Universidad Nacional de San Cristóbal de Huamanga

Escuela Profesional de Matemática y Física

Electromagnetismo
Capítulo VIII

Propiedades Magnéticas de la Materia

Wilmer Moncada Sosa
Wilmer.moncada@unsch.edu.pe

CAPITULO 9

PROPIEDADES MAGNÉTICAS DE LA MATERIA

- SE ESTUDIA LA INFLUENCIA DE LA MATERIA SOBRE EL CAMPO MAGNÉTICO.

- LA MATERIA ESTÁ CONSTITUIDA POR ÁTOMOS q' CONTIENEN ELECTRONES EN MOVIMIENTO. ESTOS ELECTRONES CONFINADOS EN UN SOLO ATOMO FORMA CORRIENTES ATÓMICAS.

- TENEMOS DOS CLASES DE CORRIENTES:

  i) LA CORRIENTE CONVENCIONAL, q' CONSISTE DE CARGAS q' SE TRANSPORTAN o sea de electrones libres en movimiento o de iones cargados.

  ii) DE CORRIENTES ATÓMICAS, q' SON PURAMENTE CORRIENTES CIRCULATORIAS y no da lugar a transporte de Cargas.

- ESTAS DOS CLASES DE CORRIENTES PUEDEN PRODUCIR CAMPOS MAGNÉTICOS

MAGNETIZACIÓN



i-ésimo átomo

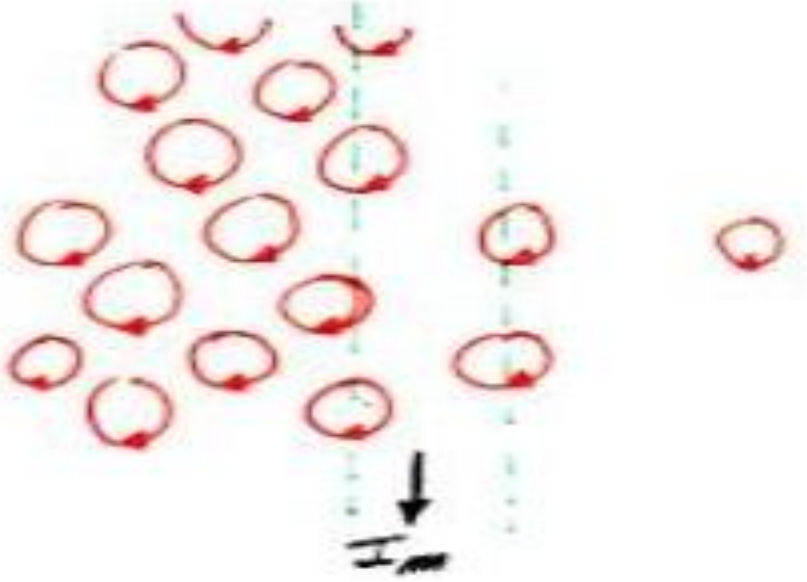
DEFINIMOS UNA CANTIDAD MACROSCÓPICA, LLAMADA MAGNETIZACIÓN $\vec{M}$ /

$$\vec{M} = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{1}{\Delta V} \sum \vec{m}_i \qquad (A)$$

$\vec{M}(x,y,z)$ esta función nos va a proporcionar una descripción macroscópica de los comienzos atómicos en el interior del material.



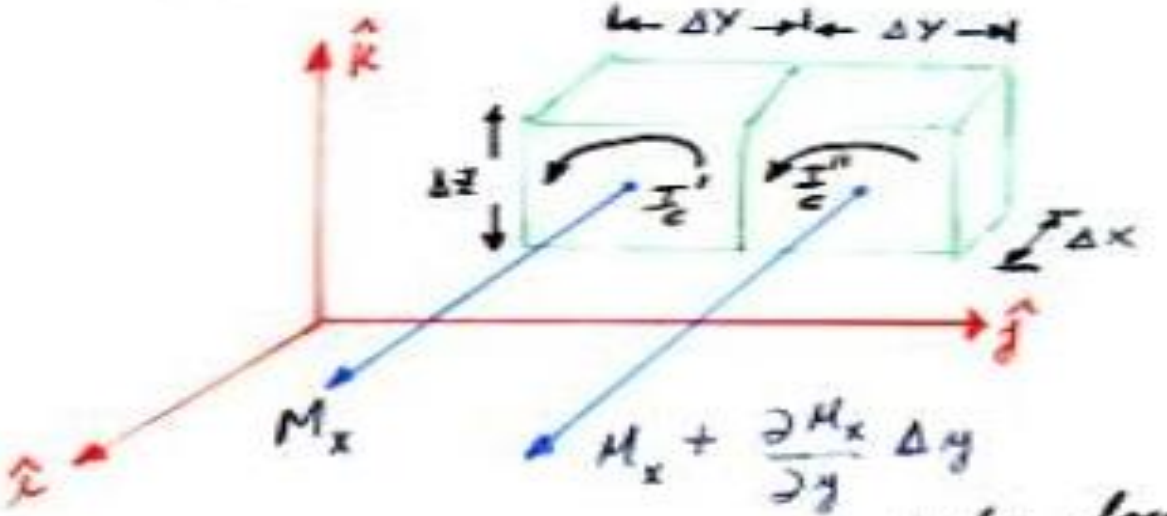
Si la Magnetización es uniforme, las corrientes en los diversos circuitos circulares (loops) tienden a cancelarse :. Es una corriente neta efectiva en el interior del material.



Magnetización no uniforme.

Hay más cargas moviéndose hacia abajo que moviéndose hacia arriba. A pesar de que no existe transporte de carga, existe un movimiento efectivo local de carga hacia abajo

y esta "corriente" puede producir un campo magnético, a esta corriente se le denomina CORRIENTE DE MAGNETIZACIÓN



$$\vec{M} = \lim_{\Delta v \to 0} \frac{1}{\Delta v} \sum \vec{m}_i$$

A lo largo del eje x

Como $\vec{m} = I\vec{A}$ (2) $\Rightarrow$ $m_x' = M_x \Delta x \Delta y \Delta z = I_c' \Delta y \Delta z$ (3)

$$m_x'' = \left(M_x + \frac{\partial M_x}{\partial y}\Delta y\right)\Delta x \Delta y \Delta z = I_c'' \Delta y \Delta z \quad (4)$$

$\therefore$ la corriente neta entre los dos volumenes (hacia arriba) es:

$$I_c' - I_c'' = -\frac{\partial M_x}{\partial y}\Delta x \Delta y \quad (5)$$

Si consideramos 2 elementos de volumen a lo largo del eje x y vemos la componente-y de la magnetización en cada celda ⇒

$$(I_c)_{sup} = \frac{\partial M_y}{\partial x}\,\Delta x \Delta y \qquad (6)$$

$$\frac{(I_c)}{\Delta x \Delta y} = J$$

∴ Tendremos una corriente circulante neta en la dirección z, que viene de una magnetización no uniforme y es la corriente de magnetización.

$$(J_M)_z = \left(\frac{\partial M_y}{\partial x} - \frac{\partial M_x}{\partial y}\right) \qquad (7)$$

$$(J_M)_z \equiv \frac{(I_c)}{\Delta x \Delta y}$$

o

$$\vec{J}_M = \nabla \times \vec{M} \qquad (8)$$

$\vec{J}_M$ ↓ Densidad de Corriente de Magnetización

$\vec{M}$ ↓ Magnetización

EL CAMPO MAGNETICO PRODUCIDO POR UN MATERIAL MAGNETIZADO.

Como $\vec{M} = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{1}{\Delta V} \sum \vec{m}_i \Rightarrow \Delta \vec{m} = \vec{M}(x',y',z')\,\Delta V'$ (9)

Antes de hallar $\vec{B}$, determinemos $\vec{A}$ / $\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$



$$\vec{A}(x,y,z) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V_0} \frac{\vec{M}(x',y',z') \times (\vec{r}-\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3} dV' \quad (10)$$

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{m} \times \vec{r}}{r^3} \quad (11)$$

$$\nabla' \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|} = \frac{\vec{r}-\vec{r}'}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3} \quad (13)$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V_0} \vec{M}(x',y',z') \times \nabla' \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|} dV' \quad (12)$$

usando $\nabla \times (\varphi \vec{F}) = \varphi \nabla \times \vec{F} - \vec{F} \times \nabla \varphi$ (14) y $\int_V \nabla \times \vec{F}\, dV = \oint_S \hat{n} \times \vec{F}\, da$ (15)

$$\vec{A}(x,y,z) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V_0} \frac{\nabla' \times \vec{M}}{|\vec{r}-\vec{r}'|} dV' + \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{S_0} \frac{\vec{M} \times \hat{n}}{|\vec{r}-\vec{r}'|} da' \quad (16)$$

S_0 Superficie de V_0

$$\int_{V_0} \nabla \times \left(\frac{\vec{M}}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \right) dV'$$

Si $\vec{J}_M \triangleq \vec{M} \times \hat{n}$ (17) Corriente de magnetización por unidad de longitud fluyendo en la capa superficial

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V_0} \frac{\vec{J}_M(\vec{r}')\,dV'}{|\vec{r}-\vec{r}'|} + \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{S_0} \frac{\vec{J}_M\,da'}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \qquad (18)$$

Regresando a $A(\vec{r})$ para hallar $\vec{B}(\vec{r})$

$$\vec{B}(\vec{r}) = \nabla \times \vec{A} = \nabla \times \left(\int_{V_0} \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{M}(x';y';z') \times (\vec{r}-\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3} dV' \right)$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V_0} \nabla \times \left[\vec{M} \times \frac{(\vec{r}-\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}')^3} \right] dV' \qquad (19)$$

usando $\nabla \times (\vec{F} \times \vec{G}) = (\nabla \cdot \vec{G})\vec{F} - (\nabla \cdot \vec{F})\vec{G} + (\vec{G} \cdot \nabla)\vec{F} - (\vec{F} \cdot \nabla)\vec{G}$

$\vec{F} = \vec{M}(\vec{r}')$ y $\vec{G} = (\vec{r}-\vec{r}')/|\vec{r}-\vec{r}'|^3$

$$\nabla \times \left(\vec{M} \times \frac{(\vec{r}-\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}\right) = \vec{M}\,\nabla\cdot\left[\frac{(\vec{r}-\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}\right] - \cancel{(\nabla\cdot\vec{M})}^{0}\frac{(\vec{r}-\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}$$

$$+\left[\frac{(\vec{r}-\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}\cdot\nabla\right)\cancel{\vec{M}}^{0} - (\vec{M}\cdot\nabla)\frac{(\vec{r}-\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}$$

$$\vec{B}(\vec{r}) = \underbrace{\frac{\mu_0}{4\pi}\int_{V_0}\vec{M}\,\nabla\cdot\left[\frac{(\vec{r}-\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}\right]dV'}_{\vec{B}_I(\vec{r})} - \underbrace{\frac{\mu_0}{4\pi}\int_{V_0}(\vec{M}\cdot\nabla)\frac{(\vec{r}-\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}\,dV'}_{\vec{B}_{II}(\vec{r})} \quad (20)$$

Como $\nabla\cdot\frac{\vec{r}}{r^3} = 4\pi\,\delta(\vec{r})$ (21)

$$\vec{B}_I(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{\cancel{4\pi}}\int_{V_0}\vec{M}(\vec{r}')\,\cancel{4\pi}\,\delta(\vec{r}-\vec{r}')\,dV' = \mu_0\vec{M}(\vec{r}) \quad (22)$$

$$f(a) = \int f(x)\,\delta(x-a)\,dx$$

Para $\vec{B}_{II}(\vec{r})$ usamos:

$$\nabla(\vec{F}\cdot\vec{G}) = (\vec{F}\nabla)\vec{G} + \vec{F}\times(\nabla\times\vec{G}) + (\vec{G}\cdot\nabla)\vec{F} + \vec{G}\times(\nabla\times\vec{F}) \quad (23)$$

$$\nabla\left[\vec{M}\cdot\frac{(\vec{r}-\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}\right] = (\vec{M}\cdot\nabla)\frac{(\vec{r}-\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3} + \vec{M}\times\nabla\times\left[\frac{(\vec{r}-\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}\right]$$

$$+\left(\frac{(\vec{r}-\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}\cdot\nabla\right)\vec{M} + \frac{(\vec{r}-\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}\times(\nabla\times\vec{M})$$

pero $\nabla\times\left[\frac{(\vec{r}-\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}\right] = -\nabla\times\nabla\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|} = 0 \quad (\nabla\times\nabla\phi = 0)$

$$\therefore \vec{B}_{II}(\vec{r}) = -\mu_0\nabla\underbrace{\frac{1}{4\pi}\int_{V_0}\vec{M}(\vec{r}')\cdot\frac{(\vec{r}-\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}\,dv'}_{\nabla\phi^*}$$

$$\vec{B}_{II}(\vec{r}) = -\mu_0\nabla\phi^*(\vec{r}) \quad (24)$$

donde $\phi^*(\vec{r}) \equiv \frac{1}{4\pi}\int_{V_0}\vec{M}(\vec{r}')\cdot\frac{(\vec{r}-\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}\,dv'$ (25) Potencial escalar magnético debido al material magnético

finalmente: $$\boxed{\vec{B}(\vec{r}) = -\mu_0 \nabla \varphi^*(\vec{r}) + \mu_0 \vec{M}(\vec{r})} \quad (26)$$

↓ producto de un escalar

↓ magnetización local

EL POTENCIAL ESCALAR MAGNETICO y LA DENSIDAD DE POLO MAGNÉTICO

Como $\varphi^*(\vec{r}) \triangleq \frac{1}{4\pi} \int_{V_0} \vec{M}(\vec{r}\,') \cdot \underbrace{\frac{(\vec{r}-\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3}}\, dv'$ (27)

representa el potencial escalar magnético

$$= \vec{M} \cdot \nabla' \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} = \nabla' \cdot \frac{\vec{M}}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} - \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} \nabla' \cdot \vec{M}$$

