CAPITULO 17 PROPAGACIÓN DE ONDAS ELECTROMAGNÉTICA

→ Estudiaremos la propagación de EM a través de un medio no lineal de extensión infinita.

→ El término propagación de ondas electromagnéticas cubre un amplio espectro de fenómenos físicos tales como ondas, luz visible, rayos X, rayos γ, etc.

17.1 ONDAS PLANAS MONOCROMÁTICAS EN MEDIOS NO CONDUCTORES

La ecuación de onda para $\vec{E}$ en un medio libre de carga ($\nabla\cdot\vec{D}=0$) es:

$$\nabla^2\vec{E} - \varepsilon\mu\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} - g\mu\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} = 0 \qquad (1)$$

y si $\vec{E}(\vec{r},t) = \vec{E}(\vec{r})\,e^{-i\omega t}$ (2)

(2) en (1) da:

$$e^{-i\omega t}\left\{\nabla^2\vec{E} + \omega^2\varepsilon\mu\vec{E} + i\omega g\mu\vec{E}\right\} = 0 \qquad (3)$$

Las soluciones de (3) de mayor facilidad son las llamadas Ondas planas.

→ Una onda plana, es aquella en la que, en un instante dado, presenta la misma fase en todos los puntos que están sobre cada plano perpendicular a alguna dirección específica.

Por ejemplo: $\vec{E}(z) = \vec{E}_0\,e^{\pm ikz}$ (4) con $|\vec{k}| = \omega/c$ (5)

o $\vec{E}(z) = \vec{E}_0\cos(\omega t \mp kz)$ (6)

por $(\omega t - kz)$ es una cte para t y z dados, sin importar los valores de x e y, y será una onda plana que se desplaza en la dirección z.

Si elegimos ondas planas con direcciones arbitrarias de propagación, tal como $\hat{u}$ (vector unitario), entonces la variable z en el exponente de la ec (4) debe cambiarse a $\hat{u}\cdot\vec{r}$ ∴
una onda plana con dirección de propagación $\hat{u}$ se representa por:

$$e^{-i(\omega t - k\hat{u}\cdot\vec{r})} \quad (7)$$

→ definiremos, el VECTOR DE PROPAGACIÓN, como:

$$\vec{k} = k\hat{u} \quad (8)$$

(8) en (7) $\quad e^{-i(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r})}$ (9)

$k = \frac{2\pi}{\lambda}$

si $\hat{u} = \hat{k} \Rightarrow \hat{u}\cdot\vec{r} = z$ (10) y $\lambda = 2\pi/k$ (11)

→ La velocidad de propagación de una onda plana monocromática es precisamente la velocidad con la que se mueven los planos de fase constante, esto es:

$$\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t = cte \quad (12)$$

Si $\vec{k}\cdot\vec{r} = k\xi$ con $k = |\vec{k}|$ y ξ la proyección de $\vec{r}$ en la dirección de k, luego en (12) tenemos:

$$k\xi - \omega t = cte \quad (13)$$

podemos definir la VELOCIDAD DE FASE, como:

$$v_p = \frac{d\xi}{dt} = \frac{\omega}{k} = \frac{\omega}{n\omega/c} = c/n \quad (14)$$

recordando que $k = \sqrt{K}\,\frac{\omega}{c} = n\frac{\omega}{c}$ (15)

→ en el espacio libre $v_p = c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}} = 2.9979\times10^8\ m/s$ (16)

→ como no hay distribuciones de carga ni de corrientes en el medio y la conductividad es $g = 0$, entonces las ecuaciones de Maxwell son:

$$\nabla\cdot\vec{D} = 0 \quad , \quad \nabla\cdot\vec{B} = 0 \quad , \quad \nabla\times\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \quad y \quad \nabla\times\vec{H} = \frac{\partial\vec{D}}{\partial t} \quad (17)$$

y los campos tienen la forma

$$\vec{E}(\vec{r},t) = \hat{E}\,e^{-i(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r})} \quad (18)$$

donde $\hat{E}$ es el vector de amplitud constante complejo de la onda plana, que sustituido en las ecuaciones (17) impondrá

Condiciones a $\vec{K}$ y $\hat{E}$.

En (18) $$\frac{\partial \vec{E}(\vec{r},t)}{\partial t} = \hat{E}\, e^{-i(\omega t - \vec{K}\cdot\vec{r})}(-i\omega t)$$

$$= -i\omega\, \vec{E}(\vec{r},t) \quad (19)$$

luego la acción del operador $\frac{\partial}{\partial t} = -i\omega$ (20)

de igual manera el operador ∇ es equivalente a $\nabla = i\vec{K}$ (21)

∴ las ecuaciones (17) se convierten en:

$\vec{K}\cdot\hat{D} = 0$ (22), $\vec{K}\cdot\hat{B} = 0$ (23), $\vec{K}\times\hat{E} = \omega\hat{B}$ (24) y $\vec{K}\times\hat{H} = -\omega\hat{D}$ (25)

Si suponemos que el medio es lineal, las ecuaciones constitutivas son:

$$\hat{D} = \varepsilon\hat{E} \quad (26)$$

$$\hat{H} = \frac{1}{\mu}\hat{B} \quad (27)$$

y si además el medio es homogéneo e isótropo en el que ε y μ son escalares constantes y las aplicaciones serán en medios no magnéticos, entonces $\mu = \mu_0$ y $K = \varepsilon/\varepsilon_0$ y $\varepsilon_0\mu_0 = 1/c^2$, las ecuaciones (22), (23), (24) y (25) quedan:

$K\vec{K}\cdot\hat{E} = 0$ (28) $\quad \vec{K}\cdot\hat{B} = 0$ (29)

$\vec{K}\times\vec{E} = \omega\hat{B}$ (30) $\quad \vec{K}\times\hat{B} = -\frac{\omega}{c^2}K\hat{E}$ (31)

Si ω es una frecuencia dada y K como una constante dada del material, el conjunto de ecuaciones (28)–(31) deben ser satisfechas mediante una elección adecuada de $\vec{K}$, $\hat{E}$ y $\hat{B}$. Como $K \neq 0 \Rightarrow \vec{K}\cdot\hat{E} = 0$ y $\vec{K}\cdot\hat{B} = 0$ siempre, o sea $\vec{E}$ y $\vec{B}$ deben ser perpendiculares a $\vec{K}$. Tal onda se llama ONDA TRANSVERSAL y como $\vec{B} = \frac{\vec{K}\times\vec{E}}{\omega} \Rightarrow$

$\vec{E}$ y $\vec{B}$ son perpendiculares entre sí y de magnitudes $\hat{B} = (\frac{K}{\omega})\hat{E}$

→ Los vectores $\vec{K}$, $\vec{E}$ y $\vec{B}$ (en este orden) forman un conjunto orientado a derecha.

