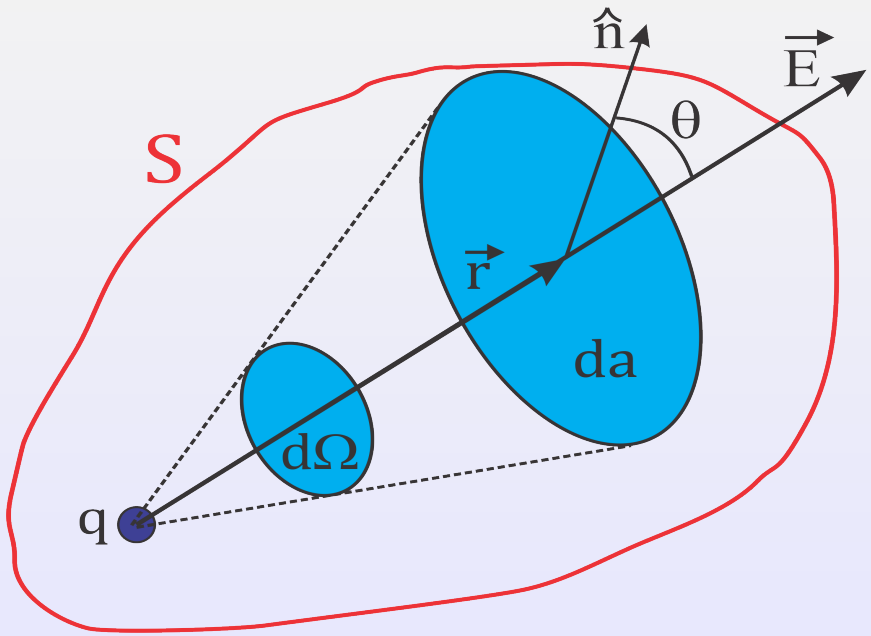
Conductores y aislantes

Los materiales pueden dividirse en dos categorías: conductores de electricidad y aislantes (dieléctricos).
Los conductores son materiales que contienen un gran número de portadores de cargas libres, como los metales que dan lugar a la corriente eléctrica cuando se mantiene un campo eléctrico estable en el conductor mediante una fuente externa de energía.
Los dieléctricos son sustancias en los que todas las partículas cargadas están ligadas muy fuertemente a las moléculas, en presencia de un $\vec{E}$ sus posiciones cambian ligeramente pero no se alejan de la vecindad de sus moléculas.
Otros materiales como los semiconductores y electrolitos tienen propiedades eléctricas intermedias entre los conductores y los dieléctricos y bajo la acción del $\vec{E}$ estático su comportamiento es como los conductores pero su respuesta transitoria es lenta y necesitan más tiempo para alcanzar el equilibrio en un $\vec{E}$ estático.

Ley de Gauss

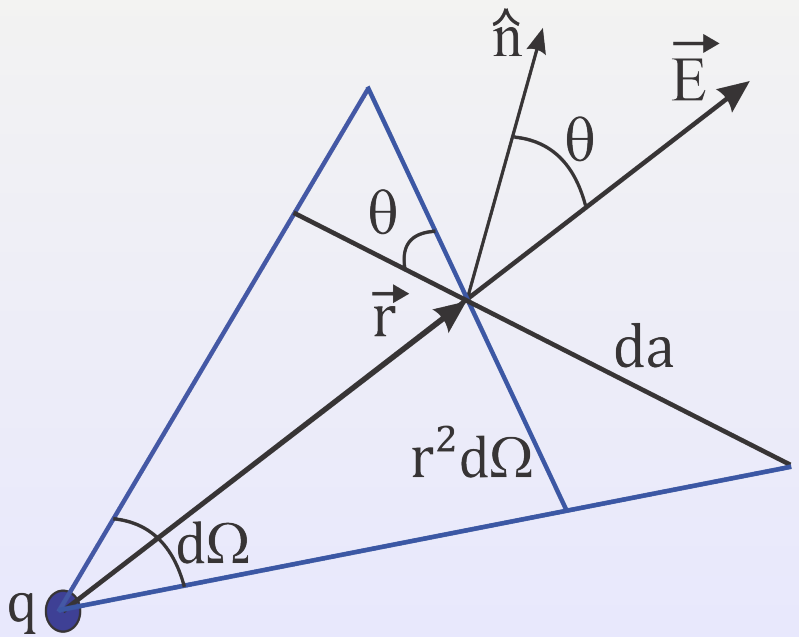
Para determinar el flujo de intensidad de $\vec{E}$ producido por una carga puntual a través de una superficie S que encierra esta carga.
Si la carga puntual q está en el origen de coordenadas entonces el flujo a través de un elemento de superficie da esta dado por:

$$\vec{E} \cdot \hat{n} da = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \frac{\vec{r}}{r} \cdot \hat{n} da \tag{13}$$



La figura muestra la proyección del elemento de área da, donde la cantidad $\frac{\vec{r}}{r} \cdot \hat{n}da$ es la proyección de da en un plano perpendicular a $\vec{r}$. Esta área proyectada, dividida por r^2, es el ángulo sólido subtendido por da, que se denota por $d\Omega$, por lo que se define al ángulo sólido $d\Omega$ como la proyección central del área da sobre la esfera de radio unidad, es decir:

$$d\Omega = \frac{cos\theta}{r^2} da \tag{14}$$



Luego:

$$\vec{E} \cdot \hat{n} da = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} cos\theta da = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} r^2 d\Omega = q(\frac{d\Omega}{4\pi\epsilon_0})$$

La ley de Gauss corresponde al flujo que atraviesa la superficie S:

$$\oint_S \vec{E} \cdot \hat{n}\, da = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \oint_S d\Omega = (\frac{q}{4\pi\epsilon_0})(4\pi) = \frac{q}{\epsilon_0}$$

donde: $\oint_S d\Omega = 4\pi$.

Dependiendo de la ubicación de la carga q, se tiene:

$$\oint_S \vec{E} \cdot \hat{n}\, da = \begin{cases} \frac{q}{\epsilon_0} & \text{si } q \text{ esta en el interior de S} \\ 0 & \text{si } q \text{ esta en el exterior de S} \end{cases} \tag{15}$$

Si la superficie S encierra varias cargas, entonces de acuerdo con el principio de la superposición, se tiene:

$$\oint_S \vec{E}\cdot\hat{n}\,da = \oint_S \sum_i \vec{E}_i\cdot\hat{n}\,da = \sum_i \oint_S \vec{E}_i\cdot\hat{n}\,da = \frac{1}{\epsilon_0}\sum_i q_i = \frac{q_T}{\epsilon_0} \qquad (16)$$

y para una distribución continua de carga se tiene:

$$\oint_S \vec{E}\cdot\hat{n}\,da = \frac{1}{\epsilon_0}\int_V \rho(\vec{r})\,dV$$

Usando el teorema de Gauss o de la divergencia:

$$\oint_S \vec{E}\cdot\hat{n}\,da = \int_V \nabla\cdot\vec{E}\,dV = \frac{1}{\epsilon_0}\int_V \rho(\vec{r})\,dV$$

Es decir: $\int_V (\nabla\cdot\vec{E} - \frac{\rho(\vec{r})}{\epsilon_0})\,dV = 0$

La forma diferencial de la ley de Gauss queda de la siguiente manera:

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{1}{\epsilon_0}\rho(\vec{r}) \tag{17}$$

Expresión que relaciona el $\vec{E}$ con la distribución de carga que la produce. Así en el espacio las cargas son las fuentes (cargas +) y sumideros (cargas -) del $\vec{E}$.

Como: $\vec{E} = -\nabla\phi(\vec{r}) \Longrightarrow \nabla \cdot \vec{E}(\vec{r}) = -\nabla \cdot \nabla\phi(\vec{r}) = \frac{\rho(\vec{r})}{\epsilon_0}$

Siendo el Laplaciano de $\phi(\vec{r})$: $\nabla \cdot \nabla\phi(\vec{r}) = \nabla^2\phi(\vec{r})$

Luego, la ecuación de poisson queda:

$$\nabla^2\phi(\vec{r}) = -\frac{\rho(\vec{r})}{\epsilon_0} \tag{18}$$

Para una región libre de cargas haciendo $(\rho = 0)$, se obtiene la ecuación de Laplace:

$$\nabla^2\phi(\vec{r}) = 0 \tag{19}$$

Se demostrará que el potencial de la forma de la ecuación (20) (con $q = 1$) satisface la ecuación de Poisson para una carga puntual:

$$\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 \left|\vec{r} - \vec{r}'\right|} \tag{20}$$

Por comodidad se coloca la carga en el origen de coordenadas $(\vec{r}' = 0)$ y se aplica el operador Laplaciano a la función escalar $\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r}$, entonces se tiene:

$$\nabla^2\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\nabla^2(\frac{1}{r}) \tag{21}$$

Para una carga puntual el problema es esféricamente simétrico y solo se ha considerado la coordenada r y para $r \neq 0$, se tiene:

El Laplaciano en coordenadas esféricas:

$$\nabla^2\phi(\vec{r}) = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2\frac{\partial\phi}{\partial r}) + \frac{1}{r^2 sen\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(sen\theta\frac{\partial\phi}{\partial\theta}) + \frac{1}{r^2 sen^2\theta}\frac{\partial^2\phi}{\partial\varphi^2} \tag{22}$$

El Laplaciano en coordenadas rectangulares:

$$\nabla^2\phi(\vec{r}) = \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2} \tag{23}$$

Para $r = 0$ la expresión del potencial no esta definida, por lo tanto se tiene que hacer un proceso límite, al integrar $\nabla^2\phi(\vec{r})$ en la vecindad de $r = 0$ y transformar la integral de volumen mediante el teorema de Gauss en una integral de superficie independiente de r.

$$\int_V \nabla^2(\frac{1}{r})\,dV = \int_V div(grad(\frac{1}{r}))\,dV = \oint_S grad(\frac{1}{r})\cdot\hat{n}\,da \tag{24}$$