$\nabla \cdot (\varphi \vec{F}) = (\nabla \varphi) \cdot \vec{F} + \varphi \nabla \cdot \vec{F}$

$\nabla \frac{1}{r} = -\frac{\vec{r}}{r^3}$

luego $\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi}\int_{V_0} \nabla'\cdot\left(\frac{\vec{M}}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\right) dV' - \frac{1}{4\pi}\int_{V_0}\frac{\nabla'\cdot\vec{M}}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\,dV'$

$$= \frac{1}{4\pi}\int_{S_0}\frac{\vec{M}\cdot\hat{n}\,da'}{|\vec{r}-\vec{r}'|} - \frac{1}{4\pi}\int_{V_0}\frac{\nabla'\cdot\vec{M}}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\,dV'$$

$$\boxed{\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi}\int_{S_0}\frac{\sigma_M\,da'}{|\vec{r}-\vec{r}'|} + \frac{1}{4\pi}\int_{V_0}\frac{\rho_M\,dV'}{|\vec{r}-\vec{r}'|}} \qquad (28)$$

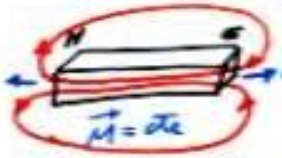
donde: $\rho_M(\vec{r}') \equiv -\nabla'\cdot\vec{M}(\vec{r}')$ densidad de polo magnético

y $\sigma_M(\vec{r}') \equiv \vec{M}(\vec{r}')\cdot\hat{n}$ densidad superficial de intensidad de polo magnético

$[\rho_M] = A/m^2$

$[\sigma_M] = A/m$

Ej:



$\nabla\cdot\vec{M} = 0 = \rho_M = 0$

La intensidad total de polo magnético del magneto es:

$$\int_{V_0}(-\nabla\cdot\vec{M})\,dV + \int_{S_0}\vec{M}\cdot\hat{n}\,da = 0$$

como

$$\vec{B}(\vec{r}) = -\mu_0\nabla'\varphi(\vec{r}) + \mu_0\vec{M}(\vec{r}) \qquad (29)$$

$$\boxed{\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_{V_0}\rho_M\frac{(\vec{r}-\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}\,dV' + \frac{\mu_0}{4\pi}\int_{S_0}\sigma_M\frac{(\vec{r}-\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}\,da' + \mu_0\vec{M}(\vec{r})} \qquad (30)$$

Esta ecuación representa la contribución del material magnetizado en V_0 a la inducción magnética en (x,y,z).

FUENTES DEL CAMPO MAGNETICO:
LA INTENSIDAD MAGNÉTICA

Fuentes: i) Corrientes - Corrientes de transporte de carga

ii) Corrientes atómicas en el interior del material

En general: $$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_V \frac{\vec{J}\times(\vec{r}-\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}dV' - \mu_0\nabla\varphi^*(\vec{r}) + \mu_0\vec{M}(\vec{r}) \qquad (1)$$

Con $$\varphi^*(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi}\int_V \frac{\rho_M\,dV'}{|\vec{r}-\vec{r}'|} + \frac{1}{4\pi}\int_S \frac{\sigma_M\,da'}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \qquad (2)$$

V: sobre todas las regiones que llevan corriente y sobre toda la materia

S: todas las superficies e interfaces entre medios diferentes

$\vec{J}$: incluye solo las corrientes convencionales de las diferentes formas del transporte de carga

$\vec{M}$ y φ^*: corrientes atómicas

La solución de (1) está dada si $\vec{J}$ y $\vec{M}$ son especificados pero en muchos problemas $\vec{J}$ se da pero $\vec{M}(x', y', z')$ depende de $\vec{B}(x', y', z')$ $\therefore$ $\vec{M}(\vec{B}) \Rightarrow$ ec (1) constituye una ecuación integral para $\vec{B}$.

- Para evitar esta dificultad es conveniente introducir un vector magnético auxiliar, definido por $\boxed{\vec{H} \equiv \frac{1}{\mu_0}\vec{B} - \vec{M}}$, llamado INTENSIDAD MAGNÉTICA (3)

(3) en (1)

$$\boxed{\vec{H}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi}\int_V \frac{\vec{J}\times(\vec{r}-\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}\,dv' - \nabla\varphi^*(\vec{r})}$$

en SI $[\vec{H}] = A/m = [\vec{M}]$ (4)

LAS ECUACIONES DEL CAMPO

En el capítulo 8, vimos que:

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0, \quad \nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J}$$

y queremos ver como se modifican estas ecuaciones cuando $\vec{B}$ incluya una contribución de un material magnetizado.

- En el caso de $\nabla \cdot \vec{B} = 0$ esto es válido para todos los campos magnéticos que sean producidos por una distribución de corrientes.
- En el caso de $\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J}$ que es la ley circuital de Ampère, se debe tener cuidado en incluir todos los tipos de corrientes que producen un campo $\vec{B}$. En el caso general, dicha ecuación debe ser escrita como:

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 (\vec{J} + \vec{J}_M) \qquad (5)$$

$\vec{J}$: densidad de corriente de transporte

$\vec{J}_M$: densidad de corriente de magnetización

Como $\vec{J}_M = \nabla \times \vec{M} \Rightarrow \nabla \times \left(\frac{1}{\mu_0}\vec{B} - \vec{H}\right) = \vec{J}$

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J} \qquad (6)$$

densidad de corriente de transporte

Usando el Teorema de Stokes:

$$\int_S \nabla \times \vec{H} \cdot \hat{n}\, da = \oint_C \vec{H} \cdot d\vec{l} = \int_S \vec{J} \cdot \hat{n}\, da \qquad (7)$$

o

$$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{l} = I \qquad (8)$$

$\Rightarrow$ La $\oint$ de la componente tangencial de la intensidad magnética alrededor de la curva cerrada C es igual a la corriente total de transporte.



$$\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0 \qquad (9)$$

9.6 SUSCEPTIBILIDAD MAGNÉTICA, PERMEABILIDAD y HISTERESIS.

- Para una gran variedad de materiales existe una relación aproximadamente lineal entre $\vec{M}$ y $\vec{H}$. Si el material es isotrópico y lineal:

$$\vec{M} = \chi_m \vec{H} \quad (19)$$ donde χ_m es la susceptibilidad magnética

(Si el material es anisotrópico pero lineal la relación es remplazada por el tensor χ_{ij})

$\chi_m > 0 \Rightarrow$ el material es llamado PARAMAGNÉTICO

$\chi_m < 0 \Rightarrow$ " " " DIAMAGNÉTICO

$\chi_m = \chi_m(T)$ y $|\chi_m| \ll 1$

- A veces χ_m es dado en $\chi_{m,\,masa}$ ó en $\chi_{m,\,molar}$:

$$\chi_m = \chi_{m,\,masa}\, d$$

$$\chi_m = \chi_{m,\,molar} \frac{d}{A}$$

donde d es la densidad de masa del material y A es el peso molecular.

- Una relación lineal entre $\vec{M}$ y $\vec{H}$ implica también una relación lineal entre $\vec{B}$ y $\vec{H}$:

$$\vec{B} = \mu \vec{H} \quad (1)$$ μ: permeabilidad del material (Fig a)

$$\vec{H} = \frac{1}{\mu_0}\vec{B} - \vec{M} \quad \text{y} \quad \vec{M} = \chi_m \vec{H}$$

$$\vec{H} = \frac{\mu \vec{H}}{\mu_0} - \chi_m \vec{H} \Rightarrow \boxed{\mu = \mu_0 (1 + \chi_m)} \quad (12)$$

$$\mu_r \equiv K_m = \frac{\mu}{\mu_0} = 1 + \chi_m$$ K_m: permeabilidad relativa.

- Para materiales paramagnéticos y diamagnéticos $|K_m| \gtrsim 1$

Los materiales ferromagnéticos se usan:

(1) para aumentar el flujo magnético de un circuito de corriente.

(2) como fuentes de campo magnético (imanes permanentes).

Cuando se utilizan como un imán permanente, el material se magnetiza primero hasta la saturación colocándolo en un campo magnético interno (por ejemplo colocándolo entre los polos de un electroimán o en un solenoide por el que circula una corriente grande). Sin embargo, cuando el imán permanente se quita del campo externo, estará sujeto a un campo desmagnetizante. Por esta razón, el segundo cuadrante del diagrama de la curva de histéresis B-H es la parte importante de la relación B-H para un material magnético permanente. (b)

FIGURE a

Magnetization curve and relative permeability of commercial iron (annealed)

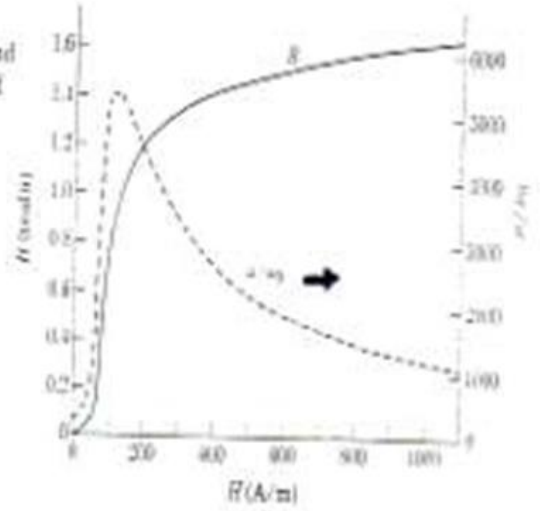


FIGURE b

Hysteresis curves of permanent magnet materials. (Note that $\mu_0 H$ is plotted along the abscissa instead of just H.)

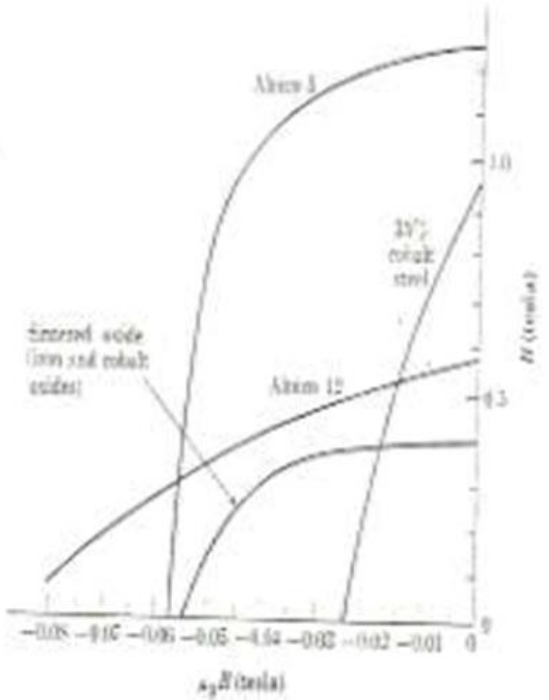


Table 8.2 Relative Permeability (μ_r) of Some Materials*

Material	μ_r
Diamagnetic	
Bismuth	0.999833
Mercury	0.999968
Silver	0.9999736
Lead	0.9999831
Copper	0.9999906
Water	0.9999912
Hydrogen (s.t.p.)	≈ 1.0
Paramagnetic	
Oxygen (s.t.p.)	0.999998
Air	1.00000037
Aluminum	1.000021
Tungsten	1.00008
Platinum	1.0003
Manganese	1.001
Ferromagnetic	
Cobalt	250
Nickel	600
Soft Iron	5000
Silicon-Iron	7000

*The values given here are only typical; they vary for a one published source to another due to different varieties of most materials.

$$\mu_R = 1 + \chi_m = \frac{\mu}{\mu_0}$$

TABLE 9-1
Magnetic Susceptibility of Some Paramagnetic and Diamagnetic Materials at Room Temperature

Material	χ_m	$\chi_{m,mass}$ (m^3/kg)
Aluminum	2.1×10^{-5}	0.77×10^{-8}
Bismuth	-16.4×10^{-5}	-1.68×10^{-8}
Copper	-0.98×10^{-5}	-0.11×10^{-8}
Diamond	-2.2×10^{-5}	-0.62×10^{-8}
Gadolinium chloride ($GdCl_3$)	603.0×10^{-5}	133.3×10^{-8}
Gold	-3.5×10^{-5}	-0.18×10^{-8}
Magnesium	1.2×10^{-5}	0.68×10^{-8}
Mercury	-2.8×10^{-5}	-0.21×10^{-8}
Silver	-2.4×10^{-5}	-0.23×10^{-8}
Sodium	0.84×10^{-5}	0.87×10^{-8}
Titanium	18.0×10^{-5}	4.01×10^{-8}
Tungsten	7.6×10^{-5}	0.40×10^{-8}
Carbon dioxide (1 atm)	-1.19×10^{-8}	-0.60×10^{-8}
Hydrogen (1 atm)	-0.22×10^{-8}	-2.48×10^{-8}
Nitrogen (1 atm)	-0.67×10^{-8}	-0.54×10^{-8}
Oxygen (1 atm)	193.5×10^{-8}	135.4×10^{-8}

Source: Data obtained from the *Handbook of Chemistry and Physics*, 70th ed. (Boca Raton, FL: CRC Press, Inc., 1990). Practically all sources of data list magnetic susceptibilities in gaussian (cgs) units; if the superscript (1) is used to indicate the constant in the gaussian system, then $\chi_m = 4\pi\chi_m^{(1)}$ and $\chi_{m,mass} = 4\pi \times 10^{-3}\chi_{m,mass}^{(1)}$