→ La magnitud de $\vec{K} = K\hat{u}$, la obtenemos de:

$$\vec{K} \times (\vec{K} \times \hat{E}) = \vec{K} \times (\omega \hat{B}) = \omega \vec{K} \times \hat{B}$$

$$= \omega \left(-\frac{\omega}{c^2}\right) K \hat{E}$$

$$\vec{K}(\vec{K}\cdot\hat{E}) - \vec{E}(\vec{K}\cdot\vec{K}) = -K\left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \hat{E}$$

($\vec{K}\cdot\hat{E} = 0$; $\vec{K}\cdot\vec{K} = K^2$)

$$\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = \vec{B}(\vec{A}\cdot\vec{C}) - \vec{C}(\vec{A}\cdot\vec{B})$$

$$-K^2\hat{E} = -K\left(\frac{\omega}{c}\right)^2$$

luego $K^2 = K\left(\frac{\omega}{c}\right) \Rightarrow$

$$\boxed{K = \sqrt{K}\,\frac{\omega}{c}} \qquad (32)$$

RELACIÓN DE DISPERSIÓN TRANSVERSAL que determina la magnitud del vector de onda $\vec{K} = \vec{K}(\omega, K)$

RESUMIENDO:

→ Una onda monocromática transversal plana que se propaga en la dirección positiva de $\hat{u}$ está descrita por:

$$\vec{E}(\vec{r},t) = \hat{E}\, e^{-i(\omega t - \vec{K}\cdot\vec{r})}, \quad \vec{B}(\vec{r},t) = \hat{B}\, e^{-i(\omega t - \vec{K}\cdot\vec{r})} \qquad (33)$$

donde $\vec{K} = K\hat{u}$. La dirección de $\hat{u}$ y la frecuencia ω son completamente arbitrarias.

→ La amplitud $\hat{E}$ es arbitraria / $\hat{u}\cdot\hat{E} = 0$ (34)

→ La magnitud de $\vec{K}$ está determinada, para una frecuencia dada ω, por el índice de refracción del material:

$$K = n\frac{\omega}{c} \qquad \text{donde } n = \sqrt{K} \qquad (35)$$

→ $\hat{B}$ está completamente determinado en magnitud y dirección por:

$$\hat{B} = \frac{n}{c}\,\hat{u} \times \hat{E} \qquad (36)$$

→ En el vacío ($n = 1$) $\Rightarrow c\hat{B} = \hat{E}$ en el sistema MKS.

→ La velocidad de fase de la onda es c/n.

→ Como se consideró de forma implícita que $\vec{K}$ es real, se excluyó un conjunto de soluciones de ondas planas que se necesitan en algunos casos para satisfacer las condiciones en la frontera en una zona interfacial plana entre dos medios no conductores. Si $\vec{K}$ no es real, tendríamos:

$$\vec{K} = \vec{K}_r + i\,\vec{K}_i \qquad (37)$$

como $$K^2 = K\left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \Rightarrow \underbrace{\vec{K}_r\cdot\vec{K}_r - \vec{K}_i\cdot\vec{K}_i}_{K_r^2 > K_i^2} + \underbrace{2i\,\vec{K}_r\cdot\vec{K}_i}_{=0} = K\frac{\omega^2}{c^2} \qquad (38)$$

i) $\vec{K}_i = 0$ o

ii) $\vec{K}_i \perp \vec{K}_r$

Caso i) ya fue estudiado

ii) Consiste en ondas en las que los planos de fase constante son perpendiculares a los planos de amplitud constante.

→ Las soluciones de ondas planas son solamente una clase restringida de las soluciones de las ecuaciones de Maxwell y forman la base de una clase más amplia de soluciones.

→ Siendo las ecuaciones lineales, una combinación lineal de soluciones (superposición de ondas planas) es también una solución y se podría formar otras soluciones haciendo la suma de ondas planas:

$$\vec{E}(\vec{r},t) = \sum_i \hat{E}(\vec{K}_i,\omega_i)\, e^{-i(\omega_i t - \vec{K}_i\cdot\vec{r})} \qquad (39)$$

→ Esta superposición de ondas planas tiene la forma de una serie (compleja) de Fourier y, por tanto, podría representar cualquier solución que fuera periódica. Cada serie término de la serie deberá satisfacer por separado las condiciones dadas por las ecuaciones

→ Para una solución que no sea periódica, la suma en la ec. puede convertirse en una integral, denominada INTEGRAL DE FOURIER, con $\hat{E}(\vec{K},\omega)$ como una función continua de $\vec{K}$ y ω.

→ La función $\hat{E}(\vec{k},\omega)$ se llama transformada de Fourier de $\vec{E}(\vec{r},t)$. En este caso, debemos considerar también la posibilidad de que n dependa tanto de k como de ω:

$$n = n(k,\omega) \qquad (40)$$

este último efecto, se conoce como dispersión.

17.2 POLARIZACION

→ Existen dos formas de establecer las amplitudes vectoriales complejas $\hat{E}$ y $\hat{B}$:

i) $\hat{E} = \vec{E}_r + i\,\vec{E}_i$ (41) con $\vec{E}_r$ e $\vec{E}_i$ reales

ii) $\vec{E} = \hat{E}_p\,\vec{p} + \hat{E}_s\,\vec{s} + \hat{E}_u\,\vec{u}$ (42) con $\hat{E}_p$, $\hat{E}_s$ y $\hat{E}_u$ son escalares complejos y $\vec{p}$, $\vec{s}$ e $\vec{u}$ forman una base real ortogonal a derecha.

ambas formas son equivalentes, siempre que:

$$E_{p_r} = E_{r_p},\quad E_{p_i} = E_{i_p},\quad E_{s_r} = E_{r_s},\ \text{etc} \qquad (43)$$

→ usamos la segunda forma. Tomamos $\hat{u}$ como la dirección de propagación de la onda plana, de modo que $\hat{E}_u = 0$ porque $\hat{u}\cdot\hat{E} = 0$ (ec. 34), pero $\hat{E}_p$ y $\hat{E}_s$ son arbitrarios, tal que:

$$\hat{E} = \hat{E}_p\,\hat{p} + \hat{E}_s\,\hat{s} \qquad (44)$$

donde el vector unitario $\hat{p}$ se elige en cualquier dirección $\perp$ a $\hat{u}$.

→ En (44) las componentes complejas $\hat{E}_p$ y $\hat{E}_s$ se pueden expresar en forma polar, tal que:

$$\hat{E}_p = E_p e^{i\phi_p} \qquad (45) \text{ y} \qquad \hat{E}_s = E_s e^{i\phi_s} \qquad (46)$$

↳ por ejemplo, $\hat{E}_s e^{-i(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r})} = E_s e^{-i(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r} - \phi_s)}$ (47)

en la que ϕ_s representa la fase de la componente del campo E en la dirección $\hat{s}$.

Podemos escribir: $\phi_p - \phi_s = \phi$ y $\phi_s = 0$ significa que hemos elegido adecuadamente el origen del tiempo.

$$\hat{E} = E_p e^{i\phi} \hat{p} + E_s \hat{s} \quad (48)$$

y con la ec (18)

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = E_p \hat{p}\, e^{-i(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r} - \phi)} + E_s \hat{s}\, e^{-i(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r})} \quad (49)$$

Tomando la parte real, tenemos:

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = E_p \hat{p} \cos(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r} - \phi) + E_s \hat{s} \cos(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r}) \quad (50)$$

donde E_p y E_s son amplitudes reales y que oscilan fuera de fase en un ángulo ϕ; esto significa, que en cualquier punto dado $\vec{r}$, el máximo de E en la dirección $\hat{p}$ puede alcanzarse en un tiempo distinto al máximo de E en la dirección $\hat{s}$.

→ consideremos algunos casos especiales, para el punto $\vec{r} = 0$

i) Que $\phi = 0 \Rightarrow$ de (50) $\Rightarrow$ $\vec{E}(0,t) = (E_p \hat{p} + E_s \hat{s}) \cos \omega t$ (51)

de (51) vemos que $-\sqrt{E_p^2 + E_s^2} \le |E| \le \sqrt{E_p^2 + E_s^2}$ (52) y siempre oscilando a lo largo de la dirección $E_p \hat{p} + E_s \hat{s}$. (53) Este caso se denomina POLARIZACIÓN LINEAL.