Luego, la integral queda como sigue:

$$\int_V \nabla^2(\frac{1}{r})\,dV = \oint_S \frac{\partial}{\partial r}(\frac{1}{r})r^2\,d\Omega = \oint_S(-\frac{1}{r^2})r^2\,d\Omega = -4\pi \tag{25}$$

Resumiendo para $q = 1$, se tiene:

$$\begin{cases} \nabla^2(\frac{1}{r}) = 0 & \text{para } r \neq 0 \\ \int_V \nabla^2(\frac{1}{r})\,dV = -4\pi & \text{para } r = 0 \end{cases} \tag{26}$$

Con la ayuda de la función δ de Dirac, la ecuación (26) se escribe:

$$\nabla^2(\frac{1}{r}) = -4\pi\delta(\vec{r}) \tag{27}$$

Si la carga puntual no está colocada en el origen, entonces:

$$\nabla^2(\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|}) = -4\pi\delta(\vec{r}-\vec{r}') \tag{28}$$

Si el campo es producido por una distribución continua de carga $\rho(\vec{r})$, se tiene:

$$\nabla^2\phi(\vec{r}) = \int_V \frac{\rho(\vec{r}')}{4\pi\epsilon_0}\nabla^2\left(\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\right)dV' = \int_V \frac{\rho(\vec{r}')}{4\pi\epsilon_0}\left(-4\pi\delta(\vec{r}-\vec{r}')\right)dV'$$

$$\nabla^2\phi(\vec{r}) = \int_V \rho(\vec{r}')\left(\frac{-1}{\epsilon_0}\right)\delta(\vec{r}-\vec{r}')\,dV'$$

La ecuación de Poisson:

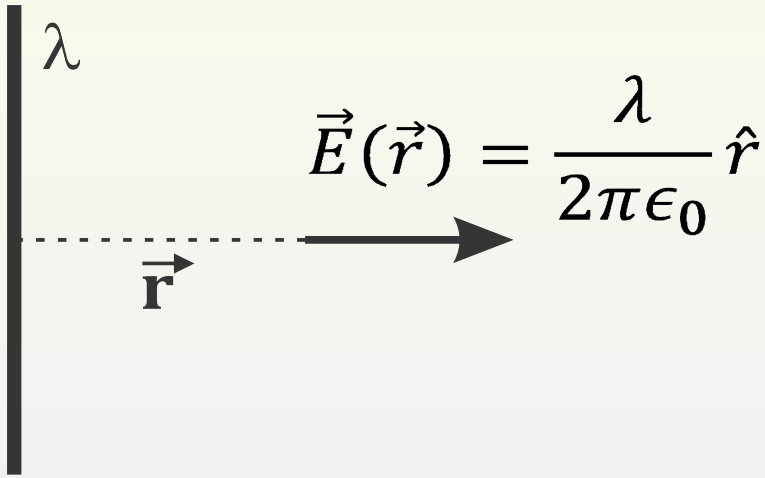
$$\nabla^2\phi(\vec{r}) = -\frac{1}{\epsilon_0}\rho(\vec{r}) \tag{29}$$

Donde se ha hecho uso de:

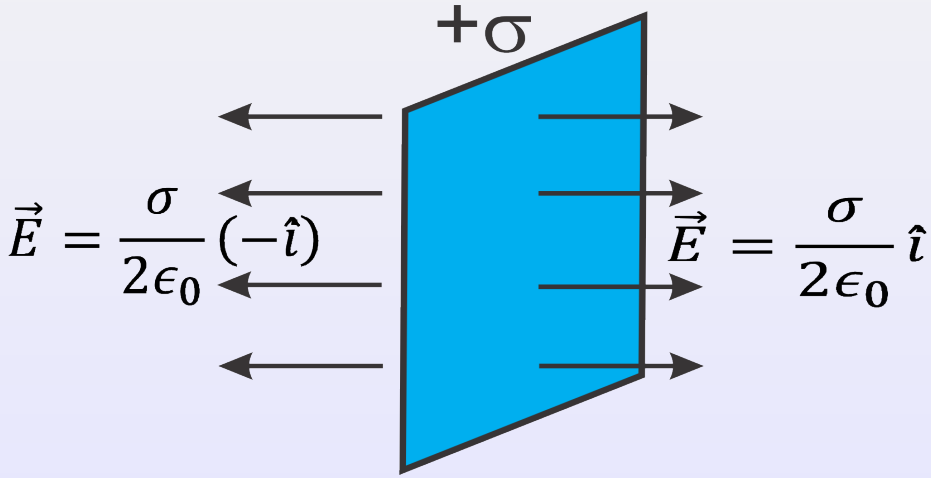
$$f(a) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\delta(x-a)\,dx$$

