Usaremos los siguientes resultados:

Sea $A$ una matriz de $n \times n$ y $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ sus auto-valores, entonces se cumplen las siguientes afirmaciones:

a) $Tr(A) = \lambda_1 + \cdots + \lambda_n$

b) $det(A) = \lambda_1 \cdots \lambda_n$

c) Para la matriz $A + I$ sus auto-valores son $\lambda_1 + 1, \ldots, \lambda_n + 1$

d) para $k$ entero tomando $A^k$ sus auto-valores son $\lambda_1^k, \ldots, \lambda_n^k$

Sean $x, y, z$ los autovalores de $A$, sabemos que $Tr(A) = -4$ y $A^2 + 2A$ tiene auto-valores $-1, 3, 8$.

Sabemos que $x + y + z = -4$, Ahora, tambien sabemos que $Tr(A^2 + 2A) = -1 + 3 + 8 = 10$, luego $Tr(A^2) + 2Tr(A) = 10$ por lo que $Tr(A^2) = 18$, luego como los autovalores de $A^2$ son $x^2, y^2, z^2$ tenemos que $x^2 + y^2 + z^2 = 18$

Por otro lado sabemos que $Det(A^2 + 2A) = -1 * 3 * 8 = -24$, pero $A^2 + 2A = A(A + 2I)$ luego

$$Det(A^2 + 2A) = Det(A(A + 2I)) = Det(A)Det(A + 2I) = -24$$

. Dado que $Det(A) = xyz$ y como los autov-alores de $A + 2I = A + I + I$ son $x + 2, y + 2, z + 2$ tenemos que $xzy(x + 2)(y + 2)(z + 2) = -24$

entonces tenemos las ecuaciones:

1) $x + y + z = -4$

2) $x^2 + y^2 + z^2 = 18$

3)

$$x^2y^2z^2 + 2x^2y^2z + 2x^2yz^2 + 4x^2yz + 2xy^2z^2 + 4xy^2z + 4xyz^2 + 8xyz = -24$$

Usando 1) y 2) tenemos que $(x + y + z)^2 = 16$ y como $x^2 + y^2 + z^2 = 18$ podemos obtener $18 + 2xy + 2xz + 2yz = 16$ luego $2xy + 2xz + 2yz = -2$, es decir que $xy + xz + yz = -1$, luego

En 3) tenemos al factorizar

$$x^2y^2z^2 + 2xyz(xy + xz + yz) + 4xyz(x + y + z) + 8xyz = -24$$

Sustituyendo el valor de 1) y lo obtenido anteriormente tenemos que

$$x^2y^2z^2 + 2xyz(-1) + 4xyz(-4) + 8xyz = -24$$

Con que se obtiene

$$x^2y^2z^2 - 2xyz - 16xyz + 8xyz = -24$$

De donde simflicando tenemos: $x^2y^2z^2 - 10xyz = -24$, con el cambio de variable $u = xyz$ esta se convierte en la ecuacion $u^2 - 10u + 24 = 0$ que es equivalente a $(u-4)(u-6) = 0$, de donde obtenemos que $xyz = 4$ o $xyz = 6$.

Como $xyz > 0$ y $x+y+z < 0$ entonces al menos un auto-valor debe ser negativo, pues de otra manera $x+y+z > 0$, luego no pueden ser todos negativos pues $xyz > 0$ y por el mismo motivo no puede ser solamente un auto-valor negativo pues si no $xyz < 0$. Por lo tanto deben existir 2 autovalores negativos reales y 1 auto-valor positivo.