Si $E_p = 0$ ó $E_s = 0$ también tenemos una polarización lineal y que corresponde a ϕ indefinido.

ii) Para $\phi = \pi \Rightarrow$ $\vec{E}(0,t) = (-E_p \hat{p} + E_s \hat{s}) \cos \omega t$ (54) nuevamente es una polarización lineal.

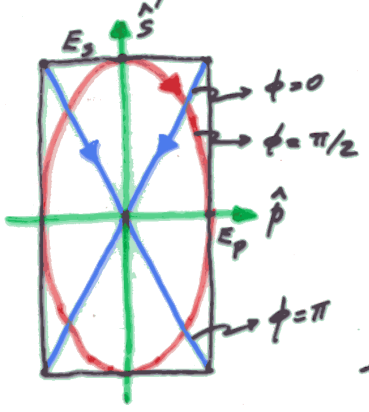


Fig. (A)

iii) Para $\phi = \pi/2$

$$\vec{E}(0,t) = E_p \hat{p} \cos(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r} - \pi/2) + E_s \hat{s} \cos(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r})$$

$$= E_p \hat{p} \operatorname{sen} \omega t + E_s \hat{s} \cos \omega t \quad (55)$$

$$E^2 = E_p^2 \operatorname{sen}^2 \omega t + E_s^2 \cos^2 \omega t \quad (56)$$

∴ la punta del vector E describe una trayectoria elíptica en el sentido de las agujas del reloj, denominada POLARIZACIÓN ELÍPTICA DEXTRÓGIRA o [illegible]

iv) Para $\phi = -\pi/2$, la trayectoria es la misma que iii) pero contraria al sentido de la aguja del reloj, y se denomina POLARIZACIÓN ELÍPTICA LEVÓGIRA o a IZQUIERDAS.

v) Para $\phi = \pm \pi/2$ y $E_p = E_s$, tenemos POLARIZACIÓN CIRCULAR (a derecha o a izquierda).

→ La amplitud compleja del vector B está dada por la ec (36)

$$\hat{B} = \frac{n}{c}\, \hat{u} \times \hat{E} \qquad (36)$$

$$\vec{E} \cdot \hat{B} = \frac{n}{c}\, \vec{E} \cdot (\hat{u} \times \vec{E}) = \frac{n}{c}\, \hat{u} \cdot (\vec{E} \times \vec{E}) = 0 \qquad (57)$$

Si $\vec{E} = \vec{E}(0,t) = E_p \hat{p} \cos(\omega t - \phi) + E_s \hat{s} \cos \omega t$ (58) para la parte real, y si $\vec{B}(0,t)$ es la parte real de $\vec{B} e^{-i\omega t}$ y con la ec. (36)

$$\vec{B} = \frac{n}{c}\, \hat{u} \times \left(E_p \hat{p} \cos(\omega t - \phi) + E_s \hat{s} \cos \omega t \right)$$

$$= \left(\frac{n}{c}\right) \left[E_p \hat{s} \cos(\omega t - \phi) - E_s \hat{p} \cos \omega t \right] \qquad (59)$$

de (58) y (59) vemos que $\vec{E} \cdot \vec{B} = 0 \Rightarrow$ los vectores reales E y B son perpendiculares en cada instante. También

$Re\, \hat{E} = \vec{E}(0,0)$ y $Re\, \hat{B} = \vec{B}(0,0) \Rightarrow$

$$\vec{E}(0,0) \cdot \vec{B}(0,0) = -E_p \left(\frac{n}{c}\right) E_s \cos(-\phi) + E_s \left(\frac{n}{c}\right) E_p \cos(-\phi)$$

$$= 0 \Rightarrow$$ las partes reales de $\hat{E}$ y $\hat{B}$ son perpendiculares.

→ La trayectoria de la punta del vector B es la misma que la de la figura (A), girada 90° en sentido contrario a de las agujas del reloj.

17.3 DENSIDAD Y FLUJO DE ENERGÍA

→ Se ha utilizado expresiones complejas para los campos E y B porque las ecuaciones de Maxwell son ecuaciones lineales que son satisfechas separadamente por la parte real e imaginaria de una solución compleja.

→ La expresión:

$$u = \frac{1}{2}\left(\vec{E}\cdot\vec{D} + \vec{B}\cdot\vec{H}\right) \quad (1)$$

para la densidad de energía y:

$$\vec{S} = \vec{E}\times\vec{H} \quad (2)$$

para el flujo de energía por unidad de área, no son lineales en los campos y antes de hacer las multiplicaciones se debe de tomar las parte reals.

→ Tomando un valor representativo como $\vec{r}=0$, ya que el origen es arbitrario, de las ecuaciones (58) y (59) de la sección 17.2 tenemos:

de (58) → $E^2 = E_p^2 \cos^2(\omega t - \phi) + E_s^2 \cos^2\omega t$ (3)

de (59) → $B^2 = \left(\frac{n}{c}\right)^2 \underbrace{\left[E_p^2 \cos^2(\omega t-\phi) + E_s^2 \cos^2\omega t\right]}_{E^2}$ (4)

$= \left(\frac{n}{c}\right)^2 E^2 = \varepsilon\mu_0 E^2$ (5) $\quad c^2 = \frac{1}{\varepsilon_0\mu_0}$, $n^2 = K = \varepsilon/\varepsilon_0$

Como $\vec{D} = \varepsilon\vec{E}$ (6) y $\vec{B} = \mu_0\vec{H}$ (7) ⇒ los campos eléctrico y magnético tienen una contribución igual a la densidad de energía u:

o sea $\vec{B}\cdot\vec{H} = \vec{D}\cdot\vec{E}$ (8)

(8) en (2) $u = \frac{1}{2}\left(\vec{E}\cdot\vec{D} + \vec{B}\cdot\vec{H}\right) = \frac{1}{2}\left(2\,\vec{E}\cdot\vec{D}\right) = \varepsilon E^2$

$$\boxed{u = \frac{1}{\mu_0}\left(\frac{n}{c}\right)^2 E^2} \quad (9)$$

Además, $\vec{E}\times\vec{H} = EH\,\hat{n}$ ⇒ el vector de Poynting apunta en la dirección de propagación, con magnitud

$$\boxed{S = |\vec{S}| = |\vec{E}\times\vec{H}| = |EH\hat{n}| = \frac{1}{\mu_0}\frac{n}{c}E^2} \quad (10)$$

combinando (9) y (10)

$$S = \frac{c}{n} u \qquad (11)$$

(independiente del valor particular del campo E)

→ Si escribimos la velocidad de fase de la onda plana como un vector en la dirección de propagación, de magnitud

$$v_p = \frac{c}{n} \quad (12) \Rightarrow \quad \vec{S} = u \vec{v}_p \qquad (13)$$

La Ec. (13) es análoga a: $\vec{J} = \rho \vec{v}$ (14) que define la densidad de corriente eléctrica convectiva. Esta analogía refuerza la interpretación de $\vec{S}$ como una densidad de corriente de energía, es decir, una densidad de energía u que se transporta con la velocidad de fase $\vec{v}_p$ de la onda plana.

→ La dependencia temporal de u y S está dada por E^2 en la ec. (3) y depende de la polarización de la onda.

Para una polarización circular ($\phi = \pm \pi/2$), tenemos en (3)

$$E^2 = E_p^2 \cos^2(\omega t \pm \pi/2) + E_p^2 \cos^2 \omega t$$
$$= E_p^2 [\sin^2 \omega t + \cos^2 \omega t] = E_p^2 \qquad (15)$$

o sea es constante en el tiempo.

Para una polarización lineal ($\phi = 0, \pi$)

$$E^2 = E_p^2 \cos^2 \omega t + E_s^2 \cos^2 \omega t = (E_p^2 + E_s^2) \cos^2 \omega t \qquad (16)$$

varía entre cero y un máximo el doble de la frecuencia de la onda.