Aplicaciones de la Ley de Gauss

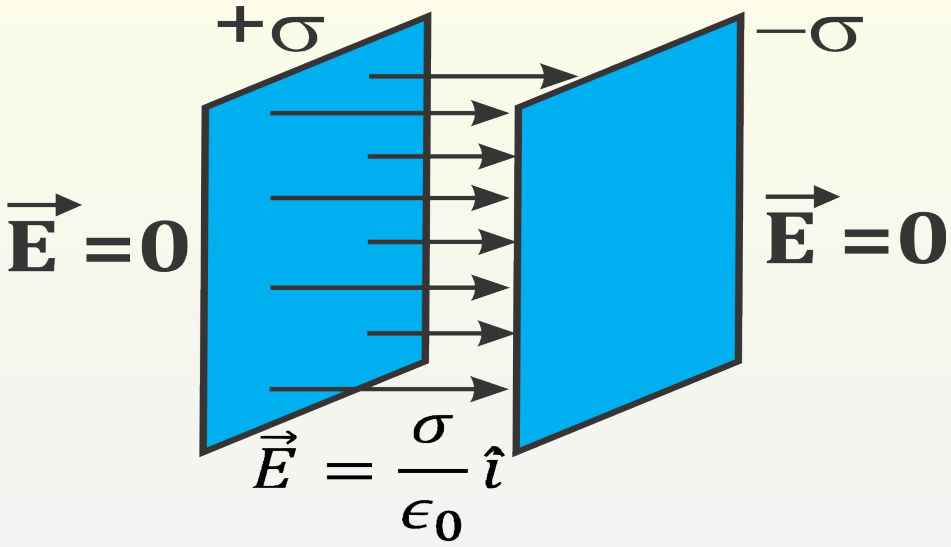
1. Hilo Conductor



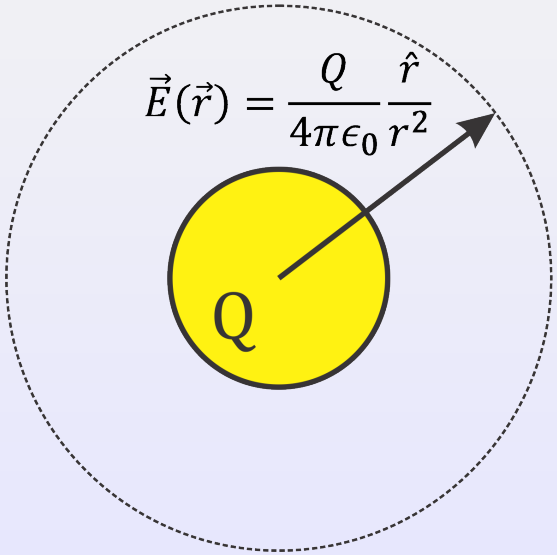
2. Placa Conductora

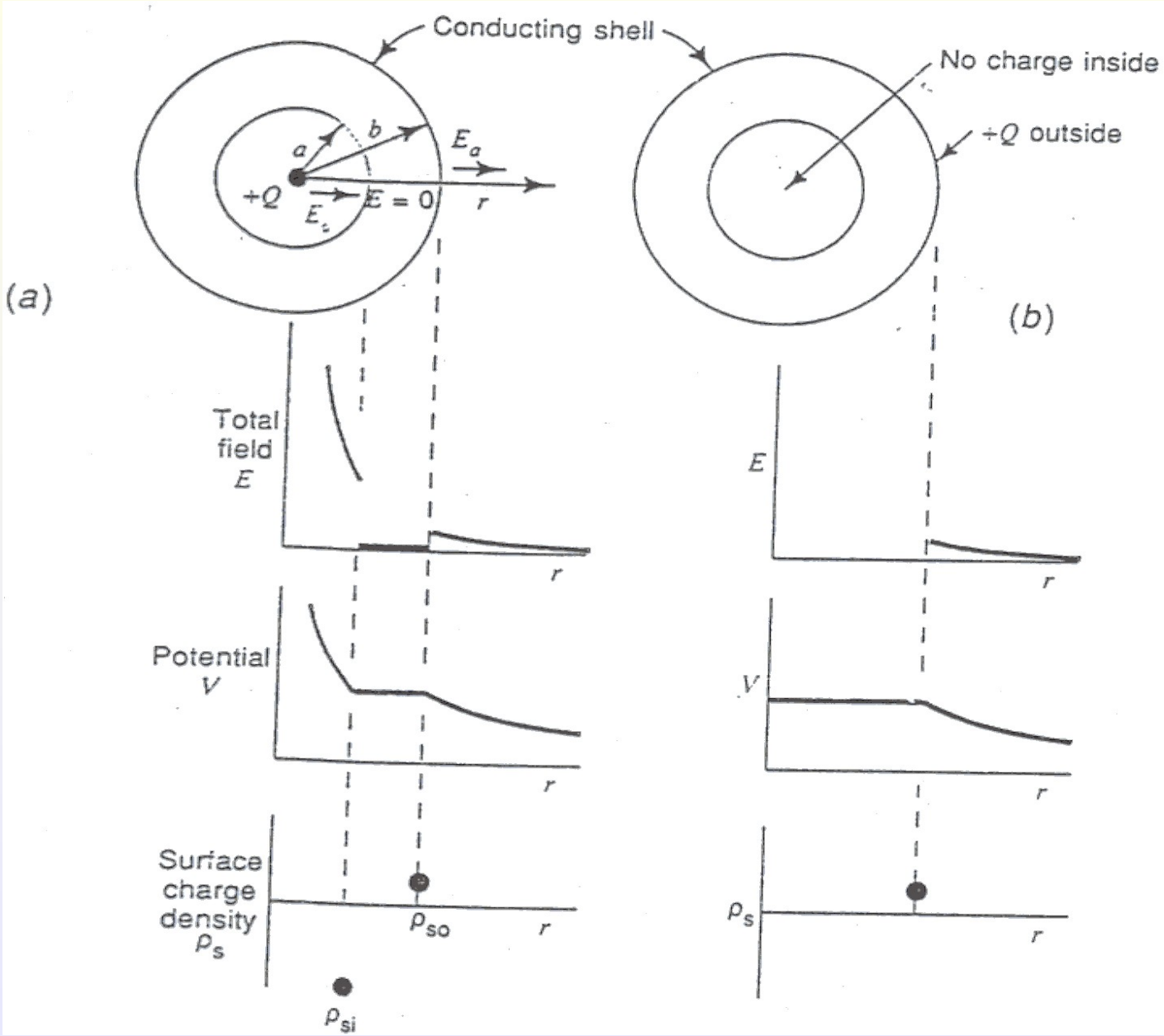


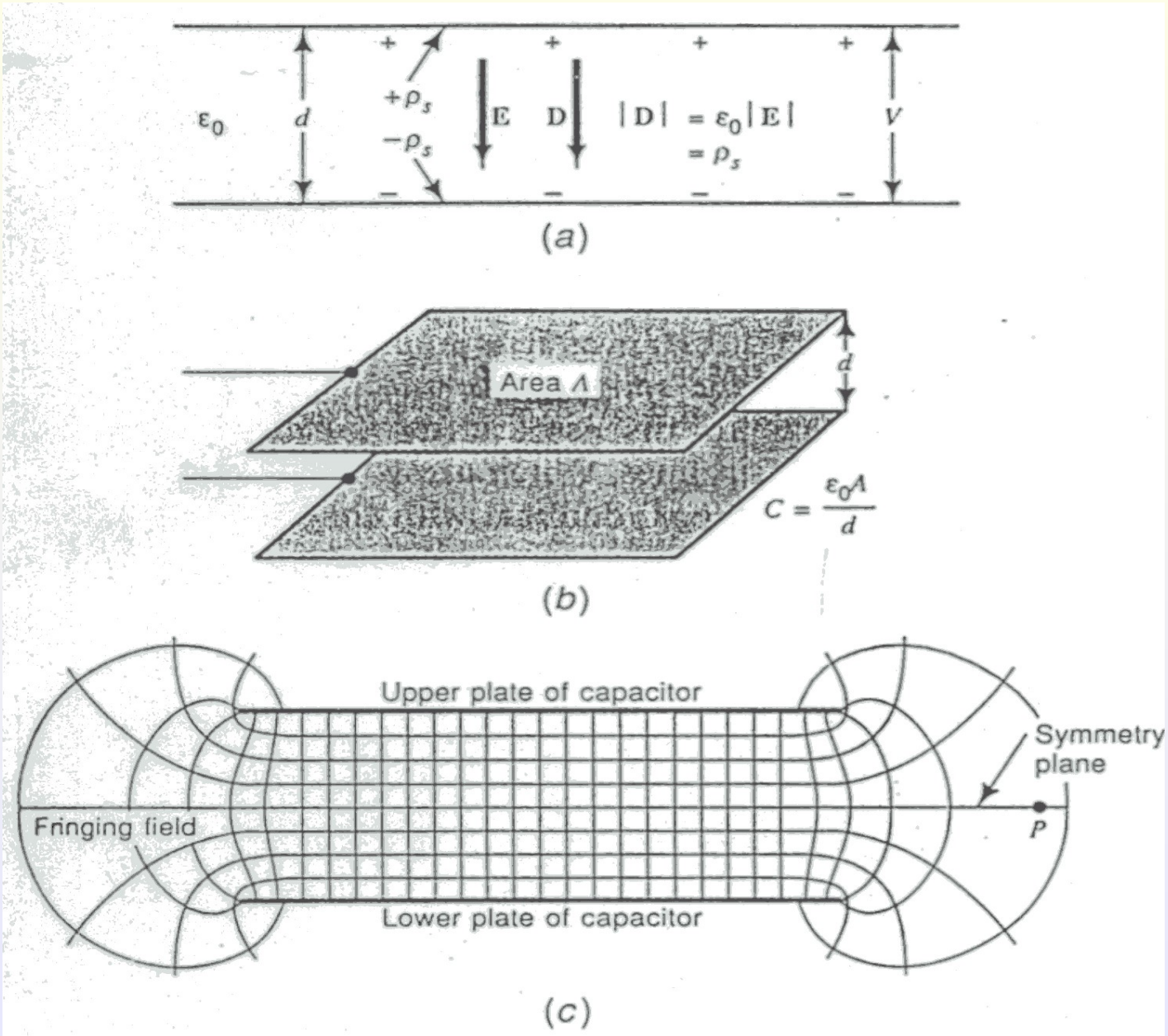
3. Dos Placas Paralelas

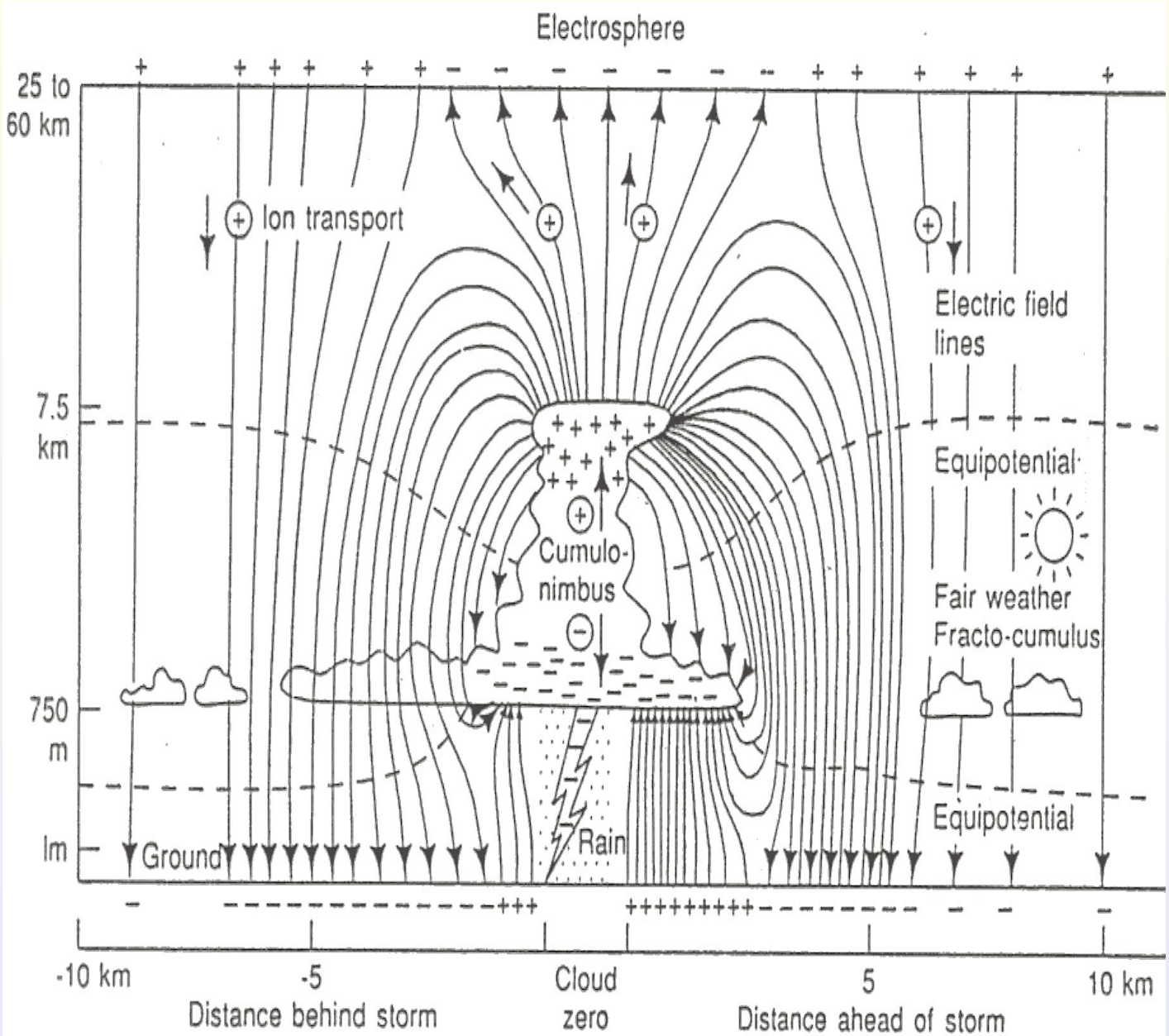


4. Esfera Conductora



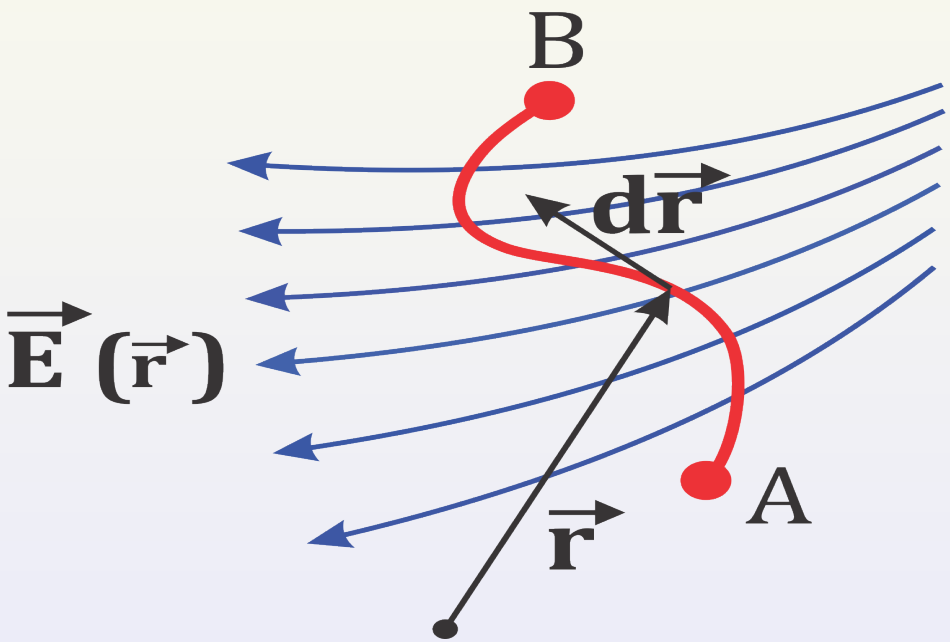

Conducting shell
No charge inside
+Q outside
a
b
E_a
+Q
E_c
E = 0
r
(a)
(b)
Total field E
E
Potential V
V
Surface charge density ρ_s
ρ_s
ρ_{so}
ρ_{si}