TABLE 9-2
Properties of Ferromagnetic Materials at Room Temperature

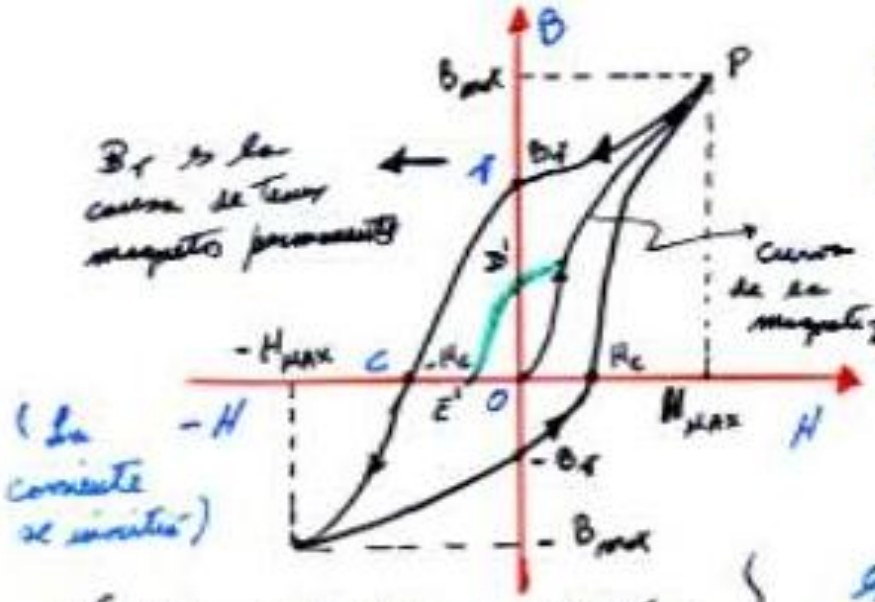
Material	Composition (%)	$\mu_0 M_s$ (T)	H_c (A/m)	K_m (max.)
Elements				
Iron (annealed)		2.15	1.6×10^5	5,500
Cobalt		1.79	7.0×10^5	
Nickel		0.61	5.5×10^5	
Alloys and Compounds			H_c (A/m)	
Iron-Silicon	96 Fe, 4 Si	1.97	56	8,000
Permalloy	55 Fe, 45 Ni	1.60	5.6	50,000
Mumetal	5 Cu, 2 Cr, 77 Ni, 16 Fe	0.75	1.2	100,000
Permendur	50 Co, 50 Fe	2.45	159	5,000
Mn ferrite	$MnFe_2O_4$	0.49		2,500
Ni ferrite	$NiFe_2O_4$	0.32		2,500
		B_r (T)		
Cobalt steel	52 Fe, 36 Co, 4 W, 6 Cr, 0.8 C	0.97	19×10^3	
Alnico V	51 Fe, 8 Al, 14 Ni, 24 Co, 3 Cu	1.25	52×10^3	
Platinum-cobalt	77 Pt, 23 Co	0.6	3.4×10^5	
Samarium-cobalt	Sm Co	0.84	6.7×10^5	
Neodymium-iron	13 Nd, 81 Fe, 6 B	0.80	1.2×10^6	

Note: M_s = saturation magnetization, H_s = magnetic intensity required for saturation, H_c = coercivity, B_r = remanence.

Source: Data from *American Institute of Physics Handbook*, 3rd ed. (New York: McGraw-Hill, 1972), and *Handbook of Chemistry and Physics*, 70th ed. (Boca Raton, FL: CRC Press, Inc., 1990). Data for Nd–Fe–B from J. J. Croat et al., *Journal of Applied Physics* 55, 2078 (1985).

- Los FERROMAGNÉTICOS forman una clase de material magnético y que pueden tener una magnetización permanente y no son lineals (ciertos clase referidos como hierro blando (soft iron) pueden ser tratados como lineals)
- Tabla 9.1 y 9.2
- Fig 9.6

- En la Figura se muestra la curva cerrada de HISTERESIS de un material.



$B_r = \mu_0 H_r$ (densidad de flujo permanente)

$\mu_0 r$: RETENTIVIDAD o REMANENCIA

$\mu_0 c$: Intensidad del campo coercivo, H_c o COERCITIVIDAD

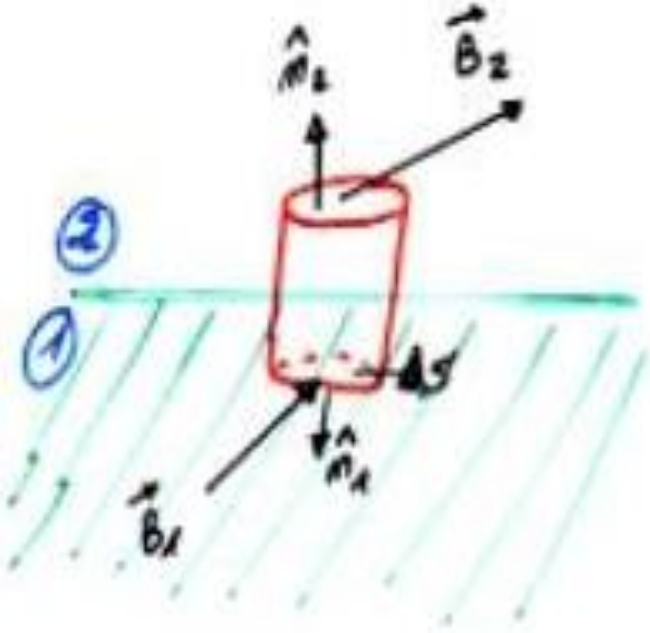
Cuando el ciclo H-H es trazado sin descargar la magnetización de saturación, la magnetización para el campo cero es denominado magnetización remanente o remanencia ($\mu_0 3'$) y el campo para $H=0$ es llamado la fuerza coercitiva ($\mu_0 E'$).

El area del ciclo de histéresis P_h (pérdida en la histéresis) es proporcional al trabajo realizado en la reimanación $P_h = \oint \vec{H} \cdot d\vec{B}$

(Transparencia 10a-10b-10c)

9.7 CONDICIONES DE CONTORNO PARA LOS VECTORES DEL CAMPO MAGNÉTICO.

- Queremos conocer como los vectores $\vec{B}$ y $\vec{H}$ cambian al pasar por una interfase entre dos medios.



Para $\vec{B}$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \Rightarrow \oint_S \vec{B} \cdot \hat{n}\, da = 0$$

$$\vec{B}_2 \cdot \hat{n}_2 \Delta S + \vec{B}_1 \hat{n}_1 \Delta S = 0$$

$$\hat{n}_2 = -\hat{n}_1$$

$$(\vec{B}_2 - \vec{B}_1) \cdot \hat{n}_2 = 0 \quad 0^-$$

$$\boxed{B_{2n} - B_{1n} = 0}$$

Componente normal de $\vec{B}$ son continuas

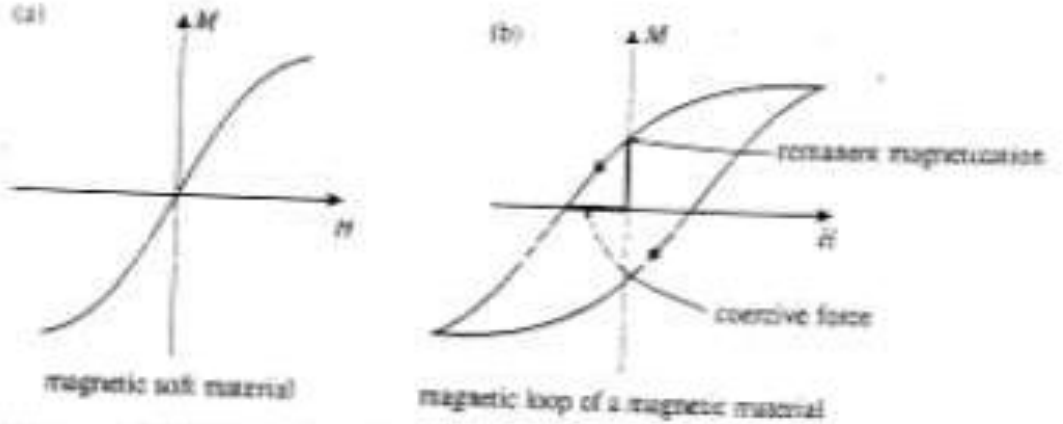


Figure 2. Magnetization in (a) a magnetically soft material and (b) a magnetically hard material.

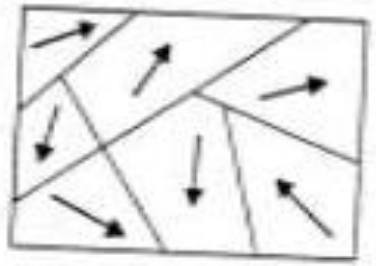
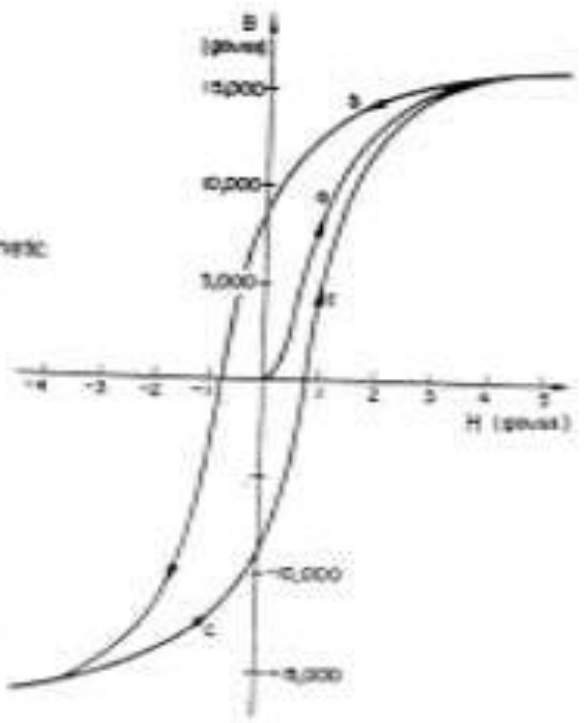
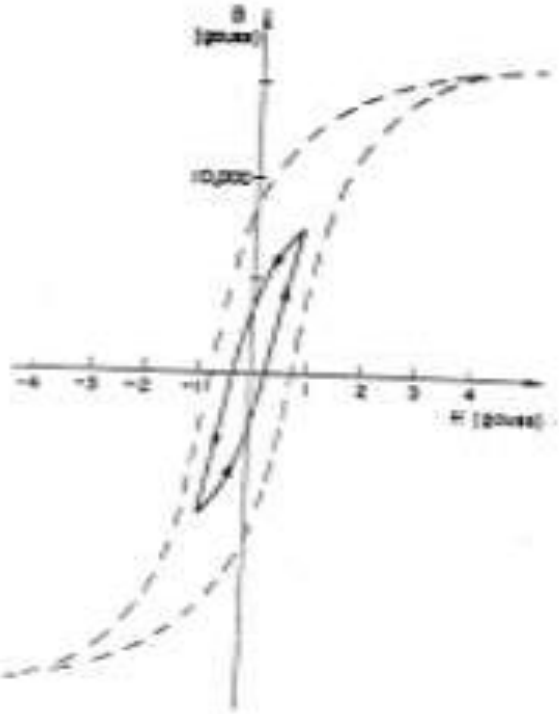


Figure 1. Weiss-domains in a nonmagnetized ferromagnetic



Magnetización típica y curvas de histéresis para hierro dulce.



Una curva de histéresis que no alcanza saturación.

FIGURE 9-7

Comparison of the hysteresis curves of several materials. (Note that $\mu_0 H$ is plotted along the abscissa instead of just H. $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$ T · m/A.) Data from R. M. Bozorth, *Ferromagnetism* (New York: Van Nostrand, 1951).