Para altas frecuencias, la dependencia respecto al tiempo no es mensurable, por lo que se necesita hacer un promedio temporal de E^2 y como $\overline{\cos^2(\omega t - \phi)} = 1/2$ en un periodo, para cualquier polarización tenemos:

$$\overline{E^2} = \frac{1}{2}(E_p^2 + E_s^2) \qquad (17)$$

TEOREMA: Si $f = f_0 e^{i\omega t}$ y $g = g_0 e^{i\omega t}$, donde f_0 y g_0 pueden depender de otras variables pero no del tiempo, entonces:

$$\overline{\mathrm{Re}\, f\, \mathrm{Re}\, g} = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\, f^* g \qquad (18)$$

Demostración:

El promedio temporal está definido por: $\bar{w} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T w(t)\,dt$ (19)

Sea $f_0 = u + iv$ y (20)

$g_0 = \xi + i\eta$ (21)

$$\Rightarrow \mathrm{Re}\, f\, \mathrm{Re}\, g = \mathrm{Re}(u+iv)e^{i\omega t}\,\mathrm{Re}(\xi+i\eta)e^{i\omega t}$$

$$= (u\cos\omega t - v\,\mathrm{sen}\,\omega t)(\xi\cos\omega t - \eta\,\mathrm{sen}\,\omega t) \qquad (22)$$

$$\mathrm{Re}\, f^* g = \mathrm{Re}\left[(u+iv)e^{-i\omega t}(\xi+i\eta)e^{i\omega t}\right]$$

$$= u\xi + v\eta \qquad (23)$$

Teniendo en cuenta los siguientes integrales:

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T \mathrm{sen}^2\omega t\,dt = \frac{1}{2} \qquad (24)$$

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T \cos^2\omega t\,dt = \frac{1}{2} \qquad (25)$$

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T \mathrm{sen}\,\omega t\cos\omega t\,dt = 0 \qquad (26)$$

luego $\overline{\mathrm{Re}\, f\, \mathrm{Re}\, g} = \overline{u\xi\cos^2\omega t - u\eta\cos\omega t\,\mathrm{sen}\,\omega t - v\xi\,\mathrm{sen}\,\omega t\cos\omega t + v\eta\,\mathrm{sen}^2\omega t}$ (los términos cruzados $\to 0$)

$$= \frac{1}{2}(u\xi + v\eta) \qquad (27)$$

$$\overline{\mathrm{Re}\, f^* g} = \overline{u\xi + v\eta} = u\xi + v\eta \qquad (28)$$

(28) en (27) $\Rightarrow$

$$\overline{\mathrm{Re}\, f\, \mathrm{Re}\, g} = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\, f^* g \quad //$$

Por ejemplo en ec(17) $\overline{E^2} = \frac{1}{2}(E_p^2 + E_s^2)$, usando la ec(18) sería

$$\overline{E^2} = \frac{1}{2}\mathrm{Re}(\vec{E}^*\cdot\vec{E}) = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left\{\left[E_p\hat{p}\,e^{+i(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r}-\phi)} + E_s\hat{s}\,e^{i(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r})}\right]\cdot\left[E_p\hat{p}\,e^{-i(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r}-\phi)} + E_s\hat{s}\,e^{-i(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r})}\right]\right\}$$

$$= \frac{1}{2}\mathrm{Re}(E_p^2 + E_s^2) = \frac{1}{2}(E_p^2 + E_s^2) \quad //$$

17.4 ONDAS PLANAS MONOCROMÁTICAS EN MEDIOS CONDUCTORES

Partimos nuevamente de las ecuaciones de Maxwell, estas:

$$\nabla \cdot \vec{D} = 0 \quad (a), \qquad \nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad (b), \qquad \nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (c) \text{ y}$$

$$\nabla \times \vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + g\vec{E} \quad (d) \qquad (1)$$

La ecuación de onda, para un medio libre de carga, fue visto en la sección 16.4 y está dada por:

$$\nabla^2 \vec{E} - \varepsilon\mu \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} - g\mu \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = 0 \qquad (2) \quad \left(\begin{array}{c}\text{Ecuación del}\\ \text{Telegrafo}\end{array}\right)$$

en la que cada componente rectangular de $\vec{E}$ debe satisfacer la ecuación de onda.

Utilizamos la técnica de SEPARACIÓN DE VARIABLES /

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = R(\vec{r})\,T(t) \qquad (3)$$

(3) en (2)

$$\nabla^2\left(R(\vec{r})T(t)\right) - \varepsilon\mu \frac{\partial^2\left(R(\vec{r})T(t)\right)}{\partial t^2} - g\mu \frac{\partial\left(R(\vec{r})T(t)\right)}{\partial t} = 0$$

$$\left(\nabla^2 R(\vec{r})\right)T(t) - \varepsilon\mu\, R(\vec{r}) \frac{\partial^2 T(t)}{\partial t^2} - g\mu\, R(\vec{r}) \frac{\partial T(t)}{\partial t} = 0$$

dividiendo por $R(\vec{r})T(t)$ y colocando derivadas totales $\Rightarrow$

$$\underbrace{\frac{\nabla^2 R(\vec{r})}{R(\vec{r})}}_{\text{solo depende de } \vec{r}} - \underbrace{\varepsilon\mu \frac{1}{T(t)} \frac{d^2 T(t)}{dt} - g\mu \frac{1}{T(t)} \frac{dT(t)}{dt}}_{\text{solo depende de } t} = 0 \qquad (4)$$

eligiendo a A como la constante de separación de variable, tenemos:

$$\frac{\nabla^2 R}{R} = A \Rightarrow \nabla^2 R + AR = 0 \qquad (5)$$

$$\varepsilon\mu \frac{1}{T} \frac{d^2 T}{dt^2} + g\mu \frac{1}{T} \frac{dT}{dt} = A \Rightarrow \varepsilon\mu \frac{d^2 T}{dt^2} + g\mu \frac{dT}{dt} + AT = 0 \qquad (6)$$

Tratando la ec. 3 como un complejo, luego:

$$\hat{E}(\vec{r},t) = \hat{R}(r)\,\hat{T}(t) \qquad (7)$$

La ec (6) corresponde a una ecuación ordinaria de segundo orden con coeficientes constantes, con solución dada por:

$$\hat{T} = \hat{T}_1 e^{-i\hat{\omega}_1 t} + \hat{T}_2 e^{-i\hat{\omega}_2 t} \qquad (8)$$

siendo $\hat{\omega}_1$ y $\hat{\omega}_2$ las soluciones de la ecuación característica dada por:

$$\varepsilon\mu\hat{\omega}^2 + i g \mu \hat{\omega} - \hat{A} = 0 \qquad (9)$$

La ec. (5) corresponde a una ecuación diferencial parcial, denominada ecuación de HELMHOLZ, que tiene un gran conjunto de soluciones, de los cuales elegimos, los que pueden dar ó formar soluciones del tipo de onda plana, o sea:

$$\hat{R}(\vec{r}) = e^{i(\pm i \hat{k}\cdot\vec{r})} \qquad (10) \quad \text{y} \quad \hat{k}\cdot\hat{k} = \hat{A} \qquad (11)$$

(11) en (9), tenemos:

$$\varepsilon\mu\hat{\omega}^2 + i g \mu \hat{\omega} - \hat{k}\cdot\hat{k} = 0 \qquad (12)$$

la ec (12) elige que $\hat{k}$ y $\hat{\omega}$ deben ser imaginarios, pero hay caso en la que una de ellas sea real.