ε0
d
+ρs
−ρs
E
D
|D| = ε0|E|
= ρs
V
(a)
Area A
d
C = ε0A/d
(b)
Upper plate of capacitor
Symmetry plane
Fringing field
P
Lower plate of capacitor
(c)


Electrosphere
25 to 60 km
Ion transport
Electric field lines
7.5 km
Equipotential
Cumulo-nimbus
Fair weather
Fracto-cumulus
750 m
Equipotential
Rain
Im
Ground
-10 km
-5
Cloud zero
5
10 km
Distance behind storm
Distance ahead of storm

Energía Potencial de una carga en un $\vec{E}$

Cuando una carga q se mueve en un $\vec{E}$ desde un punto A hasta otro punto B, la fuerza dada por $\vec{F}(\vec{r}) = q\vec{E}(\vec{r})$ actúa sobre ella y da lugar a un trabajo W.



El trabajo W esta dado por:

$$W = -\int_A^B \vec{F}(\vec{r}') \cdot d\vec{r}' = -q\int_A^B \vec{E}(\vec{r}') \cdot d\vec{r}'$$

El signo $(-)$ refleja el hecho de que se realiza trabajo en contra del $\vec{E}$. como: $\vec{E}(\vec{r}') = -\nabla\phi(\vec{r}')$, entonces:

$$W = q\int_A^B \nabla\phi \cdot d\vec{r}' = q\int_A^B (\frac{\partial\phi}{\partial x}dx + \frac{\partial\phi}{\partial y}dy + \frac{\partial\phi}{\partial z}dz) = q\int_A^B d\phi$$

Luego, el trabajo realizado es:

$$W = q[\phi(B) - \phi(A)] = E_{pe}(B) - E_{pe}(A)$$

Esta ecuación establece que el trabajo realizado a lo largo del camino de A a B comprende exactamente a la diferencia entre la energía potencial entre ambos puntos, por lo tanto, el trabajo es independiente de la trayectoria.
(Note que $q\phi$ tiene unidades de energía, $1Joule = 1N.m$)

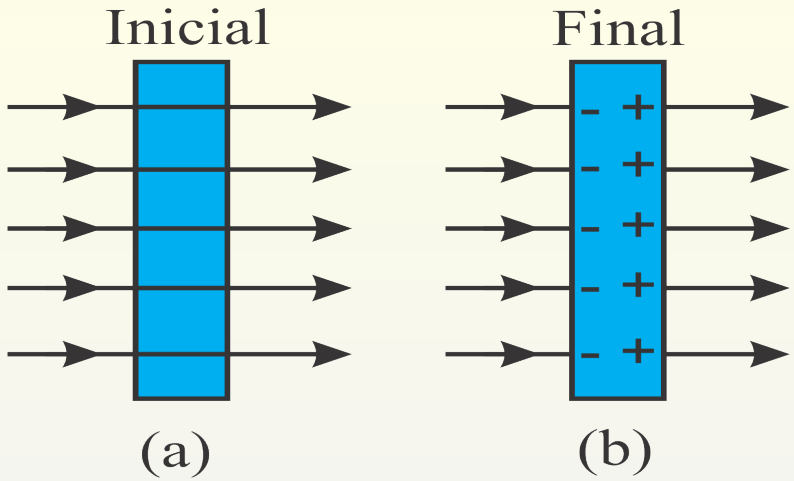
El $\vec{E}$ en presencia de un conductor

Si un cuerpo cargado, como una varilla de vidrio se acerca a un conductor, aparecerá en éste último una carga inducida. El $\vec{E}$ total resultante se debe a las dos cargas: el $\vec{E}$ original debido a la varilla más el $\vec{E}$ inducido en el conductor. Como la intensidad y la ubicación de la carga inducida no se conocen en general, no se puede aplicar los métodos para calcular el $\vec{E}$ total.
Mediante la utilización de la ley de Gauss, es posible establecer un conjunto de propiedades relativas a la distribución de la carga inducida en el conductor y su efecto sobre $\vec{E}$.

1. $\vec{E} = 0$ en todas partes, dentro del conductor.
2. No hay carga neta dentro del conductor.
3. $\vec{E}$ es en todas partes perpendicular a la superficie limítrofe del conductor.
4. La carga inducida por unidad de área σ en la superficie de conducción tiene relación con el $\vec{E}$ en la superficie, por medio de: $E = \sigma/\epsilon_0$.

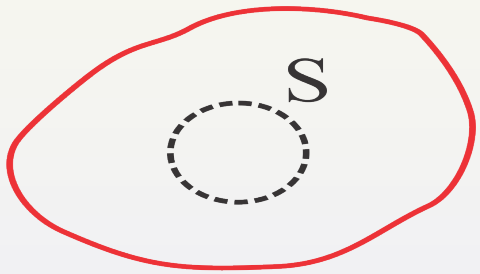
Demostración:

1. Supongamos que el $\vec{E}$ dentro del conductor no fuera cero. En este caso, los electrones experimentarán una fuerza desequilibrada y se acelerarían en una dirección opuesta a este $\vec{E}$. Esto implicaría, al contrario de nuestra hipótesis, que la situación no es estática.
   Se puede comprender esto físicamente como sigue: cuando el conductor se introduce primero en el $\vec{E}$, las líneas de campo penetran a él y ejercen fuerza sobre los electrones móviles de su interior. Como respuesta a esta fuerza, los electrones tienden a desplazarse en una dirección opuesta al $\vec{E}$, y en esa forma, se acumulan en una superficie del conductor. A medida que aumentan los electrones que se reúnen en esta superficie, repelan a estos, contrarrestando los efectos del $\vec{E}$ original.
   En las figuras (a) y (b) se representa la situación inicial y final, cuando se introduce una placa rectangular de metal en un $\vec{E}$ uniforme.



En (a) se muestra la situación inicial no equilibrada en la que las líneas de $\vec{E}$ penetran al conductor, de tal modo que los electrones experimentan una fuerza que actúa hacia la izquierda. Finalmente, después de que se haya acumulado una cantidad suficiente de carga negativa en la cara izquierda del conductor (dejando en esa forma una carga positiva en la cara opuesta), el $\vec{E}$ del interior se hace cero. Solo entonces se detiene la migración de los electrones. El tiempo necesario para pasar de la configuración inicial a la final, de $\vec{E} = 0$ suele ser del orden de $10^{-14}s$. Este tiempo es tan breve que, para fines prácticos, esta predisposición de la carga se puede considerar que se lleva a cabo instantáneamente.

2. En la figura (c) una superficie Gaussiana arbitraria y cerrada S, contenida totalmente dentro de un conductor. Por propiedad, de que el $\vec{E}$ se desvanece en todos los puntos de S y por ende, lo mismo deberá hacer el flujo ϕ_S que sale de S. Por la ley de Gauss en S, se llega a la conclusión de que la carga total dentro de S es también cero.



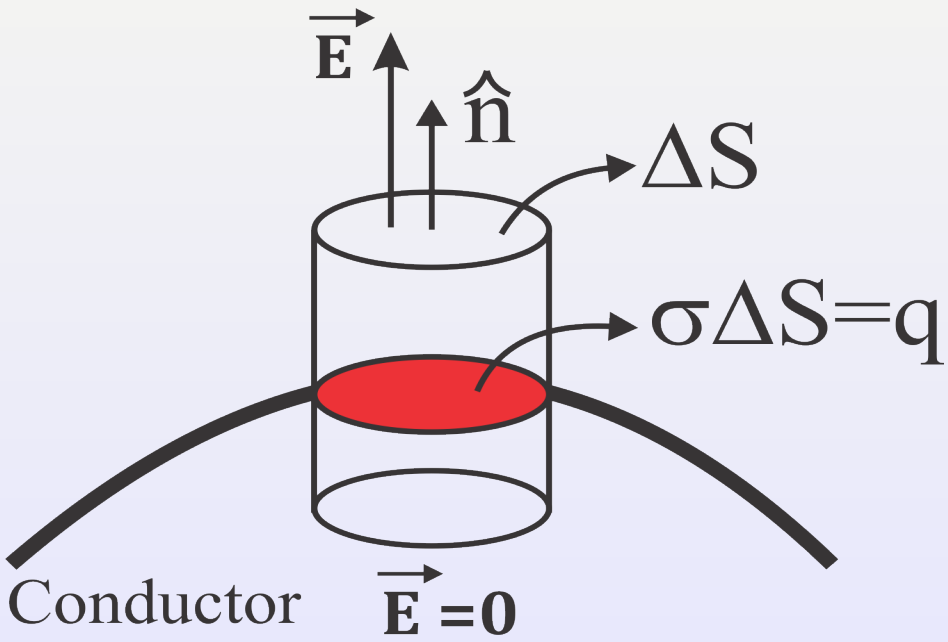
(c)

3. Suponiendo que en algún punto de la superficie de conducción, el $\vec{E}$ tiene una componente a lo largo de la superficie. Entonces, los electrones cercanos a este punto experimentarán una fuerza y tenderán a desplazarse a lo largo de la superficie del conductor. Esto contradice la hipótesis de que prevalecen condiciones estáticas. Por ende, se sigue que el $\vec{E}$ en la superficie de un conductor tiene que ser perpendicular a dicha superficie.