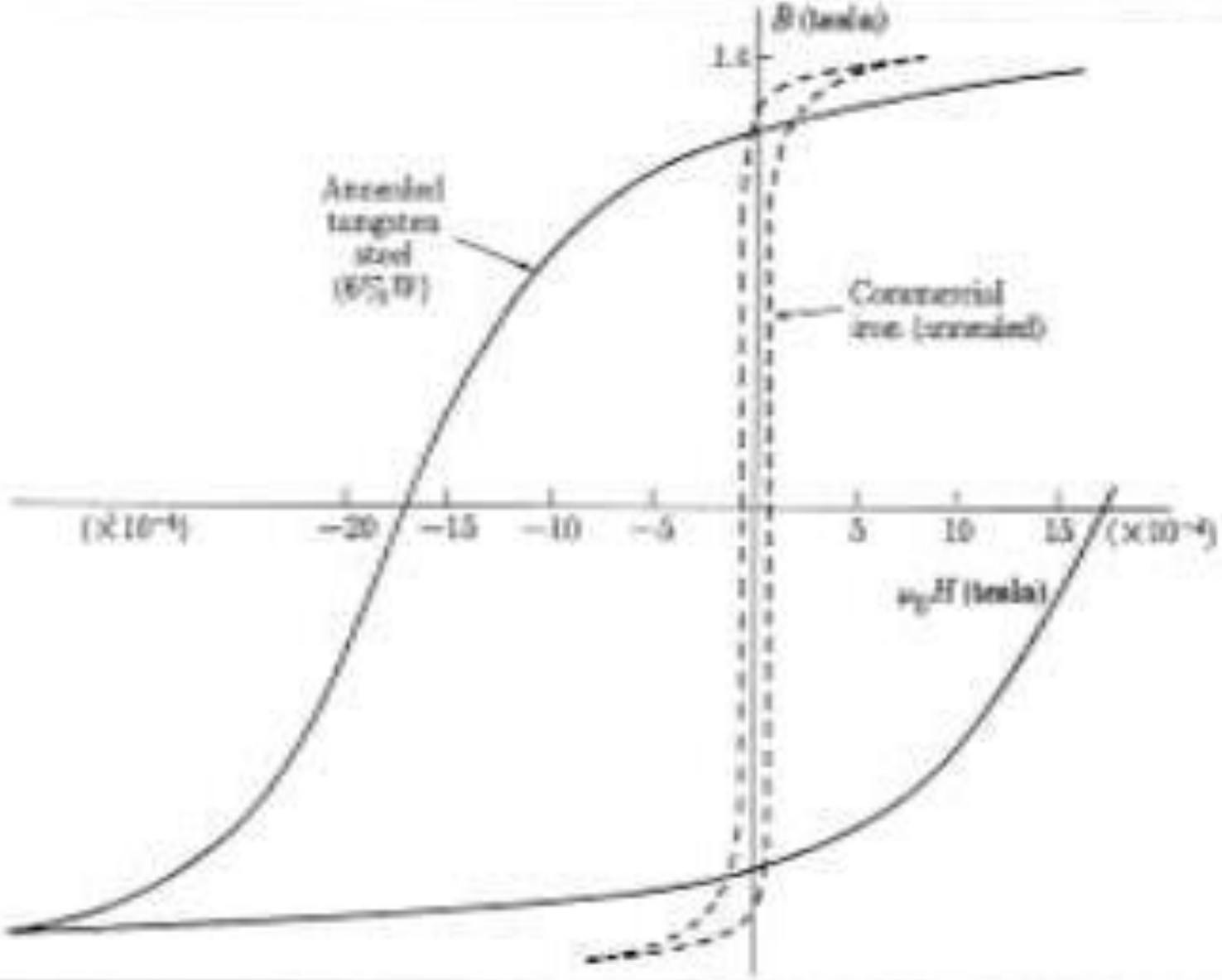
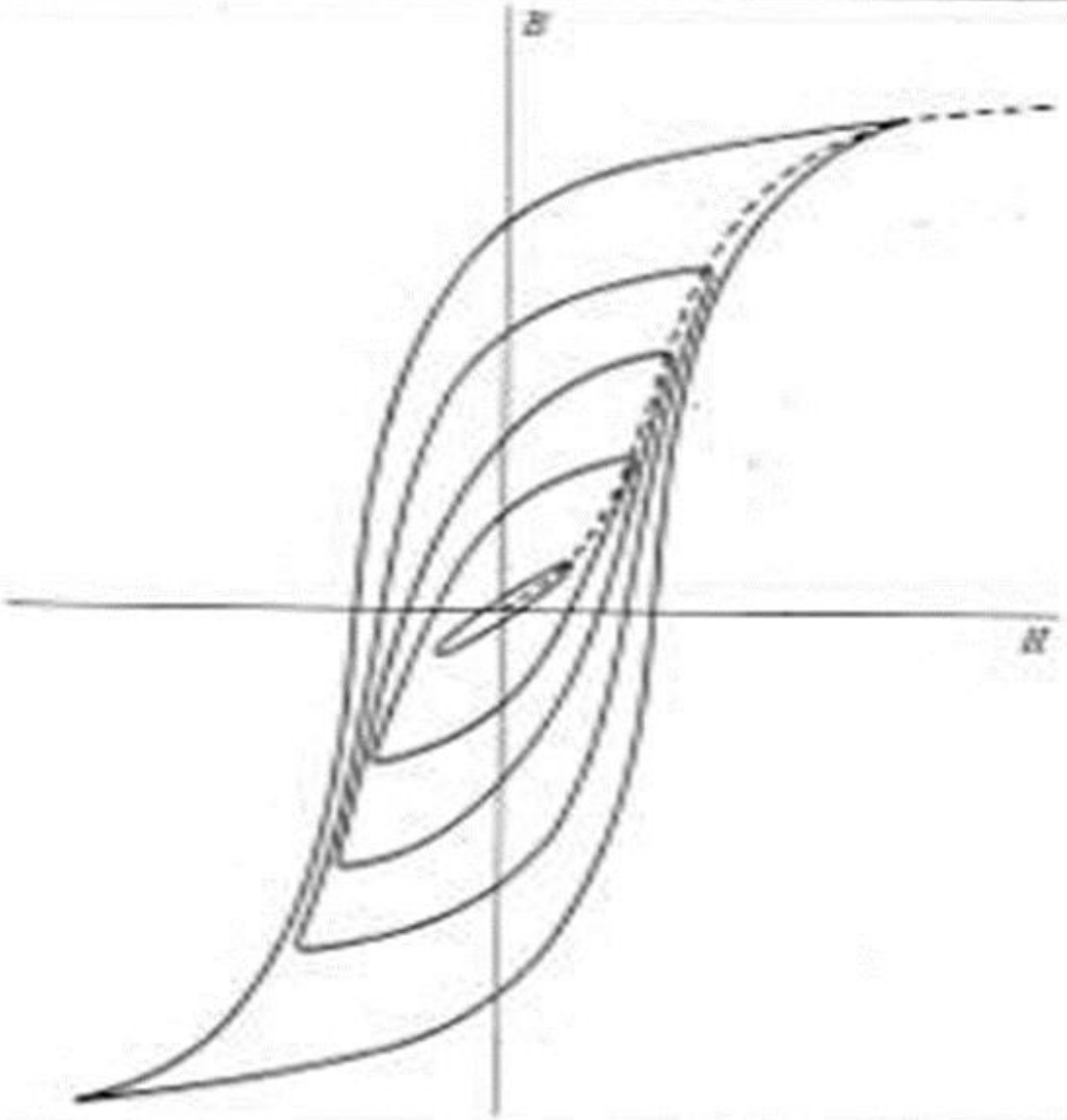
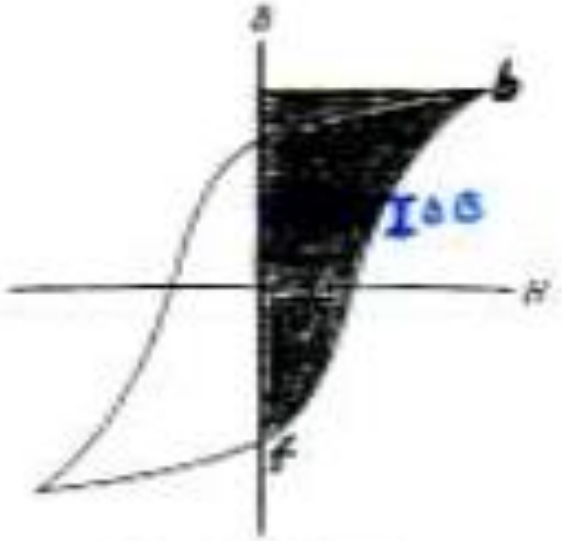


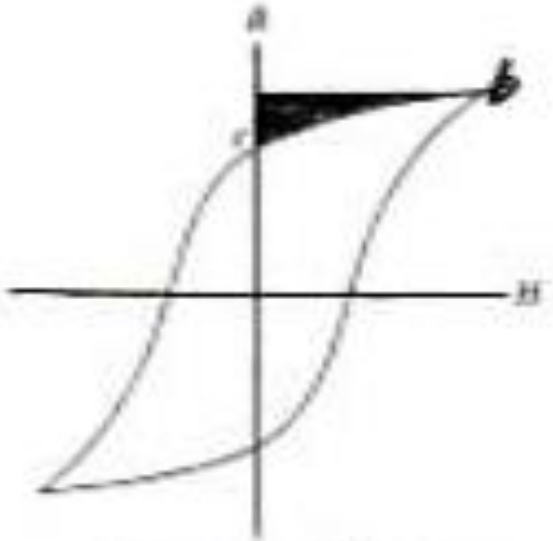
FIGURE 9-8
Major hysteresis loop and several minor hysteresis loops for a typical material





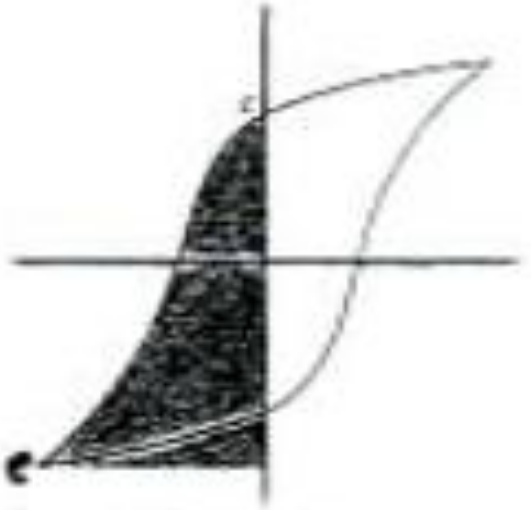
(a) energy in $f \to b$

$(+H\Delta B > 0)$



(b) energy out $b \to c$

$(-H\Delta B < 0)$



(a) energy in $c \to e$

$(+H\Delta B > 0)$



(b) energy out $e \to f$

$(-H\Delta B < 0)$



Area of the hysteresis loop.

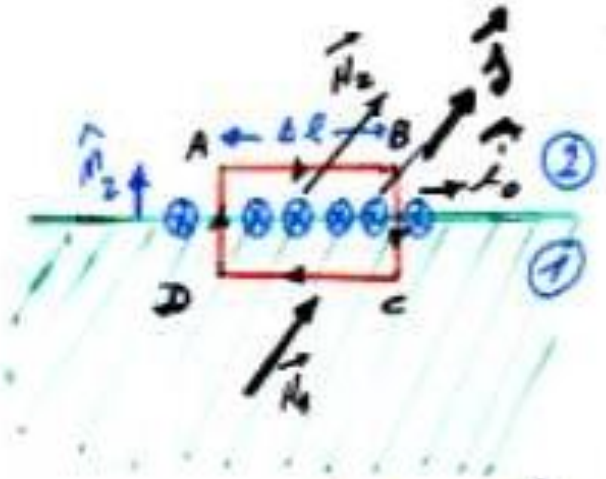
$$\Delta W = \int (\Delta \vec{B}) \cdot \vec{H}\, dV$$

Al someter el material a un ciclo alrededor de la curva de histéresis, el trabajo por unidad de volumen es dado por:

$$W = \oint H\, dB \quad (\text{Joule}/m^3)$$

que es igual al área encerrada por la curva de histéresis y representa una pérdida de energía. Esta pérdida aparece como calor que se produce por los ciclos irreversibles en la estructura de dominios del material.

Para $\vec{H}$



$$\oint_C \vec{H}\cdot d\vec{\ell} = i$$

$$\vec{\Delta\ell} = \Delta\ell\,\hat{\lambda}_0$$

$$\int_A^B \vec{H}_2\cdot d\vec{\ell} + \int_B^C \vec{H}\cdot d\vec{\ell} + \int_C^D \vec{H}_1\cdot d\vec{\ell} + \int_D^A \vec{H}\cdot d\vec{\ell} = i$$

$$H_{2t}\cdot\Delta\ell + H_{2n}\frac{\Delta h}{2} + H_{1n}\frac{\Delta h}{2} - H_{1t}\cdot\Delta\ell + H_{1n}\frac{\Delta h}{2} + H_{2n}\frac{\Delta h}{2} = j\,\Delta\ell = i$$

cuando $\Delta h \to 0$ ⇒

$$(H_{2t} - H_{1t}) = j \longrightarrow (\vec{H}_2 - \vec{H}_1)\cdot\hat{\lambda}_0 = \vec{j}\cdot(\hat{n}_2\times\hat{\lambda}_0) = \vec{j}\times\hat{n}_2\cdot\hat{\lambda}_0$$

$$\boxed{(\vec{H}_2 - \vec{H}_1)_t = \vec{j}\times\hat{n}_2}$$

donde $\vec{j}$ es la densidad de corriente superficial.

$\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C}) = \vec{B}(\vec{A}\cdot\vec{C}) - \vec{C}(\vec{A}\cdot\vec{B})$ →

$$\hat{n}_2\times(\vec{H}_2 - \vec{H}_1)_t = \hat{n}_2\times(\vec{j}\times\hat{n}_2)$$

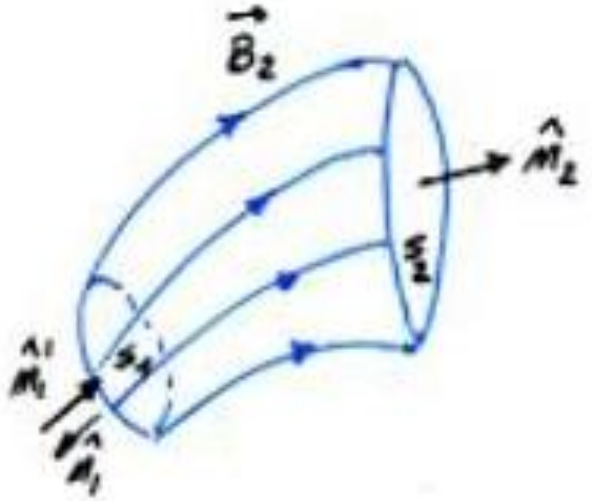
$$= \vec{j}(\hat{n}_2\cdot\hat{n}_2) - \hat{n}_2(\hat{n}_2\cdot\vec{j})$$

$$\boxed{\hat{n}_2\times(\vec{H}_2 - \vec{H}_1) = \vec{j}}$$

(Corriente de transporte medida por unidad de longitud en la superficie de la interfase).

$\vec{j}$ es conocido si $\vec{H}_1$ y $\vec{H}_2$ lo son.

Si $\vec{J}=0 \Rightarrow$ $\boxed{H_{2t} = H_{1t}}$



Tubo de inducción magnética

$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \Rightarrow \int_V \nabla \cdot \vec{B}\, dV = 0$

$= \int_{S_2} \vec{B} \cdot \hat{n}\, da - \int_{S_1} \vec{B} \cdot \hat{n}'\, da$

$= \Phi(S_2) - \Phi(S_1) = 0 \Rightarrow$

$\Phi(S_1)$ = Flujo que entra

$= \Phi(S_2)$ = flujo q' sale

se aplican a $\vec{B}$

Para $\vec{H}$

Como $\nabla \cdot \vec{H} = -\nabla \cdot \vec{M}$

$\int_{S_2} \vec{H} \cdot \hat{n}\, da - \int_{S_1} \vec{H} \cdot \hat{n}'\, da = \int \rho_M\, dV$

$\therefore$ La discontinuidad en la intensidad del campo magnético $\vec{H}$ es determinado por intensidad total de polos magnéticos interceptado por el tubo de flujo.