Las ondas monocromáticas, en particular, corresponden a los valores reales de ω, luego restringiendo nuestro conjunto de soluciones, escribimos:

$$\hat{E}(\vec{r},t) = \hat{E}\, e^{i(\hat{k}\cdot\vec{r} - \omega t)} \qquad (13)$$

en la que $\hat{k}$ y ω satisfacen la ecuación siguiente:

$$\varepsilon\mu\omega^2 + i g \mu \omega - \hat{k}\cdot\hat{k} = 0 \qquad (14)$$

→ En la ecuación (13); la solución armónica ya se había considerado para el caso de un medio no conductor, la diferencia radica en que $\hat{k}$ ahora es un vector complejo.

→ La ec. (14) es la RELACIÓN DE DISPERSIÓN general para ondas planas monocromáticas en un medio isótropo homogéneo y lineal.

→ En la ec.(14), si la conductividad $g \neq 0$ y $\omega \in \mathbb{R}$, requiere que $\hat{k}$ sea complejo y las partes real e imaginaria de $\hat{k}$ no sean perpendiculares.

→ Tanto las ecuaciones de Maxwell como la ecuación de onda deben satisfacerse, quedando, para un medio no magnético $\mu = \mu_0$, como:

$$\nabla \cdot \vec{D} = 0 \Rightarrow \nabla \cdot (\varepsilon \vec{E}) = 0 \Rightarrow K \hat{k} \cdot \hat{E} = 0 \quad (15)$$

en la que $K = \varepsilon/\varepsilon_0$ y $\nabla \to i\hat{k}$ y $\frac{\partial}{\partial t} \to -i\omega$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \Rightarrow \hat{k} \cdot \hat{B} = 0 \quad (16)$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \Rightarrow \hat{k} \times \hat{E} = \omega \hat{B} \quad (17)$$

$$\nabla \times \vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + g\vec{E} \Rightarrow \hat{k} \times \hat{B} = -\frac{\omega}{c^2} K \hat{E} - i g \mu_0 \hat{E} = -\frac{\omega}{c^2} \hat{K} \hat{E} \quad (18)$$

En (18) se ha definido la CONSTANTE DIELÉCTRICA COMPLEJA, como:

$$\boxed{\hat{K} \equiv K + i\frac{g}{\varepsilon_0 \omega}} \quad (19)$$

que nos conduce a definir el ÍNDICE DE REFRACCIÓN COMPLEJO como:

$$\hat{m}^2 \equiv \hat{K} \quad (20) \text{ tal que:}$$

$$\hat{k} \cdot \hat{k} = \sqrt{\hat{K}}\frac{\omega}{c} \cdot \sqrt{\hat{K}}\frac{\omega}{c} = \hat{K}\frac{\omega^2}{c^2}$$

$$\boxed{\hat{k} \cdot \hat{k} = \hat{m}^2 \frac{\omega^2}{c^2}} \quad (21)$$

combinando (19), (20) y (21)

$$\hat{K} = \left(K + i\frac{g}{\varepsilon_0 \omega}\right) = \frac{c^2}{\omega^2} \hat{k} \cdot \hat{k}$$

$$K\frac{\omega^2}{c^2} + i\frac{g\omega^2}{\varepsilon_0 \omega c^2} - \hat{k} \cdot \hat{k} = 0 \quad \text{con} \quad \frac{1}{c^2} = \mu_0 \varepsilon_0$$

$$\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}\omega^2(\mu_0 \varepsilon_0) + i\frac{g\omega^2 \mu_0 \varepsilon_0}{\varepsilon_0 \omega} - \hat{k} \cdot \hat{k} = 0$$

$$\boxed{\varepsilon \mu_0 \omega^2 + i g \mu_0 \omega - \hat{k} \cdot \hat{k} = 0}$$

que es la ecuación (14) con $\mu = \mu_0$.

→ Si $\hat{k} = \hat{k}_r + i\hat{k}_i$ (22) (Vector de propagación complejo)

luego $\vec{E}$ y $\vec{B}$ toman la forma:

$$\vec{E}(\vec{r},t) = \hat{E}\, e^{i(\hat{k}\cdot\vec{r} - \omega t)}$$

$$= (\hat{E}\, e^{-\hat{k}_i\cdot\vec{r}})\, e^{-i(\omega t - \hat{k}_r\cdot\vec{r})} \quad (23)$$

$$\vec{B}(\vec{r},t) = (\hat{B}\, e^{-\hat{k}_i\cdot\vec{r}})\, e^{-i(\omega t - \hat{k}_r\cdot\vec{r})} \quad (24)$$

→ Esta solución corresponde a una onda plana que se propaga en la dirección $\hat{k}_r$, con $\lambda = 2\pi/k_r$ (25) y en lugar de tener una amplitud constante, esta decrece y con mayor rapidez en la dirección $\hat{k}_i$.

Las superficies de fase constante son planos perpendiculares a la dirección de propagación $\hat{k}_r$. Existen también superficies de amplitud constante que son planos perpendiculares a $\hat{k}_i$.

→ Si el índice de refracción complejo $\hat{n}$, lo escribimos como:

$$\hat{n} = n + ik \quad (26)$$

permiten estudiar la velocidad de fase y la longitud de atenuación de la onda. Las constantes reales n y k se llaman CONSTANTES ÓPTICAS.

→ La RELACIÓN DE DISPERSIÓN para un medio conductor es:

$$\hat{k} = \hat{n}\,\omega/c \quad (27)$$

y el escalar $\hat{k}$ es definido como:

$$\hat{k} = \sqrt{\hat{k}\cdot\hat{k}} = \sqrt{k_r^2 - k_i^2 + 2i\,\hat{k}_r\cdot\hat{k}_i} \quad (28)$$

(vector complejo)

→ Suponemos que $\hat{k}_r$ y $\hat{k}_i$ tienen la misma dirección, estas ondas se llaman ONDAS HOMOGÉNEAS o UNIFORMES, y es válida para el caso de una onda plana que penetra en un medio conductor con incidencia normal al plano de la superficie

de separación.

Luego $\hat{\vec{k}} = (k_r + i k_i)\vec{u} = \hat{k}\vec{u}$ (29)

donde $\vec{u}$ es un vector unitario real en la dirección común de $\hat{\vec{k}}_r$ y $\hat{\vec{k}}_i$.

Como $\vec{u}$ es real, las ecuaciones:

$$\vec{u}\cdot\hat{\vec{E}} = 0 \quad \text{y} \quad \vec{u}\cdot\hat{\vec{B}} = 0 \qquad (30)$$

es decir los vectores $\vec{E}$ y $\vec{B}$ son perpendiculares a la dirección de propagación $\vec{u}$.

Como $\hat{\vec{B}} = \frac{n}{c}\vec{u}\times\hat{\vec{E}} \Rightarrow \hat{\vec{B}} = \frac{\hat{n}}{c}\vec{u}\times\hat{\vec{E}}$ (31)

$\hat{n}$ indica que $\vec{E}$ y $\vec{B}$ no están en fase entre sí y los vectores reales E y B no son perpendiculares entre sí, excepto para la polarización lineal.

