مسائل النمو و الاضمحلال:

أفرض $N(t)$ تشير الى كمية المادة (أو الانتشار) الذي يكون أما ينمو أو يضمحل . أذا فرضنا بأن $\frac{dN}{dt}$ معدل زمن التغير لتلك الكمية من المادة يكون متناسب الى كمية خطورة المادة أذن

$$\frac{dN}{dt} = kN$$
$$OR$$
$$\frac{dN}{dt} - kN = 0$$

حيث k ثابت التناسب.
نحن نفرض بأن $N(t)$ تكون قابلة للاشتقاق (فهي مستمرة) بالنسبة لدالة الزمن.

مثال:
مادة فعالة من الاشعاعات تضمحل بمعدل يتناسب مع الكمية الحالية بدايتا هناك 50 mg من المادة الحالية وبعد ساعتين لوحظ بأن المادة قد فقدت 10% من كتلتها الاصلية جد
1- معادلة كتلة المادة المتبقية عند أي وقت
2- كتلة المادة بعد 4 ساعات
3- الزمن الذي به تكون المادة قد أضمحلت الى نصف كتلتها الاصلية

الحل :
1- ليكن N هي المادة عند أي وقت t لذلك سوف يكون

$$\frac{dN}{dt} - kN = 0$$

وهذة هي معادلة خطية حلها هو

$$N = ce^{kt} \quad \text{.....(1)}$$

عندما يكون الوقت $t = 0$ المادة المعطاة $N = 50$ لذلك نعوض في (1) ينتج

$$50 = ce^{k(0)}$$
$$c = 50$$
$$N = 50e^{kt} \quad \text{.....(2)}$$

بعد مرور $t = 2$ فقدت المادة 10% من كتلتها $N = 50 - 5 = 45$ نعوض في (2) و ينتج

$$45 = 50e^{2k}$$
$$k = \frac{1}{2}\ln\frac{45}{50}$$
$$= -0.053$$

نعوض في المعادلة (2) ينتج

$$N = 50e^{-0.053t} \quad \text{.....(3)}$$

2- نحن نحتاج الى الكتلة بعد مرور 4 ساعات

$$N = 50e^{(-0.053)(4)}$$
$$= 50(0.809)$$
$$= 40.5$$

3- نحن نحتاج الزمن t عندما تكون $N = \frac{50}{2} = 25$ نعوض في (3) ينتج

$$25 = 50e^{-0.053t}$$
$$-0.053t = \ln\frac{1}{2}$$
$$t = 13$$

مثال:
محيط البكتريا ينمو بمعدل يتناسب مع الكمية الحالية بعد مرور ساعة واحدة 1000 جديلة من البكتريا لوحضت في الوسط و بعد 4 ساعات 3000 جديلة , أوجد
1- معادلة لعدد الجدايل من البكتريا الحالية في الوسط عند أي وقت
2- عدد الجدايل للبكتريا أصلا في الوسط

الحل:

$$\frac{dN}{dt} - kN = 0$$
$$N = ce^{kt} \quad \text{.....(1)} \quad \text{-1}$$

عندما $t = 1$ و $N = 1000$ نعوض
$$1000 = ce^{k} \quad \text{.....(2)}$$

عندما $t = 4$ و $N = 3000$ نعوض

$$3000 = ce^{4k} \quad \text{.....(3)}$$

من المعادلة (2) و (3) ينتج

$$1000 = ce^{k}$$
$$c = \frac{1000}{e^{k}}$$

نعوض في (3) ينتج

$$3000 = \frac{1000}{e^k} e^{4k}$$

$$k = \frac{1}{3} \ln 3$$

$$= 0.366$$

$$c = 1000e^{-0.366}$$

$$= 694$$

نعوض c و k في معادلة (1) ينتج

$$N = 694e^{0.366t} \text{.....(4)}$$

2- نحتاج N عند $t = 0$ نعوض في معادلة (4) ينتج

$$N = 694e^{(0.366)(0)}$$

$$= 694$$

تطبيقات على المعادلات التفاضلية من الرتبة الاولى و الدرجة الاولى

مسائل التبريد:
قانون نيوتن للتبريد ينص بأن معدل الزمن لتغيير درجة حرارة الجسم يتناسب مع فارق درجة الحرارة بين الجسم و محيطة.
أفرض T تشير الى درجة حرارة الجسم و أفرض T_m تشير الى درجة حرارة المحيط. ثم معدل الزمن لتغيير درجة حرارة الجسم هو $\frac{dT}{dt}$ و قانون نيوتن للتبريد يمكن أن يكون كالاتي :