PROBLEMAS DE CONTORNO INVOLUCRANDO MATERIALES MAGNETICOS.

- Cuando no existe corriente de transporte de carga, esto es $\vec{J}=0 \Rightarrow \nabla \cdot \vec{B}=0$ y $\nabla \times \vec{H}=0 \Rightarrow \vec{H}=-\nabla \varphi^*$

donde φ^* es ahora el potencial escalar magnético debido a las fuentes.

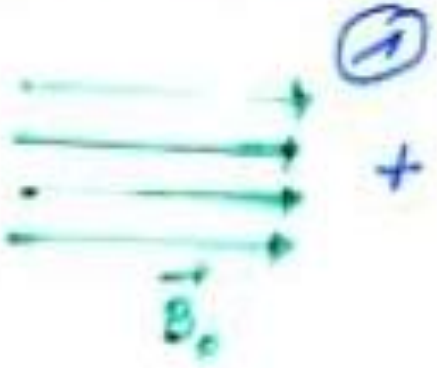
- $\exists$ dos tipos de material magnético para los cual el cálculo del campo magnético se reduce a un problema simple de condiciones de contorno:

(1) lineal o aproximadamente lineal para lo cual $\vec{B}=\mu \vec{H}$ y

(2) para una pieza de material magnetizado uniformemente, $\Rightarrow \nabla \cdot \vec{M}=0$

Para ambos casos $\nabla \cdot \vec{H}=0 \Rightarrow \nabla^2 \varphi^*=0$ φ^* es la Ec. de Laplace

PROBLEMA 1. Esfera magnéticamente permeable en un campo magnético uniforme.

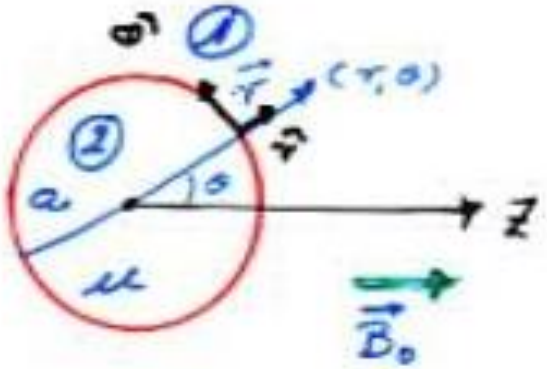


¿Como el campo magnético se modifica por la presencia de la esfera de radio a y permeabilidad μ?

SOLUCIÓN

- Origen de coordenadas en el centro de la esfera y $\vec{B}_0 = B_0 \hat{k}$ (// Z)

Como $\nabla^2 \varphi^* = 0 \Rightarrow$ $\varphi^*(r,\theta) = \sum_{l=0}^{\infty} P_l(\cos\theta) \begin{cases} a_l r^l & r<R \\ b_l r^{-(l+1)} & r>R \end{cases}$



Región 1

$$\varphi_1^*(r,\theta) = A_1 r\cos\theta + C_1 r^{-2}\cos\theta$$

Región 2

$$\varphi_2^*(r,\theta) = A_2 r\cos\theta + C_2 r^{-2}\cos\theta$$

Ts A_1, A_2, C_1 y C_2 deben determinarse.

$\vec{H} = -\nabla\varphi^*$, $\vec{B} = \mu\vec{H}$

① Cuando $r \to \infty$ $\quad \vec{B} = B_0\hat{k} \Rightarrow \varphi_1^* \to -\left(\frac{B_0}{\mu_0}\right) r\cos\theta$

luego $A_1 = -(B_0/\mu_0)$

② $r \to 0$ φ_2^* debe ser finito $\Rightarrow C_2 = 0$

$\nabla\varphi^* = \hat{r}\frac{\partial\varphi^*}{\partial r} + \hat{\theta}\frac{1}{r}\frac{\partial\varphi^*}{\partial\theta} + \hat{k}\frac{\partial\varphi^*}{\partial z}$ (coord. polares)

③ condiciones de contorno en $r = a$

$$H_{1\theta}\Big|_{r=a} = H_{2\theta}\Big|_{r=a} \; ; \quad B_{1r}\Big|_{r=a} = B_{2r}\Big|_{r=a}$$

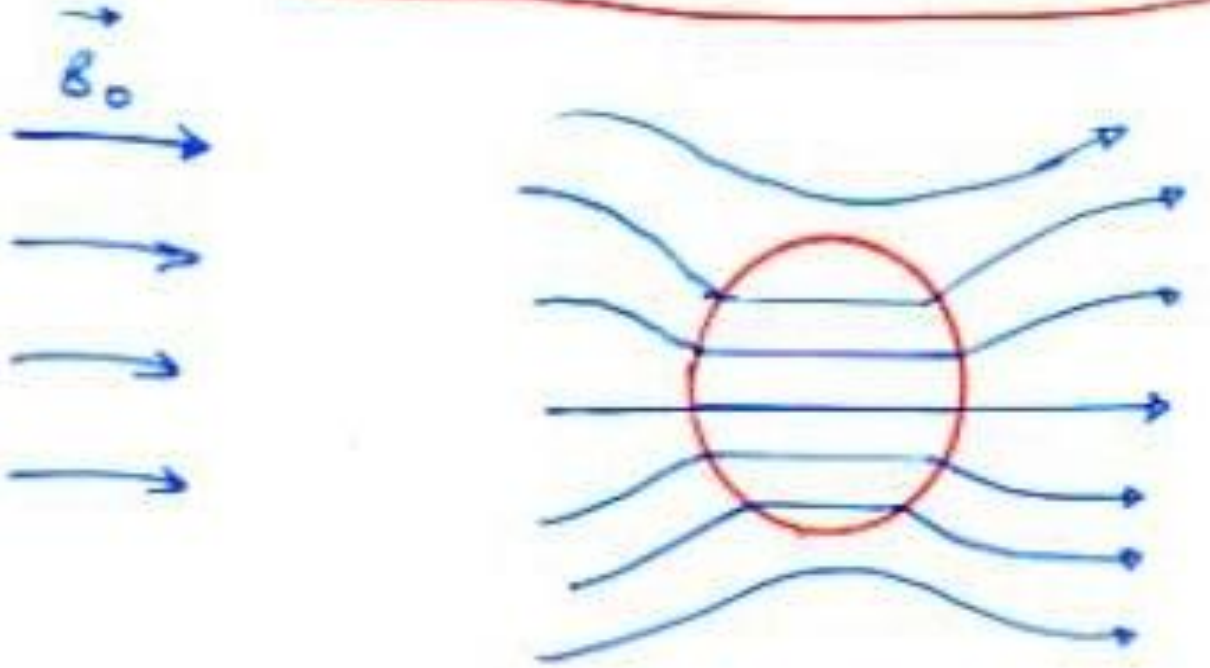
$$-\left(\frac{B_0}{\mu_0}\right)\operatorname{sen}\theta + \frac{C_1}{a^3}\operatorname{sen}\theta = A_2\operatorname{sen}\theta$$

$$B_0\cos\theta + 2\mu_0\frac{C_1}{a^3}\cos\theta = -\mu A_2\cos\theta$$

$\therefore$ $\boxed{A_2 = -\frac{3B_0}{(\mu + 2\mu_0)}}$ y $\boxed{C_1 = \left[(\mu/\mu_0) - 1\right]\frac{B_0 a^3}{(\mu + 2\mu_0)}}$

$\therefore$ $\boxed{\vec{B}_2 = \frac{3B_0\hat{k}}{1 + 2(\mu_0/\mu)}}$ $r \leq a$ $\mu > \mu_0$ $\frac{\mu_0}{\mu} < 1$

y $\boxed{\vec{B}_1 = B_0\hat{k} + \left[\frac{(\mu/\mu_0) - 1}{(\mu/\mu_0) + 2}\right]\left(\frac{a}{r}\right)^3 B_0 (2\hat{a}_r \cos\theta + \hat{a}_\theta \sin\theta)}$ $r \geq a$



Lines de $\vec{B}$ en la vecindad de una esfera de gran permeabilidad μ

PROBLEMA 2. Campo producido por una esfera de radio a con magnetización uniforme $\vec{M}$, cuando se coloca en un campo.

SOLUCIÓN. Si $\vec{M} = M\hat{k}$ y para la región ① fuera de la esfera

$$\varphi_1^*(r,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} C_{1,n}\, r^{-(n+1)} P_n(\theta) \quad (1)$$

$$\varphi_2^*(r,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} A_{2,n}\, r^n P_n(\theta) \quad (2) \text{ para la región ② en el imanto.}$$

En $r = a$ debe cumplirse:

$$H_{1\theta} = H_{2\theta} \rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \left(C_{1,n}\, a^{-(n+1)} - A_{2,n}\, a^n\right) a^{-1} \frac{d}{d\theta} P_n(\theta) = 0$$

$$B_{1r} = B_{2r} \quad \text{o'} \quad \sum_{n=0}^{\infty} \left(C_{1,n}\, a^{-(n+1)} - A_{2,n}\, a^n\right) P_n(\theta) = 0 \quad (3)$$

$$\hookrightarrow \mu_0 C_{1,0}\, a^{-2} + \mu_0 \sum_{n=1}^{\infty} P_n(\theta)\left[C_{1,n}(n+1)a^{-(n+2)} + A_{2,n}\, n\, a^{n-1}\right] \quad (4)$$

$$- \mu_0 H \cos\theta = 0$$

Los $P_n(\theta)$ son funciones ortogonales ⇒ Cada término de ③ y ④ deben desvanecerse individualmente. $\left(\int_{-1}^{1} P_\ell(x) P_{\ell'}(x)\,dx = \frac{2}{2\ell+1}\delta_{\ell\ell'}\right)$

Para $n=0$, $C_{1,0}a^{-1} - A_{2,0} = cte$, $\mu_0 C_{1,0} a^{-2} = 0$ (5)

$\vec{B} = -\nabla\Phi^* \to \hat{\theta} \to \frac{1}{r}\frac{\partial \Phi^*}{\partial \theta}$

$\Downarrow C_{1,0} = 0$ y $A_{2,0} = cte$ arbitrario

Para $n=1$, $C_{1,1}a^{-3} - A_{2,1} = 0$

y $2C_{1,1}a^{-3} + A_{2,1} - H = 0$ $\Big\}$ $C_{11} = \frac{1}{3}Ha^2$ y (6)

$A_{2,1} = \frac{1}{3}H$

Para $n \geq 2 \to C_{1,n} = 0$ y $A_{2n} = 0$ (7)

finalmente : $\Phi_1^*(r,\theta) = \frac{1}{3}H\left(\frac{a^3}{r^2}\right)\cos\theta$

y $\Phi_2^*(r,\theta) = \frac{1}{3}Hr\cos\theta$

Campo de un dipolo $\vec{m} = \frac{4}{3}\pi a^3 \vec{H}$

Luego, como $\vec{H} = -\nabla\Phi^* \Rightarrow$

$\vec{H}_1 = \frac{1}{3}H\left(\frac{a^3}{r^3}\right)\left[2\hat{a}_r\cos\theta + \hat{a}_\theta \operatorname{sen}\theta\right]$ (8) $r \geq a$

$\vec{H}_2 = -\frac{1}{3}H\hat{k}$ (9) $r < a$

→ $\vec{H}_2 = -\frac{1}{3} M \hat{k}$ indica que es un campo desmagnetizante y vemos que la propia esfera magnetizada está sujeto a su propio campo desmagnetizante.

→ El factor $\frac{1}{3} = \left(\frac{1}{4\pi}\right)\left(\frac{4\pi}{3}\right)$ en (9) depende explícitamente de la geometría esférica

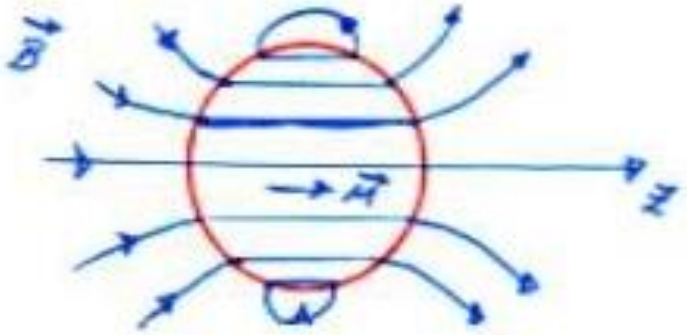
↓ factor de desmagnetización de la esfera.

El campo externo $\vec{B}_1 = \mu_0 \vec{H}_1$

$$= \frac{1}{3}\mu_0 M \left(\frac{a^3}{r^3}\right)\left[2\hat{a}_r \cos\theta + \hat{a}_\theta \operatorname{sen}\theta\right]$$

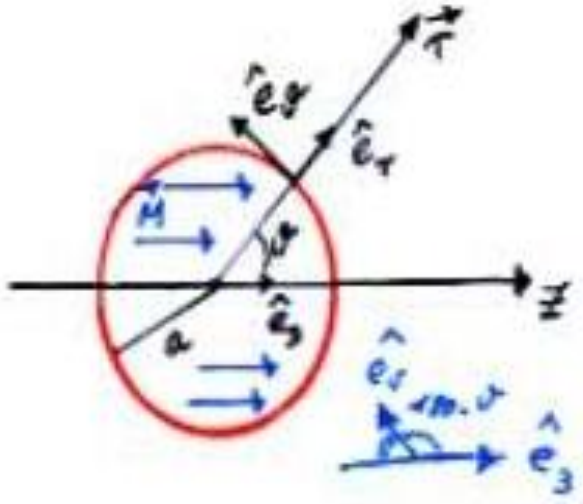
$$\vec{B}_2 = \mu_0 (\vec{H} + \vec{M})$$

$$= \mu_0 \left[-\frac{1}{3}\vec{M} + \vec{M}\right] = \frac{2}{3}\mu_0 M \hat{k} = \frac{2}{3}\mu_0 \vec{M}$$



Líneas de inducción magnética para una esfera uniformemente magnetizada.