Como $\hat{n} = n + iK$ (26) y $\hat{k} = \hat{n}\,\omega/c$ (27) $\Rightarrow$

$$k_r = n\frac{\omega}{c} \quad (32) \quad \text{y} \quad k_i = K\frac{\omega}{c} \qquad (33)$$

Si $\vec{u}\cdot\vec{r} = \xi$ en (23)

$$\vec{E}(\vec{r},t) = (\hat{E}\, e^{-\hat{k}_i\cdot\vec{r}})\, e^{-i(\omega t - \hat{k}_r\cdot\vec{r})}$$

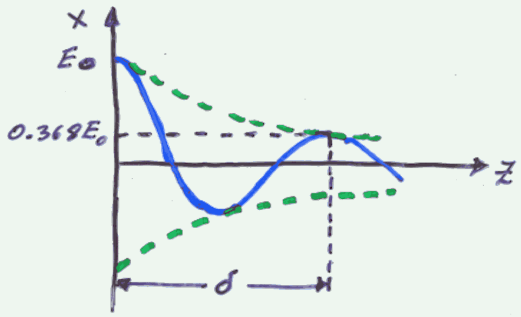
$$\vec{E}(\vec{r},t) = \left(\hat{\vec{E}}\, e^{-K\omega\xi/c}\right) e^{-i\omega(t - n\xi/c)} \qquad (34)$$

$\Rightarrow$ la onda se propaga con una velocidad de fase c/n y una constante de atenuación $\frac{K\omega}{c}$, que determina con qué rapidez decae la amplitud del campo oscilante con la distancia.

Podemos definir la PROFUNDIDAD DE PENETRACIÓN, por

$$\boxed{\delta = \frac{c}{K\omega}} \qquad (35)$$

y mide la distancia en el interior del medio a la que decae el campo a $1/e$ de su valor en un punto dado, o sea alrededor de 37% ($e^{-1} = 0.368$)



→ Para un medio no conductor, $K=0$, la profundidad de penetración $\delta \to$ infinita.

→ como λ en el medio es dado por:

$$\lambda = \frac{2\pi c}{n\omega} \Rightarrow \quad (36)$$

$$\delta = \frac{n\lambda}{K\,2\pi} \qquad (37)$$

→ Si un material donde K es comparable en magnitud con n, la onda decae "casi" una longitud de onda.

→ Si $K \ll n$, como en un dieléctrico imperfecto de conductividad pequeña, la onda se propaga muchas longitudes de onda sin pérdida significativa, entonces diremos que el material es TRANPARENTE.

→ Cuando $\vec{K}_r$ y $\vec{K}_i$ tienen diferentes direcciones, los campos E y B reales no tienen que ser perpendiculares a $\vec{K}_r$ (ni a $\vec{K}_i$), aunque la onda aún se llama "transversal" si $\hat{K} \neq 0$, $\vec{K}\cdot\hat{E}=0$ y $\vec{K}\cdot\hat{B}=0$. Para este caso λ y δ dependen de las constantes del material n y K en una forma más complicada que las ec. (36) y (37).

De $\hat{n} = n + iK$ y $\hat{K} = K + \frac{i\sigma}{\varepsilon_0\omega}$ y $\hat{K} = \hat{n}^2$

escribiendo $\hat{K} = K_r + iK_i$ donde $K = K_r$ e (38)

$K_i = \sigma/\varepsilon_0\omega$ (39)

con $\hat{n}^2 = n^2 - K^2 + 2inK = K_r + iK_i$ (40)

$\Rightarrow$

$$K_r = n^2 - k^2 \quad y \qquad (41)$$

$$K_i = 2nk \qquad (42)$$

resolviendo para n y k, tenemos:

$$n = \sqrt{\frac{1}{2}\left[K_r + \sqrt{K_r^2 + K_i^2}\right]} \qquad (43)$$

$$k = \sqrt{\frac{1}{2}\left[-K_r + \sqrt{K_r^2 + K_i^2}\right]} \qquad (44)$$

(se escogen las raíces positivas para que n y k sean reals y positivos).

→ de (39) $K_i = \sigma/\varepsilon_0\omega > 0$ y como $\vec{J}\cdot\vec{E} = \sigma E^2 > 0$

⇒ K_i siempre representa una pérdida de energía

$K_r = K$ puede ser positiva o negativa. Para un medio no conductor y campos estáticos $\varepsilon > 1$.
Para campos alternantes en metales puede ser < 1, 0 ó $(-)$.

Las ecuaciones 43 y 44 pueden tener aproximaciones:

① $K_i << |K_r|$, $K_r > 0$ $\left(\omega >> \frac{\sigma}{\varepsilon}\right)$ ⇒

$$n \cong \sqrt{K_r}, \quad k = K_i/2n << n \qquad (45)$$

corresponde para un buen material aislante hasta frecuencias muy bajas. Para un aislante perfecto con $\sigma = 0$ ⇒ $n = \sqrt{K}$ como en el caso de un medio no conductor.

② $K_i << |K_r|$, $K_r < 0$ $\left(\omega >> \sigma/\varepsilon\right)$

$$k \cong \sqrt{-K_r}, \quad n = K_i/2k << k \qquad (46)$$

válida para metales en la parte infrarroja superior del espectro de frecuencias.

③ $K_i >> |K_r|$ $\left(\omega << \frac{\sigma}{|\varepsilon|}\right)$

$$n \cong k \cong \sqrt{K_i/2} \qquad (47)$$

válida para metales a frecuencias de microondas y más bajas.

(aquí en ② y ③ $\omega \approx 1/\tau$, donde τ es el tiempo entre colisiones

de los electrones libres. Para metales puros a $T = 300K$ $\gamma \cong 10^{-14}$ seg.

→ Para problemas eléctricos en los que δ es importante se aplica el caso (3) y la ecuación $\delta = \frac{M}{K}\frac{\lambda}{2\pi}$ muestra que la "onda" es atenuada muy fuertemente en términos de λ, pero en términos de la distancia absoluta $\delta = \frac{c}{K\omega}$ se transforma en:

$$\delta \cong \frac{c}{\omega}\sqrt{\frac{2}{K_i}} = \sqrt{\frac{2}{\mu_0 \omega \gamma}} \qquad (48)$$

cuando $\omega \to 0 \Rightarrow \delta \to \infty$ y concuerda con nuestros resultados anteriores acerca de que $\vec{E}$ y $\vec{J}$ son uniformes en un conductor para c.d (corriente directa) y también aproximadamente, para una corriente de 60 Hz.

Para altas frecuencias δ se hace muy pequeña dentro del intervalo de validez de la ec. (48).

Valores de δ para el cobre con $\gamma = 5.8 \times 10^7$ mhos/m* $\mu = \mu_0$, $\delta = 66.1/\sqrt{f}$ en mm.

FRECUENCIA (Hz)	10	60	100	500	10^4	10^8	10^{10}
δ (mm)	20.8	8.6	6.6	2.99	0.66	6.6×10^{-3}	6.6×10^{-4}
					ONDAS RADIO	FM TV	MICROONDAS RADAR

* Un Siemens (S) es el recíproco de un ohm; es una unidad de conductancia o resistencia recíproca. El Siemens se llamaba anteriormente mho

Para $m \neq 0$ las funciones se dan en la tabla 17.1

Tabla 17.1 Polinomios asociados de Legendre, $P_\ell^m(u)$, siendo $u = \cos\theta$

Designación	**Función**
$P_0(u)$	1
$P_1(u)$	$u = \cos\theta$
$P_1^1(u)$	$(1-u^2)^{1/2} = \operatorname{sen}\theta$
$P_2(u)$	$\frac{1}{2}(3u^2-1) = \frac{1}{4}(3\cos 2\theta + 1)$
$P_2^1(u)$	$3u(1-u^2)^{1/2} = \frac{3}{2}\operatorname{sen} 2\theta$
$P_2^2(u)$	$3(1-u^2) = \frac{3}{2}(1-\cos 2\theta)$
$P_3(u)$	$\frac{1}{2}(5u^3-3u)$
$P_3^1(u)$	$\frac{3}{2}(1-u^2)^{1/2}(5u^2-1)$
$P_3^2(u)$	$15u(1-u^2)$
$P_3^3(u)$	$15(1-u^2)^{3/2}$