4. En la figura (d) se toma una porción de la superficie de un conductor en un $\vec{E}$ y suponiendo que el conductor tenga una carga superficial σ. Aplicando la ley de Gauss, se tiene:

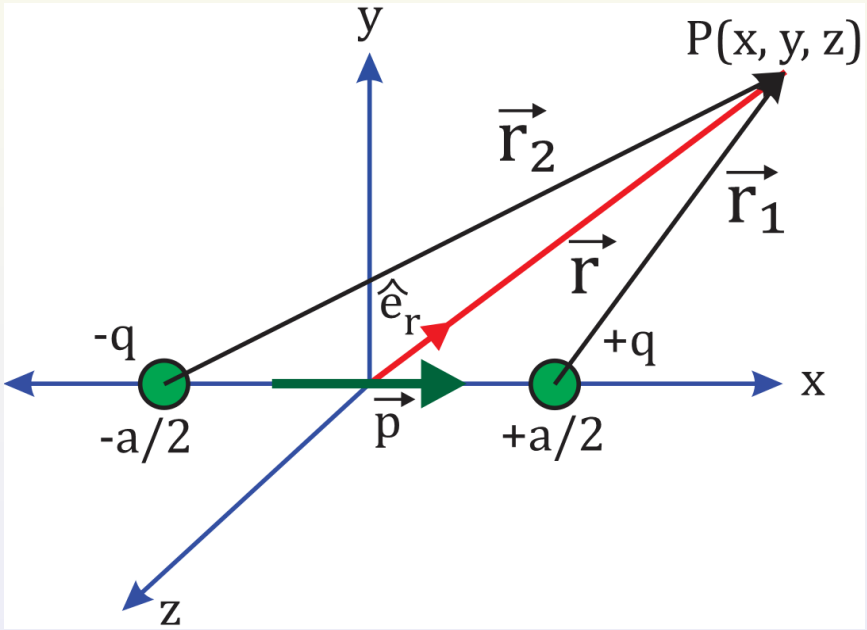
$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{q}{\epsilon_0} \Longrightarrow E\triangle S = \sigma\frac{\triangle S}{\epsilon_0}$$

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \tag{30}$$



El Dipolo Eléctrico

Se desea calcular el potencial y el $\vec{E}$ de dos cargas puntuales $+q$ y $-q$ separadas una distancia a, tal como se muestra en la figura:



El potencial en el punto $P(x, y, z)$ esta dado por:

$$\phi(x, y, z) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r_1} - \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r_2} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right) \tag{1}$$

Si: $|\vec{r}|^2 = r^2 = x^2 + y^2 + z^2$
luego:

$$r_1 = \sqrt{(x - \frac{a}{2})^2 + y^2 + z^2} = r\sqrt{1 - \frac{ax}{r^2} + \frac{a^2}{4r^2}}$$

Expandiendo la raíz con $r \gg a$:

$$r_1 \approx r(1 - \frac{1}{2}\frac{ax}{r^2}) \tag{2}$$

De la misma manera se realiza el mismo procedimiento para r_2:

$$r_2 = \sqrt{(x + \frac{a}{2})^2 + y^2 + z^2} = r\sqrt{1 + \frac{ax}{r^2} + \frac{a^2}{4r^2}}$$

Expandiendo se tiene:

$$r_2 \approx r(1 + \frac{1}{2}\frac{ax}{r^2}) \tag{3}$$

Reemplazando las ecuaciones (2) y (3) en (1), entonces se tiene:

$$\phi(x,y,z) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}\left|\frac{1}{1-\frac{1}{2}\frac{ax}{r^2}} - \frac{1}{1+\frac{1}{2}\frac{ax}{r^2}}\right| = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}\left|\frac{1+\frac{1}{2}\frac{ax}{r^2}-1+\frac{1}{2}\frac{ax}{r^2}}{1-\frac{1}{4}(\frac{ax}{r^2})^2}\right|$$

$$\phi(x,y,z) = \frac{qax}{4\pi\epsilon_0 r^3} \tag{4}$$

Introduciendo el momento dipolar $\vec{p}$ definido por $|\vec{p}| = qa$, siendo un vector que va desde $-q$ a $+q$. Luego la ecuación (4) queda:

$$\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\vec{p}\cdot\vec{r}}{r^3} \tag{5}$$

Usando coordenadas polares, el potencial eléctrico de la ecuación (5) queda:

$$\phi(r,\theta) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\vec{p}\cdot\hat{e}_r}{r^2} = \frac{pcos\theta}{4\pi\epsilon_0 r^2} \tag{6}$$

A partir del potencial de la ecuación (5) se obtiene el campo eléctrico:

$$\vec{E} = -\nabla\phi = -\nabla\left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\vec{p}\cdot\vec{r}}{r^3}\right) = -\nabla\left(\frac{pcos\theta}{4\pi\epsilon_0 r^2}\right)$$

Entonces:

$$\vec{E} = -\frac{\partial\phi}{\partial r}\hat{e}_r - \frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial\theta}\hat{e}_\theta - \frac{1}{rsen\theta}\frac{\partial\phi}{\partial\varphi}\hat{e}_\varphi$$

$$\vec{E} = -\left(-\frac{2pcos\theta}{4\pi\epsilon_0 r^3}\right)\hat{e}_r - \left(-\frac{psen\theta}{4\pi\epsilon_0 r^3}\right)\hat{e}_\theta - \frac{1}{rsen\theta}(0)\hat{e}_\varphi$$

$$\vec{E} = \frac{p}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{2cos\theta}{r^3}\hat{e}_r + \frac{sen\theta}{r^3}\hat{e}_\theta\right] \tag{7}$$

En coordenadas cartesianas, la componente E_i del $\vec{E}$ es:

$$E_i = -\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\sum_j p_j x_j}{r^3}\right) = -\frac{\partial}{\partial x_i}\left[\frac{\sum_j p_j x_j}{(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{3/2}}\right]$$

$$E_i = -\left[\frac{\sum_j p_j \delta_{ij}}{r^3} - \frac{3}{2}\frac{2x_i \sum_j p_j x_j}{r^5}\right] = \frac{3x_i(\vec{p}\cdot\vec{r})}{r^5} - \frac{p_i}{r^3}$$

Haciendo la extensión para todas las componentes E_i del $\vec{E}$ y empleando la notación $\hat{e}_r = \vec{r}/r$, entonces el $\vec{E}$ del dipolo $\vec{p}$ se puede escribir como:

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{3\vec{r}(\vec{p}\cdot\vec{r})}{r^5} - \frac{\vec{p}}{r^3}\right] = \left[\frac{3(\vec{p}\cdot\hat{e}_r)\hat{e}_r - \vec{p}}{4\pi\epsilon_0 r^3}\right] \tag{8}$$

Pero esta ecuación no está completa, pues el punto singular $r = 0$ necesita una consideración particular

La ecuación (8) describe el campo dipolar para $r \neq 0$, donde la $\nabla \cdot \vec{E} = 0$ y la integral $\int_V \vec{E}\, dV$ sobre una esfera pequeña alrededor de un dipolo, que esta en el centro de la esfera, se puede calcular fácilmente aplicando $\int_V \nabla\phi\, dV = \oint_S \phi\hat{n}\, dS$:

$$\int_V \vec{E}\, dV = -\int_V \nabla\left(\frac{\vec{p}\cdot\vec{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3}\right) r^2 dr d\Omega = -\oint_S \left(\frac{\vec{p}\cdot\hat{e}_r}{4\pi\epsilon_0 r^2}\right)\hat{e}_r r^2\, d\Omega$$

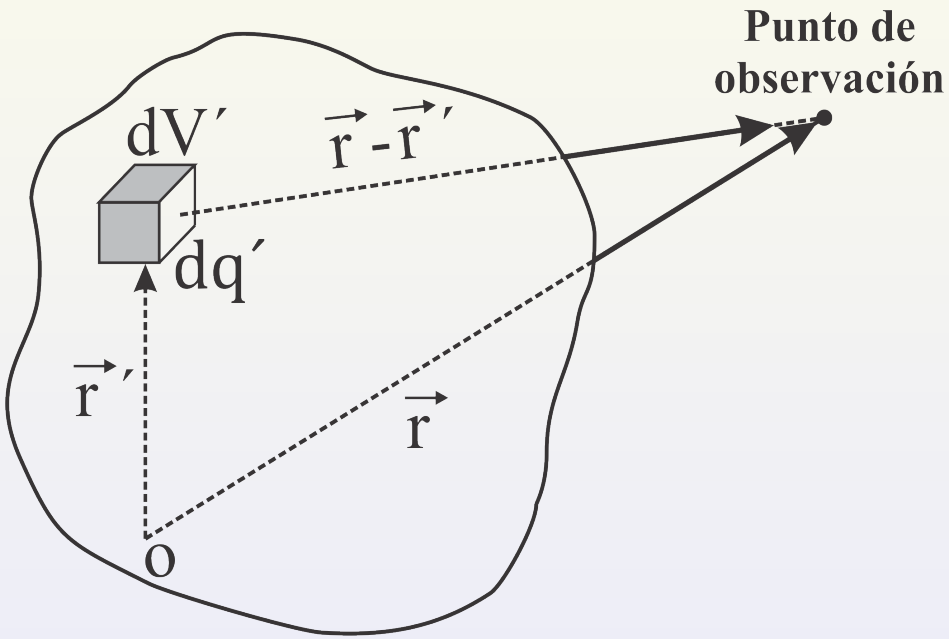
Luego, se obtiene que:

$$\int_V \vec{E}\, dV = -\frac{\vec{p}}{3\epsilon_0} \tag{9}$$

Pero por la ley de Gauss: $\oint_C \vec{E}\cdot d\vec{S} = q/\epsilon_0 = 0$, generándose una contradicción entre las ecuaciones (5) y (8), que será revertida añadiendo el término $\frac{\vec{p}}{3\epsilon_0}\delta(\vec{r})$ a la ecuación (9).

Desarrollo Multipolar de Campos Eléctricos

Se desea definir el momento dipolar eléctrico de una distribución de carga arbitraria.