EL CAMPO MAGNÉTICO DE UNA ESFERA UNIFORMEMENTE MAGNETIZADA



La esfera es uniformente magnetizada en la dirección del eje Z, luego

$$\vec{M} = M_0 \hat{e}_3 \quad \text{con } M_0 = cte$$

Para el campo externo, tenemos

$$\nabla \times \vec{B}_a = \nabla \cdot \vec{B}_a = 0 \qquad (1)$$

Por consiguiente el campo externo puede ser representado por:

$$\vec{B}_a = -\nabla \Phi_M \qquad (2)$$

donde $\nabla^2 \Phi_M = 0$ (3) es valido en la región exterior de la esfera.

La solución de la ecuación de Laplace se conoce desde la electrostática y se expresa en término de los polinomios de Legendre:

$$\Phi_M = \sum_{\alpha=0}^{\infty} \alpha_\alpha \frac{P_\alpha(\cos\theta)}{r^{\alpha+1}} \qquad (4)$$

Para el campo interno de la esfera $\vec{H} = \vec{B} - 4\pi\vec{M}$ (cgs) (5)

asumido que $\vec{B}$ es paralelo a $\vec{M}$:

$$\vec{B}_i = B_0 \hat{e}_3 \qquad (6)$$

$$\vec{H}_i = B_0 \hat{e}_3 - 4\pi M_0 \hat{e}_3 \qquad (7)$$

Las condiciones de contorno en la superficie de la esfera son:

$$\vec{B}_i \cdot \hat{e}_r = \vec{B}_a \cdot \hat{e}_r \qquad (8)$$

$$\vec{H}_i \cdot \hat{e}_\theta = \vec{H}_a \cdot \hat{e}_\theta \qquad (9)$$

Recordando que: $\nabla\varphi = \hat{a}_r \frac{\partial\varphi}{\partial r} + \hat{a}_\theta \frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial\theta} + \hat{a}_\phi \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\varphi}{\partial\phi}$ (10)

De (2) y (10) $\quad B_0 \cos\theta = -\frac{\partial}{\partial r}\Phi_M \Big|_{r=a}$ (11)

Tomando la expresión (4) para Φ_M, y $P_1(\cos\theta) = \cos\theta \Rightarrow$

$$B_0 P_1(\cos\theta) = \sum_{l=0}^{\infty} \alpha_l (l+1) \frac{P_l(\cos\theta)}{r^{l+2}} \Big|_{r=a} \qquad (12)$$

de (9) y (7)

$$(B_0 - 4\pi M_0)\,\hat{e}_3 \cdot \hat{e}_\vartheta = \left(-\sum_{l=0}^{\infty} \frac{\alpha_l}{r^{l+2}} \frac{d P_l(\cos\vartheta)}{d\vartheta}\bigg|_{r=a}\right) \quad (17)$$

$\hat{e}_3 = \hat{k} = \cos\theta\,\hat{e}_r - \operatorname{sen}\theta\,\hat{e}_\theta$ $\quad (-\operatorname{sen}\vartheta)$ (18)

como $\operatorname{sen}\vartheta = -\frac{d}{d\vartheta} P_1(\cos\vartheta)$ y eliminando el signo (-) en (18),

$$(B_0 - 4\pi M_0)\left(-\frac{d}{d\vartheta} P_1(\cos\vartheta)\right) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{\alpha_l}{r^{l+2}} \frac{d}{d\vartheta} P_l(\cos\vartheta)\bigg|_{r=a} \quad (13')$$

comparando los coeficientes:

de (12) $\quad B_0 P_1(\cos\vartheta) = \frac{\alpha_1 \cdot 2}{r^3} P_1(\cos\vartheta)\Big|_{r=a}$

$$\boxed{B_0 = \frac{\alpha_1 \cdot 2}{a^3}} \quad (14)$$

de (13')

$$\boxed{(B_0 - 4\pi M_0) = -\frac{\alpha_1}{a^3}} \quad (15)$$

De las ecuaciones (14) y (15) obtenemos:

$$B_0 = \frac{8\pi}{3} M_0 \quad (16) \qquad \alpha_1 = \frac{4\pi}{3} M_0 a^3 \quad (17)$$

(16) en (6)

$$\boxed{\vec{B}_i = \frac{8\pi}{3} M_0 \hat{e}_3 = \frac{8\pi}{3} \vec{M}} \quad (18)$$

$\vec{B}_i = \frac{2}{3}\mu_0 \vec{M}$ (MKS)

(18) en (7)

$$\boxed{\vec{H}_i = -\frac{4\pi}{3} M_0 \hat{e}_3 = -\frac{4\pi}{3} \vec{M}} \quad (19)$$

El campo en la región exterior se obtiene de:

$\vec{B}_a = -\nabla \Phi_M = -\nabla \left(\alpha_1 \frac{\cos\vartheta}{r^2} \right)$ de donde se deducen las siguientes componentes:

$$\left.\begin{aligned} B_r &= \frac{8\pi}{3} M_0 a^3 \frac{\cos\vartheta}{r^3} \\ B_\vartheta &= \frac{4\pi}{3} M_0 a^3 \frac{\operatorname{sen}\vartheta}{r^3} \end{aligned}\right\} \quad (20)$$

$$B_\phi = 0$$

$\vec{B}_a = \frac{\mu_0}{3} M_0 \left(\frac{a^3}{r^3}\right)\left[2\cos\theta\,\hat{e}_r + \operatorname{sen}\theta\,\hat{e}_\vartheta\right]$ (MKS)

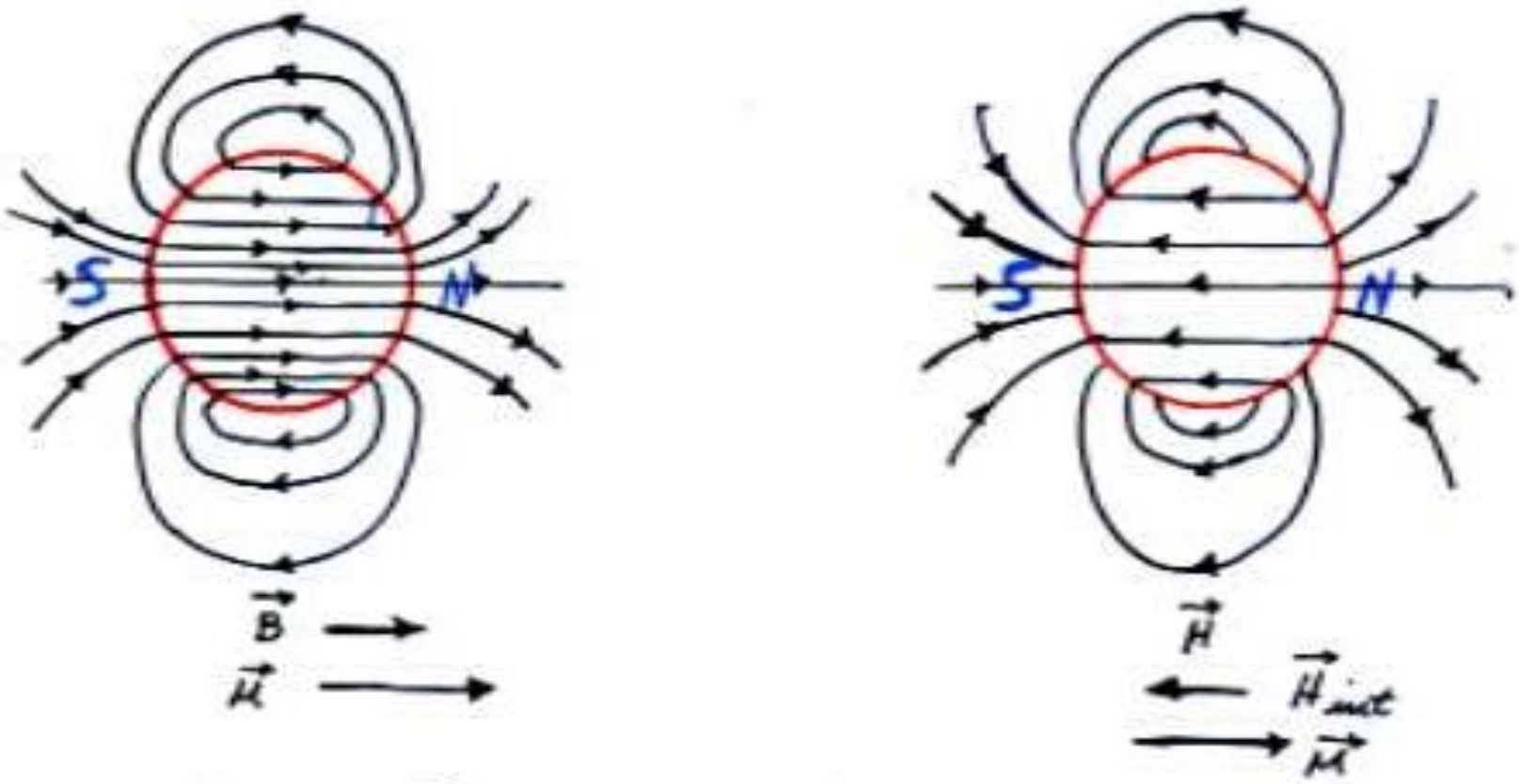
Ec (20) es justamente el campo de un dipolo magnético dado por $\vec{B}(\vec{r}) = \frac{3(\vec{m}\cdot\vec{r})\vec{r} - \vec{m}}{r^3}$ con $\boxed{\vec{m} = \frac{4\pi}{3} a^3 \vec{M}}$ (21)

Para $\vec{H}$ $\Rightarrow$ $\vec{H} = \vec{B} - 4\pi\vec{M}$ como $\nabla\cdot\vec{B} = 0 \Rightarrow \nabla\cdot\vec{H} = -4\pi\nabla\cdot\vec{M}$

Carga magnética y representa la fuente del campo magnético.

de (18) y (19) $\vec{B}_i = -2\vec{H}_i$ (22)

como $\mu = 1$ $\Rightarrow$ $\vec{H}_a = \vec{B}_a$ (23)



Líneas de $\vec{B}$ y líneas de $\vec{H}$ para una esfera uniformemente imanetizada. Las líneas de $\vec{B}$ son curvas cerradas, pero las líneas de $\vec{H}$ principian sobre la superficie de la esfera, donde está localizada la "carga" superficial de imanetización σ_M.

De la ecuación (19), se observa que la intensidad magnética dentro de la esfera es un campo desmagnetizante por lo tanto la esfera magnetizada está sometida a un propio campo desmagnetizante.

→ Bajo la acción de un campo eléctrico $\vec{H}$, un cuerpo material desarrolla en general momentos magnéticos sobre su superficie (polos libres), que producen en su interior un campo adicional, opuesto a $\vec{H}$. De este modo la intensidad del campo $\vec{H}$ en el interior de la materia difiere del valor $\vec{H}$ en el vacío. Este campo $\vec{H}_D$ es llamado CAMPO DESMAGNETIZANTE, y su intensidad es proporcional al valor de la magnetización $\vec{M}$. La intensidad del campo magnético interno en el material es por lo tanto:

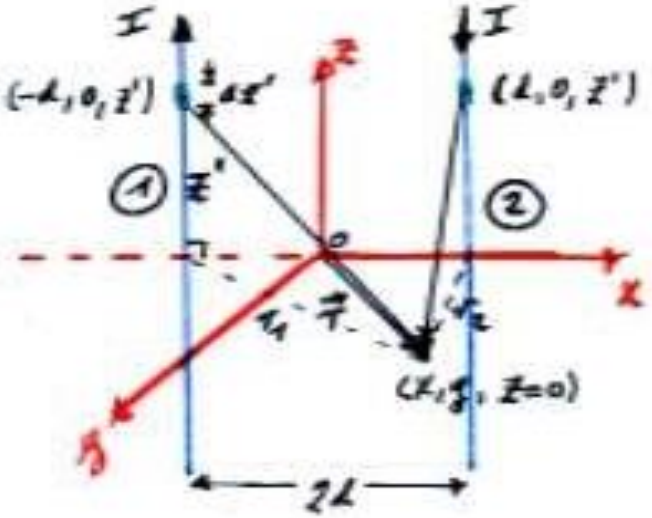
$$\vec{H}_{int} = \vec{H} - N_D \vec{M}$$

el factor desmagnetizante N_D depende de la forma del cuerpo y del ángulo entre el campo $\vec{H}$ y un eje de simetría; N_D varía entre 0 y 1 (ó entre 0 y 4π en el CGS). Por ejemplo, N_D es cero para un cilindro infinito, bajo la acción de un campo $\vec{H}$ paralelo a su eje; y es igual a $1/3$ para una esfera ($\frac{4\pi}{3}$ en el sistema CGS).

PROBLEMA 8.20 L-H-CH 4TA edición

Demuestre que el potencial vector magnético para dos alambres largos, rectos y paralelos que conducen una corriente de la misma intensidad I en sentidos opuestos, está dado por $\vec{A} = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)\hat{n}$ donde r_2 y r_1 son las distancias desde el punto del campo hasta los alambres, y $\hat{n}$ un vector unitario paralelo a los alambres.

SOLUCIÓN.