Finalmente, debemos considerar la ecuación de la parte radial, en la que debemos de hacer un cambio de variable de r por $\xi = \kappa r$, resultando:

$$\frac{d}{dr} r^2 \frac{dR_\ell}{dr} - \left[\ell(\ell+1) - \kappa^2 r^2\right] R_\ell = 0 \qquad (73)$$

$$\frac{d}{d\kappa r} \kappa^2 r^2 \frac{dR_\ell}{d\kappa r} - \left[\ell(\ell+1) - \kappa^2 r^2\right] R_\ell = 0$$

$$\frac{d}{d\xi} \xi^2 \frac{d}{d\xi} R_\ell - \left[\ell(\ell+1) - \xi^2\right] R_\ell = 0\,. \qquad (74)$$

En la ecuación (74) haremos la sustitución $R_\ell = \xi^{-1/2} Z_\ell$, luego:

$$\frac{d}{d\xi}\xi^2\frac{d}{d\xi}(\xi^{-1/2}Z_\ell)-\left[\ell(\ell+1)-\xi^2\right]\xi^{-1/2}Z_\ell=0$$

$$\frac{d}{d\xi}\xi^2\left[\xi^{-1/2}\frac{dZ_\ell}{d\xi}-\frac{1}{2}\xi^{-3/2}Z_\ell\right]-\left[\ell(\ell+1)-\xi^2\right]\xi^{-1/2}Z_\ell=0$$

$$\frac{d}{d\xi}\left[\xi^{-3/2}\frac{dZ_\ell}{d\xi}-\frac{1}{2}\xi^{+1/2}Z_\ell\right]-\left[\ell(\ell+1)-\xi^2\right]\xi^{-1/2}Z_\ell=0$$

$$\xi^{3/2}\frac{d^2Z_\ell}{d\xi^2}+\frac{3}{2}\xi^{1/2}\frac{dZ_\ell}{d\xi}-\frac{1}{2}\left[\xi^{1/2}\frac{dZ_\ell}{d\xi}+\frac{1}{2}\xi^{-1/2}Z_\ell\right]-\left[\ell(\ell+1)-\xi^2\right]\xi^{-1/2}Z_\ell=0$$

multiplicando por $\xi^{1/2}$, tenemos:

$$\xi^2\frac{d^2Z_\ell}{d\xi^2}+\frac{3}{2}\xi\frac{dZ_\ell}{d\xi}-\frac{1}{2}\xi\frac{dZ_\ell}{d\xi}-\frac{1}{4}Z_\ell-\left[\ell(\ell+1)-\xi^2\right]Z_\ell=0$$

$$\xi^2\frac{d^2Z_\ell}{d\xi^2}+\xi\frac{dZ_\ell}{d\xi}-\left[\ell^2+\ell+\frac{1}{4}-\xi^2\right]Z_\ell=0$$

Finalmente, tenemos:

$$\xi^2\frac{d^2Z_\ell}{d\xi^2}+\xi\frac{d^{\cdot\cdot}Z_\ell}{d\xi}-\left[(\ell+\frac{1}{2})^2-\xi^2\right]Z_\ell=0 \qquad (75)$$

Esta es la ecuación de **Bessel** muy familiar en la física-matemática, cuyas soluciones son bien conocidas y son representadas por:

$J_{\ell+\frac{1}{2}}(\kappa r)$ funciones de **Bessel** de orden $\ell+\frac{1}{2}$

y

$N_{\ell+\frac{1}{2}}(\kappa r)$ funciones de **Neumann** de orden $\ell+\frac{1}{2}$.

Para propósitos de la ecuación de onda que nos interesa, es conveniente definir las **funciones esféricas de Bessel**, dadas por:

$$j_\ell(\kappa r) = \sqrt{\pi/2\kappa r}\,J_{\ell+1/2}(\kappa r), \qquad n_\ell(\kappa r) = \sqrt{\pi/2\kappa r}\,N_{\ell+1/2}(\kappa r); \quad (75)$$

y de éstas a su vez, obtenemos

$$h_\ell^{(1)}(\kappa r) = j_\ell(\kappa r) + i n_\ell(\kappa r) \qquad h_\ell^{(2)}(\kappa r) = j_\ell(\kappa r) - i n_\ell(\kappa r) \qquad (76)$$

Las funciones $j_\ell(\kappa r)$, $n_\ell(\kappa r)$, $h_\ell^{(1)}(\kappa r)$ y $h_\ell^{(2)}(\kappa r)$ son todas soluciones de la ecuación radial dada por la ecuación (71). Estas funciones están tabuladas para $\ell = 0$, 1 y 2 en la tabla 17.2.

Las h son particularmente convenientes para problemas de **radiación** (capítulo 20) porque para grandes valores de r se comportan como

$$h_\ell^{(1)}(\kappa r) \xrightarrow[\kappa r \to \infty]{} \frac{(-i)^{\ell+1} e^{i\kappa r}}{\kappa r}, \qquad (77)$$

$$h_\ell^{(2)}(\kappa r) \xrightarrow[\kappa r \to \infty]{} \frac{i^{\ell+1} e^{-i\kappa r}}{\kappa r}, \qquad (78)$$

y, por tanto, conducen a las ondas esféricas salientes y entrantes.

Tabla 17.2 Funciones de Neumann y esféricas de Bessel,

Tipo	**Función**
$j_0(\rho)$	$(1/\rho)\operatorname{sen}\rho$
$n_0(\rho)$	$-(1/\rho)\cos\rho$
$h_0^{(1)}(\rho)$	$-(i/\rho)e^{i\rho}$
$h_0^{(2)}(\rho)$	$(i/\rho)e^{-i\rho}$
$j_1(\rho)$	$(1/\rho^2)\operatorname{sen}\rho - (1/\rho)\cos\rho$
$n_1(\rho)$	$-(1/\rho)\operatorname{sen}\rho - (1/\rho^2)\cos\rho$
$h_1^{(1)}(\rho)$	$-(1/\rho)e^{i\rho}(1 + i/\rho)$

$h_1^{(2)}(\rho)$	$-(1/\rho)e^{-i\rho}(1-i/\rho)$
$j_2(\rho)$	$\left[\frac{3}{\rho^3}-\frac{1}{\rho}\right]\text{sen}\rho-\frac{3}{\rho^2}\cos\rho$
$n_2(\rho)$	$-\frac{3}{\rho^2}\text{sen}\rho-\left[\frac{3}{\rho^3}-\frac{1}{\rho}\right]\cos\rho$
$h_2^{(1)}(\rho)$	$(i/\rho)e^{i\rho}\left(1+\frac{3i}{\rho}-\frac{3}{\rho^2}\right)$
$h_2^{(2)}(\rho)$	$-(i/\rho)e^{-i\rho}\left(1-\frac{3i}{\rho}-\frac{3}{\rho^2}\right)$

Una forma general de Ψ puede escribirse como

$$\Psi_{\ell m}=R_\ell(r)\Theta_{\ell m}(\theta)\Phi_m(\phi)$$

$$\Psi_{\ell m}=\sqrt{\pi/2\kappa r}Z_\ell(\kappa r)P_\ell^m(\cos\theta)e^{\mp im\phi} \qquad (79)$$

Los campos vectoriales correspondientes se calculan usando:

Para TE $\qquad \vec{E}=\vec{r}x\nabla\Psi \quad y \quad \vec{B}=-i\frac{1}{\omega}\nabla x(\vec{r}x\nabla\Psi) \qquad (80)$