El potencial en función de $\vec{r}$ esta dado por:

$$\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_V \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\,dV' \tag{1}$$

Si los puntos de observación $\vec{r}$ están lejos del origen, entonces:

$$\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|} = \frac{1}{\left(r^2 - 2\vec{r}\cdot\vec{r}' + \vec{r}'^2\right)^{1/2}} = \frac{1}{r\left(1 - 2\dfrac{\vec{r}\cdot\vec{r}'}{r^2} + \dfrac{r'^2}{r^2}\right)^{1/2}}$$

$$\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|} = \frac{1}{r}\left(1 - 2\frac{\vec{r}\cdot\vec{r}'}{r^2} + \frac{r'^2}{r^2}\right)^{-1/2}$$

$$\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|} = \frac{1}{r}\left\{1 - \frac{1}{2}\left[-\frac{2\vec{r}\cdot\vec{r}'}{r^2} + \frac{r'^2}{r^2}\right] + \frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{3}{2}\left[\ldots\right]^2 + \ldots\right\} \qquad (2)$$

Reemplazando la ecuación (2) en (1):

$$\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_V \left\{\frac{1}{r} + \frac{\vec{r}\cdot\vec{r}'}{r^3} + \frac{1}{2}\left[\frac{3(\vec{r}\cdot\vec{r}')^2}{r^5} - \frac{r'^2}{r^3}\right] + \ldots\right\}\rho(\vec{r}')\,dV' \qquad (3)$$

$$\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{1}{r}\underbrace{\int_V \rho(\vec{r}')\,dV'}_{I} + \frac{\vec{r}}{r^3}\cdot\underbrace{\int_V \vec{r}'\,\rho(\vec{r}')\,dV'}_{II}\right]$$

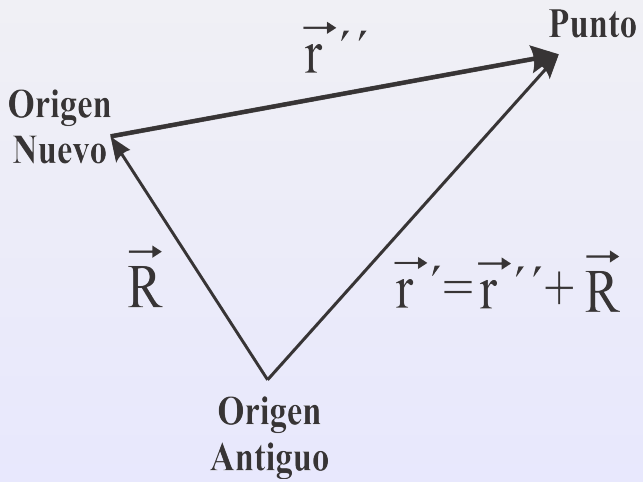
$$+\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left[\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\frac{1}{2}\frac{x_i x_j}{r^5}\underbrace{\int_V (3x_i' x_j' - \delta_{ij}r'^2)\rho(\vec{r}')\,dV'}_{III}\right] \quad (4)$$

donde: x_i, x_j son las componentes cartesianas de $\vec{r}$; x_i', x_j' son las componentes cartesianas de $\vec{r}'$ y δ_{ij} es el delta de Kronecker:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ 1 & \text{si } i = j \end{cases} \quad (5)$$

La integral (I) es la carga total y el primer término de la ecuación (4) es el potencial que resultaría si esta carga total se concentraría en el origen de coordenadas.

La integral (II) es una generalización directa del concepto del momento dipolar para una distribución de carga continua y se llama "momento dipolar de la distribución de carga". El segundo término de la ecuación (4) es el potencial que resultaría si un dipolo puntual igual al momento dipolar de la distribución de carga se localizara en el origen de coordenadas.
Se observa que el momento dipolar de una distribución de carga es independiente del origen de coordenadas si la carga total es cero.
Verificando, se tiene un nuevo sistema de coordenadas cuyo origen está en la posición $\vec{R}$ del sistema inicial.



El momento dipolar con respecto al sistema antiguo es:

$$\vec{p} = \int_V \vec{r}'\,\rho(\vec{r}')\,dV' = \int_V (\vec{r}'' + \vec{R}\rho(\vec{r}'))\,dV' = \int_V \vec{r}''\rho(\vec{r}')\,dV' + \vec{R}Q \tag{6}$$

Por lo tanto, $\vec{p}$ es independiente del origen si $Q = 0$.
La integral (III) de la ecuación (4) se puede escribir de la forma:

$$\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} \frac{1}{2}\frac{x_i x_j}{r^5} Q_{ij} \tag{7}$$

Donde Q_{ij} es el tensor momento Cuadrupolar:

$$Q_{ij} = \int_V (3x'_i x'_j - \delta_{ij} r'^2)\rho(\vec{r}')\,dV' \tag{8}$$

El tensor Q_{ij} tiene nueve componentes, de los cuales seis son iguales en pares, quedando seis componentes distintas, concluyendo que:

$$\phi(\vec{r}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} + \frac{\vec{r}\cdot\vec{p}}{4\pi\epsilon_0 r^3} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{2}\sum_{ij}\frac{x_i x_j}{r^5}Q_{ij} \tag{9}$$

Por lo tanto, los multipolos eléctricos se utilizan para calcular de manera aproximada el potencial y el $\vec{r}$ de una distribución de carga. Otra forma alternativa de escribir las ecuaciones (7) y (9) en el tercer integrando de la ecuación (4), son:

$$\frac{1}{2!}\sum_{i,j}\frac{3x_i x_j - r^2\delta_{ij}}{r^5}\int_V \rho(\vec{r}')x_i' x_j'\,dV' =$$

$$\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}\sum_{i,j}\frac{3x_i x_j - r^2\delta_{ij}}{r^5}\int_V \rho(\vec{r}')(3x_i' x_j' - r'^2\delta_{ij})\,dV' +$$

$$\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}\sum_{i,j}\frac{3x_i x_j - r^2\delta_{ij}}{r^5}\int_V \rho(\vec{r}')r'^2\,dV'\delta_{ij}$$

$$= \frac{1}{6}\sum_{i,j}\frac{3x_ix_j - r^2\delta_{ij}}{r^5}Q_{ij} + \frac{1}{6}\sum_{i}\frac{3x_i^2 - r^2}{r^5}\int_V \rho(\vec{r}')r'^2\,dV'$$

El tercer integrando de la ecuación (4) queda como sigue:

$$\frac{1}{2!}\sum_{i,j}\frac{3x_ix_j - r^2\delta_{ij}}{r^5}\int_V \rho(\vec{r}')x_i'x_j'\,dV' = \frac{1}{6}\sum_{i,j}\frac{3x_ix_j - r^2\delta_{ij}}{r^5}Q_{ij} \qquad (10)$$

Donde:

$$\frac{1}{6}\sum_{i}(3x_i^2 - r^2)\frac{\int_V \rho(\vec{r}')r'^2\,dV'}{r^5} = \frac{1}{6}(3r^2 - 3r^2)\frac{\int_V \rho(\vec{r}')r'^2\,dV'}{r^5} = 0$$

El potencial eléctrico de la ecuación (1) es de la forma:

$$\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_V \rho(\vec{r}')\frac{1}{|\vec{r} + \vec{r}'|}\,dV'$$

Luego el $\phi(\vec{r})$ de la ecuación (1), queda como sigue:

$$\phi(\vec{r}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} + \frac{\vec{r}\cdot\vec{p}}{4\pi\epsilon_0 r^3} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{6}\sum_{i,j}\frac{Q_{ij}(3x_i x_j - r^2\delta_{ij})}{r^5} + \ldots \qquad (11)$$

La traza del tensor momento cuadrupolar Q_{ij} de la ecuación (8) es de la forma:

$$Q_{ij} = \int_V (3x'_i x'_j - \delta_{ij} r'^2)\rho(\vec{r}')\, dV' = \sum_{i=1}^{3} Q_{ij} = Q_{11} + Q_{22} + Q_{33}$$

$$Q_{ii} = \int_V \rho(\vec{r}')\left[3(x_1'^2 + x_2'^2 + x_3'^2) - 3r'^2\right] dV' = 0 \qquad (12)$$

La ecuación (11) se utiliza en Espectroscopia Mössbauer para calcular la interacción cuadripolar en la región nuclear debido a la distribución de cargas que rodean al nucleo Mössbauer.

Energía Potencial de un $\vec{p}$ que se coloca en un $\vec{E}$ externo

Si $-q$ está en $\vec{r}$ y q en $\vec{r}+\vec{a}$, en un $\vec{E}$ descrito por la función potencial $\varphi_{ext}(\vec{r})$, la energía potencial es: $U = -q\varphi_{ext}(\vec{r}) + q\varphi_{ext}(\vec{r}+\vec{a})$
Si $\vec{a} \ll \vec{r} \Rightarrow \varphi_{ext}(\vec{r}+\vec{a})$ puede desarrollarse en series de potencia de $\vec{a}$ y solo los dos primeros términos se conservan.
El desarrollo de la función $\varphi_{ext}(\vec{r}+\vec{a})$ queda como sigue:

$$\varphi_{ext}(\vec{r}+\vec{a}) \cong \varphi_{ext}(\vec{r}) + \vec{a}\cdot\nabla\varphi_{ext}$$