Por definición $\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_{\text{contorno}} \frac{\vec{J}\,dV'}{|\vec{r}-\vec{r}'|}$ (1)

utilizamos la simetría del anexo y dejamos $\vec{r} = (x, y, z=0)$.

$$|\vec{r}-\vec{r}'|_1 = \sqrt{(x+L)^2+y^2+z'^2} \quad (2)$$

$$|\vec{r}-\vec{r}'|_2 = \sqrt{(x-L)^2+y^2+z'^2} \quad (3)$$

y con $\vec{J}\,dV' \rightarrow I\,dz'\,\hat{e}_z$ (4)

(2) (3) y (4) en (1) $\Rightarrow$ $\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\left[\int_{-L}^{L} \frac{dz'}{\sqrt{(x+L)^2+y^2+z'^2}} - \int_{-L}^{L} \frac{dz'}{\sqrt{(x-L)^2+y^2+z'^2}}\right]\hat{e}_z$ (5)

Teniendo en cuenta que el integrando
es una función de z' e introduciendo

$$\left.\begin{aligned} r_1^2 &= (x+d)^2 + y^2 \\ r_2^2 &= (x-d)^2 + y^2 \end{aligned}\right\} (6)$$

(6) en (5)

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I}{2\pi}\left[\int_0^L \frac{dz'}{\sqrt{r_1^2+z'^2}} - \int_0^L \frac{dz'}{\sqrt{r_2^2+z'^2}}\right]\hat{e}_z \qquad (7)$$

$$\int_0^L \frac{dz'}{\sqrt{\rho_i^2+z'^2}} = \operatorname{arcsinh}\left(\frac{z}{\rho_i}\right)\Big|_0^L = \ln\left(\frac{1}{\rho_i}\left(L+\sqrt{L^2+\rho_i^2}\right)\right) \qquad (8)$$

(8) en (7)

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I}{2\pi}\left[\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\left(\frac{L+\sqrt{L^2+r_1^2}}{L+\sqrt{L^2+r_2^2}}\right)\right)\right]\hat{e}_z \qquad (9)$$

Tomando el límite cuando $L \to \infty$, nota 8

$$\lim_{L\to\infty} \vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I}{2\pi}\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)\hat{e}_z \qquad \vec{B} = \nabla \times \vec{A}$$

En el plano (x,y) las líneas equipotenciales son definidas por $\frac{r_2}{r_1} = cte.$
$A = 0$ sobre el eje y

PROBLEMA. (20)

Deriva la relación entre el momento magnético $\vec{m}$ y el momento angular de una partícula cargada. Considera que la partícula se mueve en un campo central.

Solución



TRAYECTORIA DE UNA PARTÍCULA EN UN CAMPO CENTRAL DE FUERZAS

El área a de la órbita cerrada para una partícula es:

$$a = \int da = \int \frac{|\vec{L}|}{2m}\, dt = \frac{|\vec{L}|}{2m}\int dt = \frac{|\vec{L}|}{2m}\, T \quad (*)$$

donde T es el periodo. Se ha hecho uso de que $\vec{L}$ es un vector constante (campo central de fuerzas).

Si q es la carga de la partícula, hay la corriente es $I = q/T$

Para una carga positiva q, $\vec{m}$ y $\vec{L}$ tienen la misma dirección, por lo tanto

$$\vec{m} = I a \frac{\vec{L}}{|\vec{L}|} = \frac{q}{T}\frac{|\vec{L}|T}{2m}\frac{\vec{L}}{|\vec{L}|} = \frac{q}{2m}\vec{L} \quad \#$$

En la mecánica cuántica, $|\vec{L}| = n\hbar$, donde $\hbar = \frac{h}{2\pi} = 1.05 \times 10^{-34}\ J \cdot s$ y h es la constante de PLANCK. $n = 0, 1, 2, \ldots$ en la mecánica cuántica el momento angular, por lo tanto el momento magnético es un multiplo de $m_B = \frac{q\hbar}{2m}$

llamado el magneton de BOHR para la particula de carga q y masa m.

(*) De la ecuación (8-21) del Tipler

$$\vec{A} = \frac{1}{2}\oint_C \vec{r} \times d\vec{l} = \frac{1}{2}\oint_C \vec{r} \times \frac{d\vec{l}}{dt}dt = \frac{1}{2}\oint_C \vec{r} \times \vec{v}\,dt$$

$$= \frac{1}{2}\oint \vec{r} \times \frac{m\vec{v}}{m}dt = \frac{1}{2}\oint_C \frac{\vec{L}}{m}dt = \frac{\vec{L}}{2m}T$$

$\vec{p} = m\vec{v}$

$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$

$$|\vec{A}| = \frac{|\vec{L}|T}{2m}$$

LakeShore.
Measurement and Control Technologies
Lake Shore Cryotronics, Inc.
64 East Walnut St., Westerville, Ohio 43081-2399 USA
Telex: 24-5415 CRYOTRON WTVL
Fax: (614) 891-1392
Telephone: (614) 891-2243

Units for Magnetic Properties

Quantity	Symbol	Gaussian & cgs emu[a]	Conversion factor, C[b]	SI & commonly used units
Magnetic flux density, magnetic induction	B	gauss (G)[d]	10^{-4}	tesla (T), Wb/m^2
Magnetic flux	Φ	maxwell (Mx), $G \cdot cm^2$	10^{-8}	weber (Wb), volt second (V·s)
Magnetic potential difference, magnetomotive force	U, F	gilbert (Gb)	$10/4\pi$	ampere (A)
Magnetic field strength, magnetizing force	H	oersted (Oe),[e] Gb/cm	$10^3/4\pi$	A/m[f]
(Volume) magnetization[g]	M	oersted[h]	10^3	A/m
(Volume) magnetization	$4\pi M$	G	$10^3/4\pi$	A/m
Magnetic polarization, intensity of magnetization	J, I	emu/cm^3	$4\pi \times 10^{-4}$	T, Wb/m^2
(Mass) magnetization	σ, M	emu/g	1 $4\pi \times 10^{-3}$	$A \cdot m^2/kg$ $Wb \cdot m/kg$
Magnetic moment	m	emu, erg/G	10^{-3}	$A \cdot m^2$, joule per tesla (J/T)
Magnetic dipole moment	j	emu, erg/G	$4\pi \times 10^{-10}$	$Wb \cdot m$
(Volume) susceptibility	χ, κ	dimensionless, emu/cm^3	4π $(4\pi)^2 \times 10^{-7}$	dimensionless henry per meter (H/m), Wb/(A·m)
(Mass) susceptibility	χ_ρ, κ_ρ	cm^3/g, emu/g	$4\pi \times 10^{-3}$ $(4\pi)^2 \times 10^{-10}$	m^3/kg $H \cdot m^3/kg$
(Molar) susceptibility	χ_{mol}, κ_{mol}	cm^3/mol, emu/mol	$4\pi \times 10^{-6}$ $(4\pi)^2 \times 10^{-13}$	m^3/mol $H \cdot m^2/mol$
Permeability	μ	dimensionless	$4\pi \times 10^{-7}$	H/m, Wb/(A·m)
Relative permeability[i]	μ_r	not defined		dimensionless
(Volume) energy density, energy product[j]	w	erg/cm^3	10^{-1}	J/m^3
Demagnetization factor	D, N	dimensionless	$1/4\pi$	dimensionless

a. Gaussian units and cgs emu are the same for magnetic properties. The defining relation is $B = H + 4\pi M$.
b. Multiply a number in Gaussian units by C to convert it to SI (e.g., $1\ G \times 10^{-4} = 10^{-4}\ T$; $1\ G = 10^{-4}\ T$).
c. SI (*Système International d'Unités*) has been adopted by the National Bureau of Standards. Where two conversion factors are given, the upper one is recognized under, or consistent with, SI and is based on the definition $B = \mu_0(H + M)$, where $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$ H/m. The lower one is not recognized under SI and is based on the definition $B = \mu_0 H + J$, where the symbol I is often used in place of J.
d. 1 gauss = 10^5 gamma(s).
e. Both oersted and gauss are expressed as $cm^{1/2} \cdot g^{1/2} \cdot s^{-1}$ in terms of base units.
f. A/m is often expressed as "ampere-turn per meter" when used for magnetic field strength.
g. Magnetic moment per unit volume.
h. The designation "emu" is not a unit.
i. Recognized under SI even though based on the definition $B = \mu_0 H + J$. See footnote c.
j. $w = \frac{1}{2} B \cdot H$ in SI; w is equal in Gaussian units.
k. $B \cdot H$ and $\mu_0 H \cdot H$ have SI units J/m^3; $M \cdot H$ and $B \cdot H/4\pi$ have Gaussian units erg/cm^3.

R. B. Goldfarb and F. R. Fickett, U.S. Department of Commerce, National Bureau of Standards, Boulder, Colorado 80303, March 1985
NBS Special Publication 696 For sale by the Superintendent of Documents, U.S. Government Printing Office, Washington, DC 20402

9.9 CIRCUITOS DE CORRIENTE QUE CONTIENEN MEDIOS MAGNÉTICOS

- En el Capítulo 8 se estudió los campos magnéticos producidos por circuitos de corriente en el vacío, siendo un ejemplo el de un devanado uniforme toroidal con N vueltas, que conduce una corriente de intensidad I, vea y resuelva el problema 8.19 del Texto. Si queremos resolver nuevamente el problema del TOROIDE, pero ahora con la región interior del devanado lleno de un material ferromagnético que asumimos sea homogéneo, isotrópico y originalmente desmagnetizado, debemos usar la ec. (9-31), o sea



DEVANADO TOROIDAL

$$\oint_S \nabla \times \vec{H} \cdot \hat{n}\, da = \oint_C \vec{H} \cdot d\vec{\ell} = \int_S \vec{J} \cdot \hat{n}\, da = I_{TOTAL} \qquad (1)$$

$$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{\ell} = \oint_C H_t\, d\ell = H_t \ell = NI \quad \therefore \quad \boxed{H_t = \frac{NI}{\ell}} \qquad (2)$$

Con $\ell = 2\pi r$, ahora usando la ec.: $\vec{H} = \frac{1}{\mu_0}\vec{B} - \vec{M}$

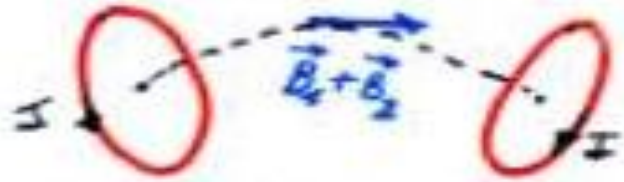
$$\Rightarrow \boxed{B_t = \frac{\mu_0 NI}{\ell} + \mu_0 M_t} \qquad (3)$$

pero para el vacío era $B_{0t} = \frac{\mu_0 N I}{\ell}$, existe un término adicional $\mu_0 M_t$. (Solo podemos obtener la componente tangencial de $\vec{B}$ o $\vec{H}$)

→ Por la ecuación $\vec{H}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi}\int_V \underbrace{\frac{\vec{J}\times(\vec{r}-\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3}\,dv'}_{\text{corrientes de transporte}} - \underbrace{\nabla\varphi^*(\vec{r})}_{\text{material magnetizado}}$ (4)

se ve que $\exists$ dos clases de fuente para $\vec{H}$

→ En el devanado toroidal solo se produce un campo tangencial



Naturaleza axial del campo en un devanado toroidal

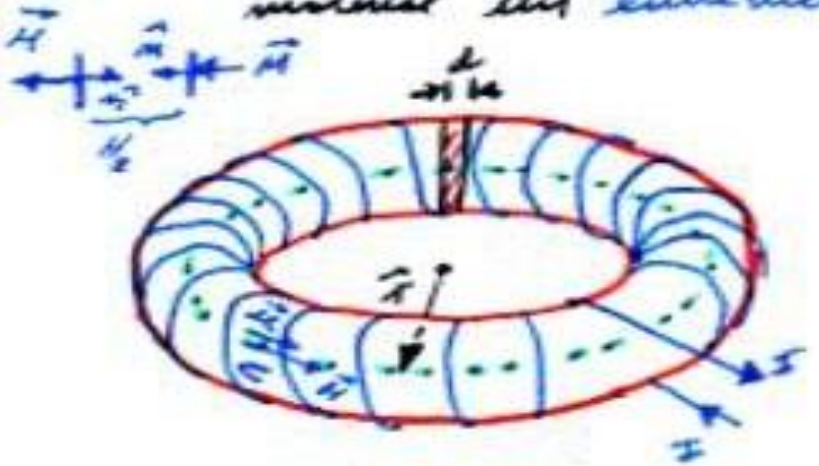
La segunda fuente de $\vec{H}$ proviene de las contribuciones de las dos sedades de polos: $\rho_M = -\nabla\cdot\vec{M}$ (5)

y $\sigma_M = \vec{M}\cdot\hat{n}$. (6)

(Recordar: $\varphi^*(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi}\int_{S_0}\frac{\sigma_M(\vec{r}\,')\,da'}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} + \frac{1}{4\pi}\int_{V_0}\frac{\rho_M(\vec{r}\,')\,dv'}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}$) (7)

Como el material ferromagnético del Toroide es isótropo, (23)
$\vec{M}$ tendrá el mismo sentido que $\vec{H}$ ($H_t \to M_t$), por lo tanto no existen superficies en el toroide que sean perpendiculares a $\vec{M}$ $\therefore$ $\sigma_M = 0$ y $\nabla \cdot \vec{M} = 0$ ($\therefore \rho_M = 0$). El resultado de interés es que el material magnetizado no contribuye a $\vec{H}$ luego la ecuación (3) da todo el campo magnético.

→ El problema anterior se complica si hacemos en el material un entrehierro lleno de aire y de ancho d.



Devanado Toroidal sobre un anillo de material magnético con un entrehierro lleno de aire.

En este problema la ley de circuitos de Ampere no es suficiente para determinar $\vec{H}$ porque los argumentos de simetría no pueden considerarse para decir que $\vec{H}$ es igual en todos los puntos de una trayectoria circular.

De la ecuación (4) vemos que hay dos contribuciones a la intensidad magnética, una de las corrientes de transporte y otra de la magnetización.