Para TM $\qquad \vec{B}'=\frac{1}{c}\vec{r}x\nabla\Psi \quad y \quad \vec{E}'=\frac{ic}{\omega}\nabla x(\vec{r}x\nabla\Psi) \qquad (81)$

La elección mas sencilla de interés de Ψ es Ψ_{10}, dado por:

$$\Psi_{10}=\frac{1}{\kappa r}e^{i\kappa r}\left[1+\frac{i}{\kappa r}\right]\cos\theta \quad \text{con } \ell=1 \text{ y } m=0 \qquad (82)$$

$$\Psi_{10}=e^{i\kappa r}\left[\frac{1}{\kappa r}+\frac{i}{(\kappa r)^2}\right]\cos\theta \qquad (83)$$

Podemos calcular el gradiente en coordenadas esféricas

$$\nabla\Psi_{10} = \hat{r}\frac{\partial\Psi_{10}}{\partial r} + \hat{\theta}\frac{1}{r}\frac{\partial\Psi_{10}}{\partial\theta} + \hat{\phi}\frac{\partial\Psi_{10}}{\partial\phi} \tag{84}$$

$$\nabla\Psi_{10} = \hat{r}\left\{e^{i\kappa r}\left[-\frac{1}{\kappa r^2} - \frac{2i}{\kappa^2 r^3}\right] + i\kappa\left[\frac{1}{\kappa r} + \frac{i}{(\kappa r)^2}\right]\right\} +$$

$$\hat{\theta}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\left\{e^{i\kappa r}\left[\frac{1}{\kappa r} + \frac{i}{(\kappa r)^2}\right]\cos\theta\right\} + \hat{\phi}(0) \tag{85}$$

$$\nabla\Psi_{10} = \hat{r}e^{i\kappa r}\left[-\frac{1}{\kappa r^2} - \frac{2i}{\kappa^2 r^3} + \frac{i}{r} - \frac{1}{\kappa r^2}\right]\cos\theta + \hat{\theta}\frac{1}{r}\left\{e^{i\kappa r}\left[\frac{1}{\kappa r} + \frac{i}{(\kappa r)^2}\right](-\mathrm{sen}\theta)\right\}$$

$$\nabla\Psi_{10} = \hat{r}e^{i\kappa r}\left[\frac{i}{r} - \frac{2}{\kappa r^2} - \frac{2i}{\kappa^2 r^3} + \right]\cos\theta - \hat{\theta}e^{i\kappa r}\left[\frac{1}{\kappa r^2} + \frac{i}{\kappa^2 r^3}\right]\mathrm{sen}\theta \tag{86}$$

CALCULO DE LA PARTE ESPACIAL DE LOS CAMPOS $\vec{E}$ y $\vec{B}$

Para $\vec{E}$

$$\vec{E} = \vec{r}x\nabla\Psi_{10} = \hat{r}rx\nabla\Psi_{10}$$

$$= \hat{r}rx\left\{\hat{r}e^{i\kappa r}\left[\frac{i}{r} - \frac{2}{\kappa r^2} - \frac{2i}{\kappa^2 r^3}\right]\cos\theta - \hat{\theta}e^{i\kappa r}\left[\frac{1}{\kappa r^2} + \frac{i}{\kappa^2 r^3}\right]\mathrm{sen}\theta\right\}$$

$$= -\hat{r}x\hat{\theta}e^{i\kappa r}\left[\frac{1}{\kappa r} + \frac{i}{\kappa^2 r^2}\right]\mathrm{sen}\theta = = -\hat{\phi}E_0 e^{i\kappa r}\left[\frac{1}{\kappa r} + \frac{i}{(\kappa r)^2}\right]\mathrm{sen}\theta \tag{87}$$

$$= \hat{\phi}E_\phi,$$

donde $E_\phi = -E_0 e^{i\kappa r}\left[\frac{1}{\kappa r} + \frac{i}{(\kappa r)^2}\right]\mathrm{sen}\theta$ (88)

en la última parte se ha introducido E_0 para hacer que la ecuación sea dimensionalmente correcta. Las superficies de fases constantes (κr=constante) son esferas, pero las de amplitud constante no lo son.

Para $\vec{B}$

$$\vec{B} = -i\frac{1}{\omega}\nabla x\vec{E} = -\frac{i}{\omega}\left\{\left[\hat{r}\,\frac{1}{r\,sen\theta}\left(\frac{\partial(E_\phi sen\theta)}{\partial\theta} - \frac{\partial E_\theta}{\partial\phi}\right)\right] + \hat{\theta}\frac{1}{r}\left[\frac{1}{sen\theta}\frac{\partial E_r}{\partial\phi} - \frac{\partial(rE_\phi)}{\partial r}\right] + \right\}$$

$$+\ \hat{\phi}\frac{1}{r}\left[\frac{\partial(rE_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial E_r}{\partial\theta}\right]$$

$$= -\frac{i}{\omega}\left\{\left[\hat{r}\,\frac{1}{r\,sen\theta}\left(\frac{\partial(A\,sen^2\theta)}{\partial\theta}\right)\right] + \hat{\theta}\left(-\frac{1}{r}\right)\left[\frac{\partial\left(E_0 e^{i\kappa r}\left[\frac{1}{\kappa} + \frac{i}{\kappa^2 r}\right]sen\theta\right)}{\partial r}\right]\right\}$$

$$\text{con } A = -E_0 e^{i\kappa r}\left[\frac{1}{\kappa r} + \frac{i}{\kappa^2 r^2}\right] \qquad (89)$$

$$= -\frac{i}{\omega}\left\{\left[\hat{r}\,\frac{1}{r\,sen\theta}\left(A\,2sen\theta\cos\theta\right)\right] - \hat{\theta}\left(-\frac{1}{r}\right)E_0\left[e^{i\kappa r}\left(\frac{-i}{\kappa^2 r^2}\right)sen\theta + e^{i\kappa r}(i\kappa)\left(\frac{1}{\kappa} + \frac{i}{\kappa^2 r}\right)sen\theta\right]\right\}$$

reemplazando A, tenemos

$$= -\frac{i}{\omega}(-)\frac{1}{r}E_0 e^{i\kappa r}\left(\frac{1}{\kappa r} + \frac{i}{(\kappa r)^2}\right)2\cos\theta\hat{r} + \frac{i}{\omega}E_0 e^{i\kappa r}\left[-\frac{i}{\kappa^2 r^3} + \frac{i}{r} - \frac{1}{\kappa r^2}\right]sen\theta\hat{\theta}$$

$$\vec{B} = i\frac{1}{\omega}E_0 e^{i\kappa r}\left(\frac{1}{\kappa r^2} + \frac{i}{\kappa^2 r^3}\right)2\cos\theta\ \ \hat{r} - i\frac{1}{\omega}E_0 e^{i\kappa r}\left[\frac{i}{r} - \frac{1}{\kappa r^2} - \frac{i}{\kappa^2 r^3}\right]sen\theta\ \ \hat{\theta} \qquad (90)$$

Como veremos en el capítulo 20, estos son justamente los campos (TE) producidos por un **dipolo magnético que irradia**.

Es interesante observar que solo las partes de $\vec{E}$ y $\vec{B}$ que son proporcionales a $1/r$ **contribuyen a la radiación neta**. Todos los demás términos dan términos en el vector de Poynting que caen mucho más rápidamente que $1/r^2$ y, en consecuencia, tienen

integrales que se anulan sobre superficies esféricas a medida que los radios de estas superficies esféricas tienden hacia infinito.

Las soluciones de la onda esférica son particularmente importantes al considerar la radiación procedente de fuentes acotadas, que se tratará en el capítulo 20.