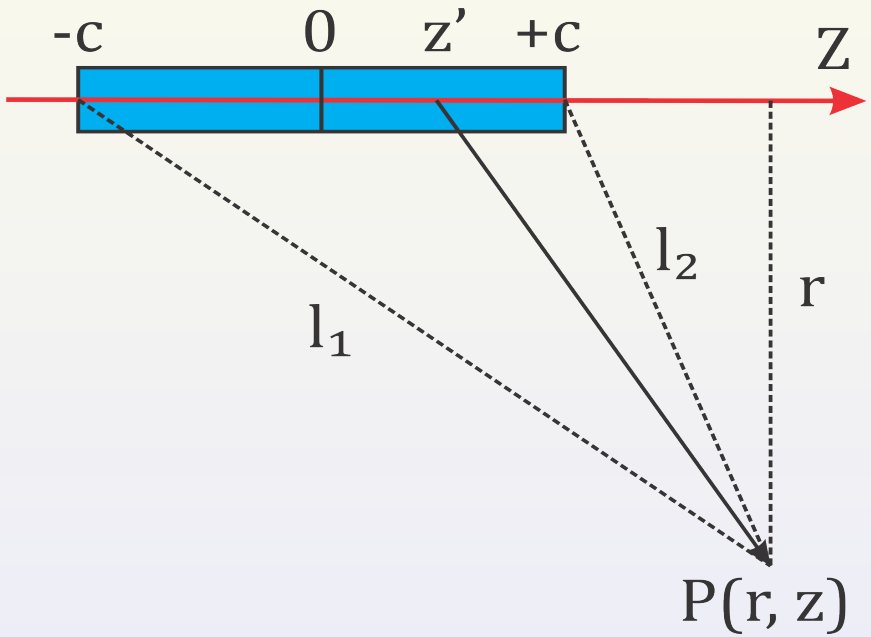
Luego: $U = -q\varphi_{ext}(\vec{r}) + q\varphi_{ext}(\vec{r}) + q\vec{a}\cdot\nabla\varphi_{ext}$
Tomando el limite de un dipolo puntual se tiene:

$$U(\vec{r}) = \vec{p}\cdot\nabla\varphi_{ext} \Rightarrow U(\vec{r}) = -\vec{p}\cdot\vec{E}_{ext}(\vec{r})$$

La energía potencial de un $\vec{p}$ en un $\vec{E}_{ext}$ calculado en la posición del dipolo siendo $\vec{F} = (\vec{p}\cdot\nabla)\vec{E}$. Si $\vec{E} = cte \Rightarrow \vec{F} = 0$.

Potencial de una varilla uniformemente cargada

La carga q es distribuida uniformemente sobre una línea recta de longitud $2c$ tal como se muestra en la figura:



Se desea calcular el potencial y para la discusión de las superficies equipotenciales se debe usar coordenadas elípticas $u = \frac{1}{2}(l_1 + l_2)$ y $v = \frac{1}{2}(l_1 - l_2)$.

Solución:
El potencial esta dado por:

$$\phi(r,z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \frac{dq}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \tag{1}$$

Siendo:

$$dq = \lambda dz' = (\frac{q}{2c})dz' \tag{2}$$

Donde la densidad lineal de carga es: $\lambda = \frac{q}{2c}$, luego:

$$\phi(r,z) = \frac{q}{2c(4\pi\epsilon_0)}\int_{-c}^{+c} \frac{dz'}{\sqrt{r^2+(z-z')^2}} \tag{3}$$

Integrando:

$$\phi(r,z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{2c}\ln[2\sqrt{r^2+(z-z')^2}+2(z'-z)]\Big|_{-c}^{c}$$

$$\phi(r,z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{2c}\ln\left[\frac{\sqrt{r^2+(z-c)^2}-(z-c)}{\sqrt{r^2+(z+c)^2}-(z+c)}\right] \tag{4}$$

Como:

$$l_1 = \sqrt{r^2+(z+c)^2} \tag{5}$$

$$l_2 = \sqrt{r^2+(z-c)^2} \tag{6}$$

Reemplazando las ecuaciones (5) y (6) en (4):

$$\phi(r,z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{2c}\ln\left[\frac{l_2-(z-c)}{l_1-(z+c)}\right] \tag{7}$$

Se introduce la definición de coordenadas elípticas con: $l_1 = u+v$, $l_2 = u-v$ y $cz = uv$, luego el argumento de la ecuación (7) es:

$$\frac{l_2+c-z}{l_1-c-z}=\frac{u-v+c-z}{u+v-c-z}=\frac{c(u-v+c)-uv}{c(u+v-c)-uv}=$$
$$\frac{(u+c)(cu-cv+c^2-uv)(u-c)}{(u+c)(cu+cv-c^2-uv)(u-c)}=\frac{(u+c)(cu^2-u^2v+c^2v-c^3)}{(u-c)(cu^2-u^2v+c^2v-c^3)}$$

Luego:

$$\frac{l_2+c-z}{l_1-c-z}=\frac{u+c}{u-c} \tag{8}$$

Reemplazando la expresión (8) en la ecuación (7), se tiene:

$$\phi=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{q}{2c}\right)\ln\left(\frac{u+c}{u-c}\right) \tag{9}$$

La ecuación (9) es la solución exacta válida en la vecindad de la varilla (campo cercano) y a grandes distancias (campos distantes). El área $u=cte$ corresponde a una superficie equipotencial, tal que la suma de las distancias permanecen constantes, o sea $l_1+l_2=cte$. Esta superficie es una elipsoide de revolución alrededor del eje z con sus focos en $\pm c$.

Para grandes distancias $u \gg c$, se tiene:

$$\frac{u+c}{u-c} = \frac{1+c/u}{1-c/u} \sim 1 + 2\frac{c}{u} \tag{10}$$

Una aproximación para el logaritmo: $\ln(1+x) = \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots$

Por lo tanto, para $x \ll 1$ se tiene:

$$\ln(1 + 2\frac{c}{u}) \sim 2\frac{c}{u} \tag{11}$$

Para esta aproximación a campos distantes, u es igual a la distancia desde el origen y el potencial ϕ se transforma en un potencial que corresponde al de una carga puntual en el origen, es decir, se reemplaza la ecuación (11) en (9):

$$\phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{q}{2c}\right)\left(\frac{2c}{u}\right) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 u} \tag{12}$$

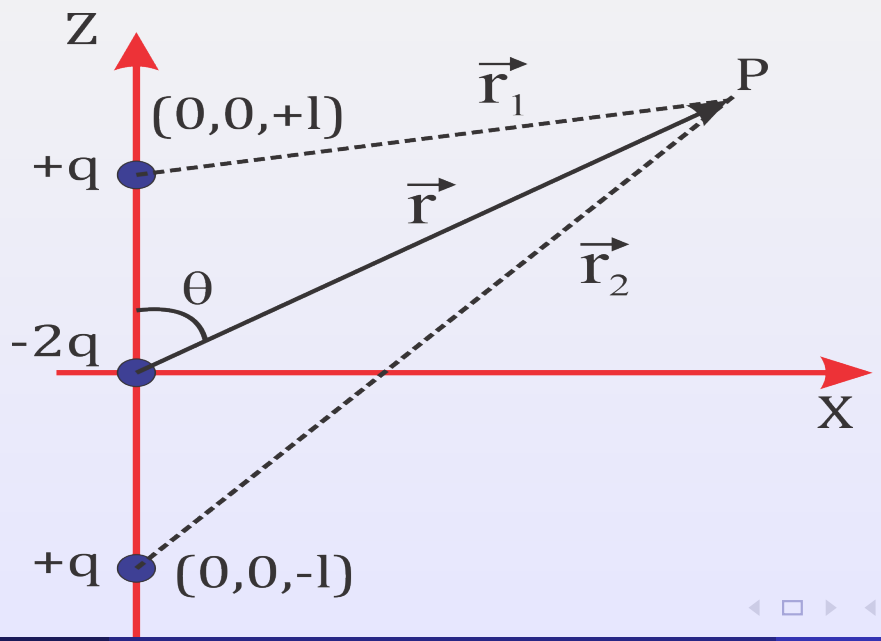
Problema de aplicación 1

Sean tres cargas colocadas de manera lineal, la carga $-2q$ se coloca en el origen, y dos cargas, cada una de $+q$ se colocan en los puntos $(0,0,l)$ y $(0,0,-l)$ respectivamente.

a) Halle una expresión relativamente sencilla para el potencial eléctrico $U_P(\vec{r})$ que sea válida para distancias $|\vec{r}| \gg l$.

b) Dibuje las superficies equipotenciales en el plano X, Z. (Cuadruplo lineal).

Solución:



El potencial eléctrico en el punto P es:

$$U_P(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{q}{r_1} - \frac{2q}{r} + \frac{q}{r_2}\right) \tag{1}$$

De la figura:

$$r_1 = \left(r^2 - 2lrcos\theta + l^2\right)^{1/2} \tag{2}$$

$$r_2 = \left(r^2 + 2lrcos\theta + l^2\right)^{1/2} \tag{3}$$

Como: $|\vec{r}| \gg l$, se tiene que la ecuación (2) toma la forma:

$$r_1 = r\left(1 - \frac{2l}{r}cos\theta + \frac{l^2}{r^2}\right)^{1/2}$$

$$\frac{1}{r_1} = \frac{1}{r}\left(1 - \frac{2l}{r}cos\theta + \frac{l^2}{r^2}\right)^{-1/2}$$

Como: $(1+x)^n = 1 + nx + \frac{n^2}{2!}x^2 + \ldots$

$$\frac{1}{r_1} = \frac{1}{r}\left(1 - \frac{1}{2}\left(-\frac{2l}{r}cos\theta + \frac{l^2}{r^2}\right) + \frac{3}{8}\left(-\frac{2l}{r}cos\theta + \frac{l^2}{r^2}\right)^2 + \ldots\right)$$

Luego:

$$\frac{1}{r_1} = \frac{1}{r} + \frac{l}{r^2}cos\theta + \frac{l^2}{2r^3}(3cos^2\theta - 1) + \ldots \quad (4)$$

Del mismo modo para r_2:

$$\frac{1}{r_2} = \frac{1}{r} - \frac{l}{r^2}cos\theta + \frac{l^2}{2r^3}(3cos^2\theta - 1) + \ldots \quad (5)$$

Reemplazando las ecuaciones (4) y (5) en (1):

$$U_P(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{1}{r} + \frac{l}{r^2}cos\theta + \frac{l^2}{2r^3}(3cos^2\theta - 1) + \ldots\right] + \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left[-\frac{2}{r} + \frac{1}{r} - \frac{l}{r^2}cos\theta + \frac{l^2}{2r^3}(3cos^2\theta - 1) + \ldots\right] \quad (6)$$