Las corrientes de transporte dan $H_1 = \frac{NI}{l}$ (8)

El problema consiste en calcular H_2 ó el término $\nabla\phi^*$ y consideramos que sea válido la suposición de que se tiene una magnetización uniforme tangencial M en todo el material ferromagnético ∴
$\sigma_M = \nabla \cdot \vec{M} = 0$ pero $\sigma_M = \pm M$ en las caras de los polos que limitan con el entrehierro lleno de aire. ∴

$$(9)\quad \begin{cases} H_2 = M & \text{(en el entrehierro)} \\ H_2 = 0 & \text{(en cualquier otro sitio)} \end{cases}$$

Si tomamos la ley de Ampere, esta es:

$$\oint_C \vec{H}\cdot d\vec{l} = \oint (\vec{H}_1 + \vec{H}_2)\cdot d\vec{l} = NI + Hd \neq NI \qquad (10)$$

Ecuaciones (8) y (9) no son completas con (10), a menos que d sea muy pequeño. Una mejor aproximación sería:

$$(11)\quad \begin{cases} H_2 = M\left(1 - \frac{d}{l}\right) & \text{(en el entrehierro)} \\ H_2 = -M\frac{d}{l} & \text{(en el material)} \end{cases}$$

que no solamente satisface la ley de circuito de Ampere, sino que también tiene en cuenta la continuidad de la componente normal de $\vec{B}$ a través de las caras de los polos; confirmando

Las ecuaciones (9) y (11) en $\vec{B} = \mu_0(\vec{H}+\vec{M})$, encontramos que:

$$B = \frac{\mu_0 NI}{\ell} + \mu_0 M\left(1 - \frac{d}{\ell}\right) \qquad (12)$$

tanto en el entrehierro como en el material magnético.

Para resolver el problema, solo falta Bower:

$$\vec{M} = \chi_m(\vec{H})\,\vec{H} \qquad (13)$$

que para el "hierro dulce" puede considerarse constante.

9.10 CIRCUITOS MAGNÉTICOS

→ Si todo el flujo magnético asociado con una determinada distribución de corriente está confinado a una trayectoria bastante bien definida, estaremos hablando de un circuito magnético, que puede ser un toroide, transformadores, motores, generadores y relays.

→ El análisis de dichos circuitos es simple si explotamos la analogía entre circuitos eléctricos y magnéticos y que están resumidos en la tabla del artículo (25) por lo que se recomienda al lector hacer un alto aquí y analizar dicha tabla y el siguiente circuito (Fig I):

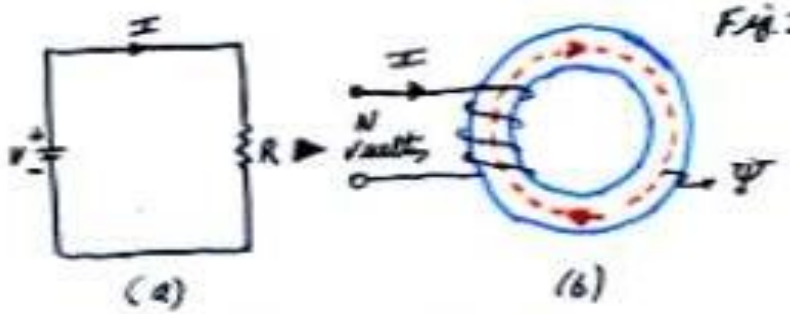


Fig I Analogía entre un circuito eléctrico (a) y un circuito magnético (b).

(Ver Tabla I)

→ Es necesario definir la **fuerza magnetomotriz** (fmm) $\mathcal{F}$ en amper-vuelta, como:

$$\mathcal{F} = NI = \oint \vec{H} \cdot d\vec{l} \qquad (14)$$

La fmm en circuitos magnéticos es generalmente usualmente obtenida usando corriente I.

→ Se define la **reluctancia** $\mathcal{R}$ en amper-vuelta/weber como

$$\mathcal{R} = \oint \frac{dl}{\mu A} \qquad (15)$$

o

$$\mathcal{R} = \frac{l}{\mu A} \qquad (16)$$

donde l es la longitud media y A es el área de la sección transversal.

El recíproco de la reluctancia es la **permeancia** $\mathcal{P}$.

El equivalente de la ley de OHM ($V = IR$) será :

$$\mathcal{F} = \Psi \mathcal{R} \quad (16)$$

Table I Analogy between Electric and Magnetic Circuits

Electric	Magnetic
Conductivity σ	Permeability μ
Field intensity E	Field intensity H
current $I = \int J \cdot dS$	Magnetic flux $\Psi = \int B \cdot dS$
Current density $J = \frac{I}{S} = \sigma E$	Flux density $B = \frac{\Psi}{S} = \mu H$
Electromotive force (emf) V	Magnetomotive force (mmf) $\mathcal{F}$
Resistance R	Reluctance $\mathcal{R}$
Conductance $G = \frac{1}{R}$	Permeance $\mathcal{P} = \frac{1}{\mathcal{R}}$
Ohm's law $R = \frac{V}{I} = \frac{\ell}{\sigma S}$	Ohm's law $\mathcal{R} = \frac{\mathcal{F}}{\Psi} = \frac{\ell}{\mu S}$
or $V = E\ell = IR$	or $\mathcal{F} = H\ell = \Psi\mathcal{R} = NI$
Kirchhoff's laws:	Kirchhoff's laws:
$\Sigma I = 0$	$\Sigma \Psi = 0$
$\Sigma V = \Sigma RI = 0$	$\Sigma \mathcal{F} = \Sigma \mathcal{R}\Psi = 0$

Para n circuitos magnéticos elementales en serie:

$$\Phi_1 = \Phi_2 = \Phi_3 = \cdots = \Phi_m \quad y \quad \mathcal{F} = \mathcal{F}_1 + \mathcal{F}_2 + \mathcal{F}_3 + \cdots + \mathcal{F}_m \quad (17)$$

en paralelo $\rightarrow$ $\Phi = \Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_3 + \cdots + \Phi_m$ y $\mathcal{F}_1 = \mathcal{F}_2 = \mathcal{F}_3 = \cdots = \mathcal{F}_m$ (18)

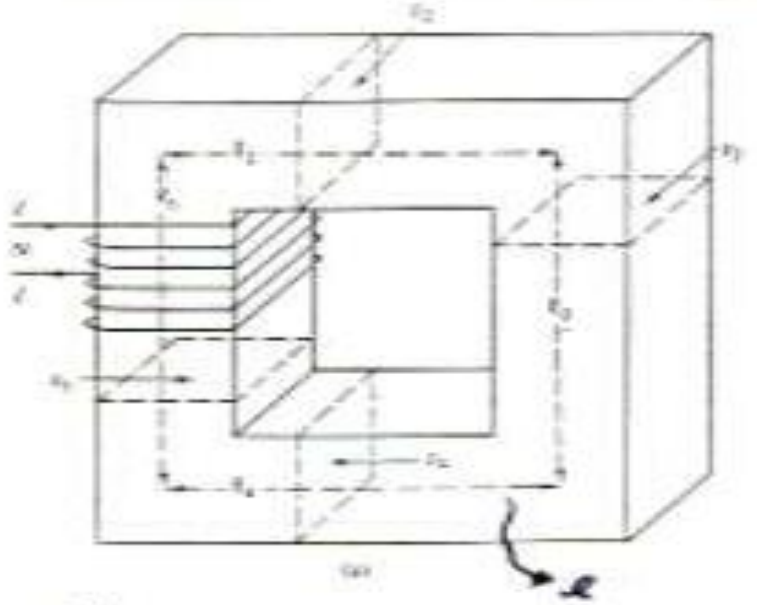


Fig II

Ejemplo. Consideramos el circuito de la figura II, en serie:

$$\Phi \cdot \left(\frac{l_1}{\mu_0 S_1} + \frac{l_2}{\mu_0 S_2} + \frac{l_3}{\mu_0 S_3} + \frac{l_4}{\mu_0 S_4} \right) = NI \quad (19)$$

- usando la def de reluctancia

$$\Phi = \frac{NI}{\mathcal{R}_1 + \mathcal{R}_2 + \mathcal{R}_3 + \mathcal{R}_4} = \frac{NI}{\mathcal{R}} \quad (20)$$

donde

$$\mathcal{R} = \mathcal{R}_1 + \mathcal{R}_2 + \mathcal{R}_3 + \mathcal{R}_4 = \frac{l_1}{\mu_0 S_1} + \frac{l_2}{\mu_0 S_2} + \frac{l_3}{\mu_0 S_3} + \frac{l_4}{\mu_0 S_4} \quad (21)$$



Figure II (a) Series magnetic circuit containing four legs, each of constant cross section. (b) Analogous electrical circuit.

usando la ley de ampere: $\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{l} = I_{TOTAL} = NI$

$$\Phi \cdot (\mathcal{R}_1 + \mathcal{R}_2 + \mathcal{R}_3 + \mathcal{R}_4) = NI = H_1 l_1 + H_2 l_2 + H_3 l_3 + H_4 l_4 \quad (22)$$

$$\oint_l \vec{H} \cdot d\vec{l} = \int_{l_1} \vec{H}_1 \cdot d\vec{l}_1 + \int_{l_2} \vec{H}_2 \cdot d\vec{l}_2 + \int_{l_3} \vec{H}_3 \cdot d\vec{l}_3 + \int \vec{H}_4 \cdot d\vec{l}_4$$

Ejemplo de un circuito magnético en paralelo (Fig III)

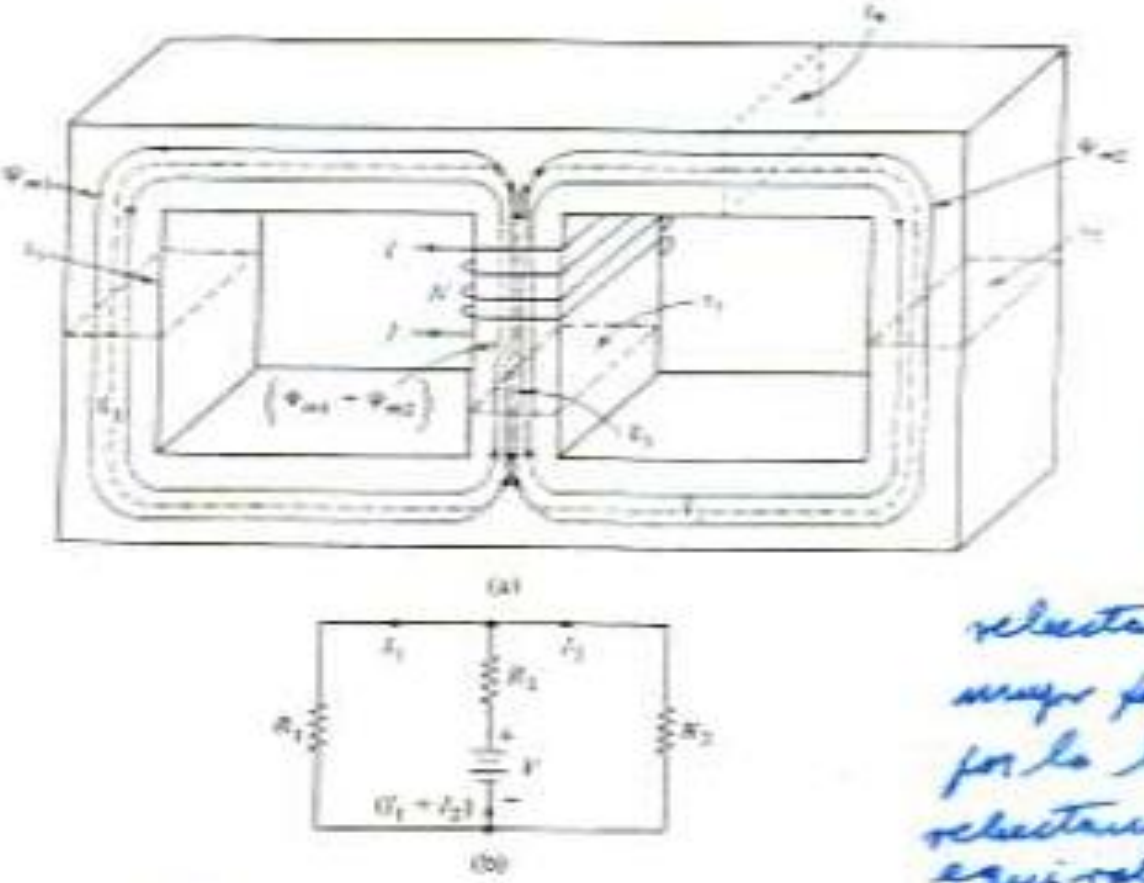


Fig III

Figure III (a) Parallel magnetic circuit excited by a magnetomotive force on the center leg. (b) Analogous electric circuit.

Note que si el flujo magnético encuentra dos trayectorias paralelas, una de alta reluctancia R_a y otra de baja reluctancia $R_b \Rightarrow$ la mayor parte de flujo pasará por la trayectoria de baja reluctancia y la reluctancia equivalente de la combinación será:

$$R = R_a R_b / R_a + R_b$$

→ Cuando se tienen materiales ferromagnéticos, aparecen algunas dificultades, pues $\mu = \mu(H)$, y no conocemos H en el material hasta que el problema del circuito esté completamente resuelto y Ψ determinado. Para esto se usa el método ITERATIVO:

(1) Como primera aproximación, podemos considerar $H = \frac{NI}{l_{TOTAL}}$, donde l_{TOTAL} es la longitud total del circuito.



(2) La permeabilidad de cada material del circuito se obtiene para este valor de H a partir de la curva de magnetización adecuada.

(3) Se calcula la reluctancia total del circuito y

(4) el flujo Ψ. $\mathcal{F}$ se calcula con la ecuación $\mathcal{F} = \frac{\Phi_{MMF}}{R}$

(5) A partir de $\mathcal{F}$ se hallan las intensidades magnéticas en los diversos elementos y se vuelve a determinar las permeabilidades

(6) El procedimiento se repite desde (3).