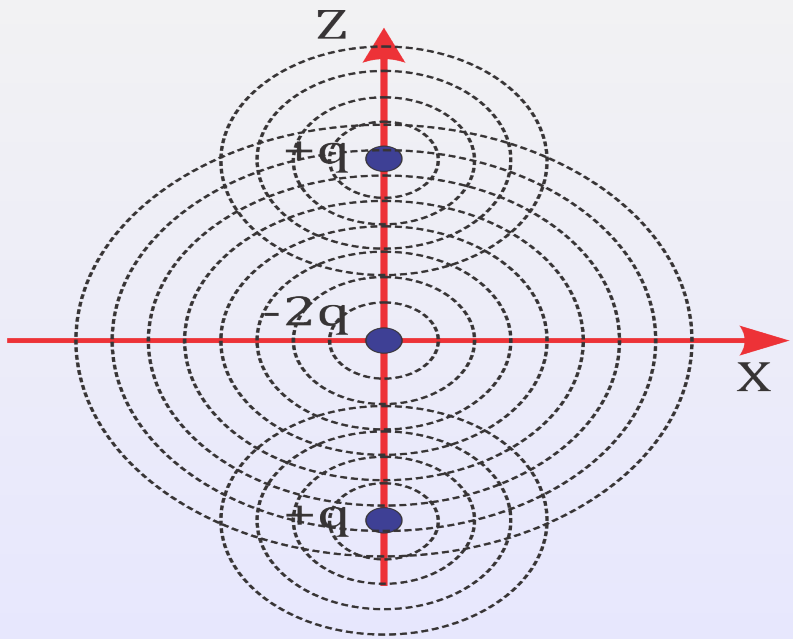
El potencial eléctrico $U_P(\vec{r})$, válida para $|\vec{r}| \gg l$, es:

$$U_P(\vec{r}) = \frac{ql^2}{4\pi\epsilon_0 r^3}(3cos^2\theta - 1) \tag{7}$$

$$U_P(\vec{r}) = \frac{ql^2}{r^5}(3z^2 - r^2) \tag{8}$$

$$U_P(\vec{r}) = \frac{2ql^2}{4\pi\epsilon_0 r^3}P_2(cos\theta) \tag{9}$$

las superficies equipotenciales en el plano X, Z:



Problema de aplicación 2

¿Cuál es el tensor de momento de cuadripolo de la distribución de carga?
Solución:
El tensor de momento de cuadripolo está definida por:

$$Q_{\alpha\beta} = \int_V (3x'_\alpha x'_\beta - \delta_{\alpha\beta} r'^2)\rho(\vec{r}')\, dV'$$

Con $r'^2 = \delta_{\gamma\sigma} x'_\gamma x'_\sigma$.
El tensor $Q_{\alpha\beta}$ tiene 9 componentes, de los cuales seis son iguales en pares, es decir tres componentes, quedando seis componentes distintas (el tensor es simétrico).
Evaluando:

$$Q_{11} = \int_V \left[3x'_1 x'_1 - \delta_{11}(x'_1 x'_1 + x'_2 x'_2 + x'_3 x'_3)\right] \rho(\vec{r}')\, dV'$$

Aquí: $x'_1 = 0$ y $x'_2 = 0$

$$Q_{11} = -\int_V x_3' x_3' \rho(\vec{r}')\, dV' = -\int_V x_3' x_3'\, dq' =$$
$$-\left[l^2 q + (0)^2(-2q) + (-l)^2 q\right] = -2l^2 q$$
$$Q_{22} = \int_V \left[3x_2' x_2' - \delta_{22}(x_1' x_1' + x_2' x_2' + x_3' x_3')\right] \rho(\vec{r}')\, dV' =$$
$$-\int_V x_3' x_3' \rho(\vec{r}')\, dV' = -2l^2 q$$
$$Q_{33} = \int_V \left[3x_3' x_3' - \delta_{33}(x_1' x_1' + x_2' x_2' + x_3' x_3')\right] \rho(\vec{r}')\, dV' =$$
$$-\int_V 2x_3' x_3' \rho(\vec{r}')\, dV' = 4ql^2$$
$$Q_{12} = \int_V \left[3x_1' x_2' - \delta_{12}(x_1' x_1' + x_2' x_2' + x_3' x_3')\right] \rho(\vec{r}')\, dV' =$$
$$-\int_V 3x_1' x_2' \rho(\vec{r}')\, dV' = 0$$
ya que $x_1' = 0$ y $x_2' = 0 \Longrightarrow Q_{21} = 0$

$$Q_{13} = \int_V \left[3x'_1x'_3 - \delta_{13}(x'_1x'_1 + x'_2x'_2 + x'_3x'_3)\right] \rho(\vec{r}')\, dV' = 0$$

por ser $x'_1 = 0 \Longrightarrow Q_{31} = 0$

$$Q_{23} = \int_V \left[3x'_2x'_3 - \delta_{23}(x'_1x'_1 + x'_2x'_2 + x'_3x'_3)\right] \rho(\vec{r}')\, dV' = 0$$

por ser $x'_2 = 0 \Longrightarrow Q_{32} = 0$

El tensor pedido es:

$$Q_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} -2ql^2 & 0 & 0 \\ 0 & -2ql^2 & 0 \\ 0 & 0 & 4ql^2 \end{pmatrix}$$

La traza del tensor es:

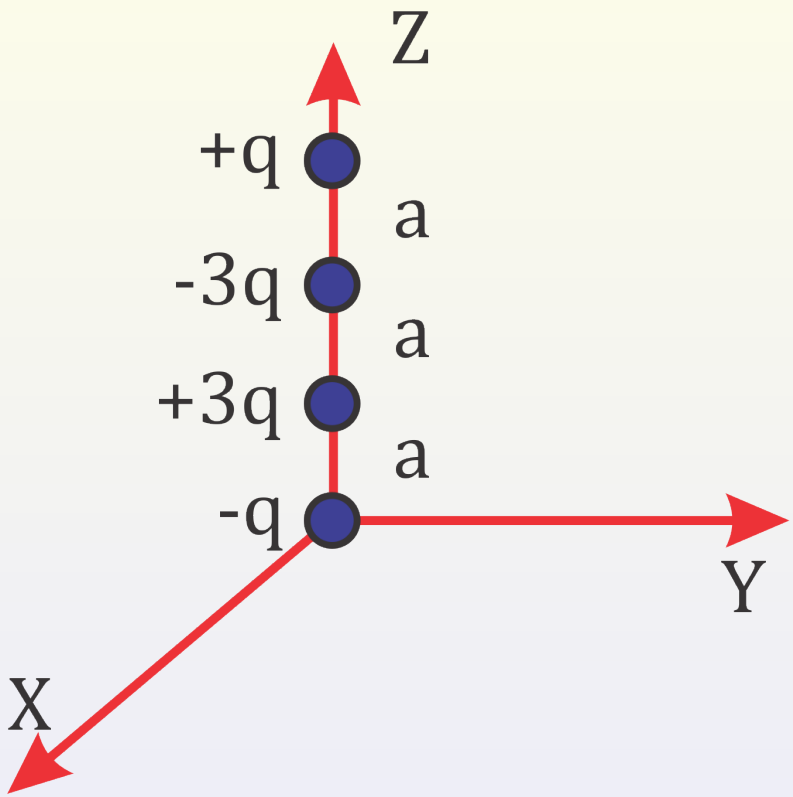
$$Tr = \sum_{\alpha=\beta} Q_{\alpha\beta} = -2ql^2 - 2ql^2 + 4ql^2 = 0$$

Problema de aplicación 3

Halle el potencial ϕ del campo eléctrico a grandes distancias de los siguientes sistemas de cargas:
a) Para un cuadrupolo plano: Las cargas $\pm q$ están colocadas en dos vértices de un cuadrado de lado a, de tal forma que las cargas adyacentes son de signo diferente y con la particularidad de que en el origen de coordenadas se encuentra la carga $+q$ y los lados del cuadrupolo son paralelos a los ejes X e Y.
Respuesta:
Para un Cuadrupolo plano, el potencial calculado en unidades (c.g.s) tiene la forma:

$$\varphi \approx \frac{3qa^2}{r^3} sen^2\theta cos\alpha sen\alpha$$

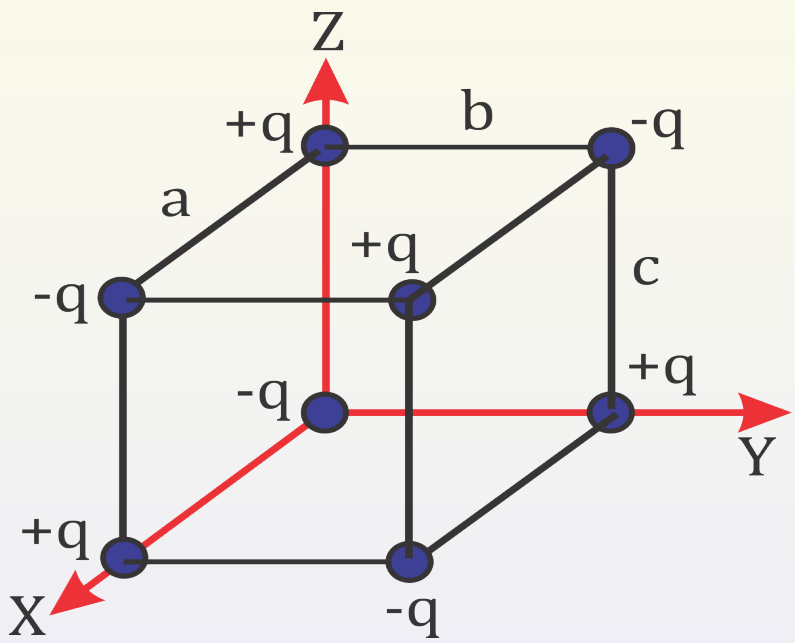
b) Para un octupolo lineal:



El potencial calculado en unidades (c.g.s) tiene la forma:

$$\varphi \approx \frac{6qa^3}{r^4} P_3(cos\theta) = qa^3 \left(\frac{15cos^3\theta - 9cos\theta}{r^4} \right)$$

c) Para un octupolo espacial



El potencial calculado en unidades (c.g.s) tiene la forma:

$$\varphi \approx \frac{15qabcxyz}{r^7} = \frac{15abcsen^2\theta cos\theta sen\alpha cos\alpha}{r^4}$$