$$\frac{dT}{dt} = -k(T - T_m)$$

$$OR$$

$$\frac{dT}{dt} + kT = kT_m$$

حيث k هو ثابت التناسب

مثال :
أنبوب معدني درجة حرارته 100^0F موضوع في غرفة ثابتة الحرارة 0^0F بعد مرور 20 دقيقة أصبحت درجة حرارة الانبوب المعدني 50^0F أوجد
1- الزمن عندما تكون درجة حرارة الانبوب المعدني 25^0F .
2- درجة حرارة الانبوب بعد مرور 10 دقائق.

الحل:
بما أن درجة حرارة الغرفة 0^0F يعني $T_m = 0$ ومنها تصبح المعادلة

$$\frac{dT}{dt} + kT = 0$$

وهذة هي معادلةخطية و منها

$$T = ce^{-kt} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

عندما تكون درجة حرارة الانبوب $T = 100$ في زمن $t = 0$ اذن تصبح المعادلة (1)

$$100 = ce^{-k(0)}$$

$$c = 100$$

نعوض هذة النتيجة في (1) تصبح

$$T = 100e^{-kt} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

وعندما تكون $t = 20$ و $T = 50$ لذلك تصبح (2)

$$50 = 100e^{-kt}$$

$$k = \frac{-1}{20}\ln\frac{50}{100}$$

$$= \frac{-1}{20}(-0.693)$$

$$= 0.035$$

$$T = 100e^{-0.0035t} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

1- عندما $T = 25$ نعوض في (3)

$$25 = 100e^{-0.035t}$$

$$-0.035t = \ln \frac{1}{4}$$

$$t = 39.6$$

2- عندما $t = 10$ نعوض في (3)

$$T = 100e^{(-0.035)(10)}$$

$$T = 100(0.705) = 70.5^0 F$$

مثال :

جسم بدرجة حرارة $50^0 F$ موضوع خارجا حيث درجة الحرارة $100^0 F$ وبعد مرور 5 دقائق أصبحت حرارة الجسم $60^0 F$ أوجد

1- ما الفترة التي يستغرقها الجسم حتى يصل لدرجة حرارة $75^0 F$

2- درجة حرارة الجسم بعد 20 دقيقة

الحل:

عندما تكون درجة حرارة المحيط $T_m = 100$ سوف تكون المعادلة

$$\frac{dT}{dt} + kT = k100$$

هذة المعادلة هي خطية يمكن حلها

$$T = ce^{-kt} + 100 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

عندما $T = 50$ و $t = 0$ تصبح (1)

$$50 = ce^{-k(0)} + 100$$

$$and$$

$$c = -50$$

نعوض هذة النتيجة في معادلة (1) فتصبح

$$T = -50e^{-kt} + 100 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

عندما $t = 5$ سوف تكون $T = 60$ ومن (2)

$$60 = -50e^{-k(5)} + 100$$

$$-40 = -50e^{-k5}$$

$$k = \frac{-1}{5} \ln \frac{40}{50}$$

$$= \frac{-1}{5}(-0.223) = 0.045$$

نعوض هذة النتيجةفي معادلة (2) نحصل على درجة الحرارة عند أي وقت

$$T = -50e^{-0.045t} + 100 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

1- نحن نحتاج t عندما $T = 75$ نعوض في (3)

$$75 = -50e^{-0.045t} + 100$$

$$e^{-0.045t} = \frac{1}{2}$$

$$-0.045t = \ln\frac{1}{2}$$

$$t = 15.4$$

2-نحن نحتاج T عندما $t = 20$ نعوض في (3)

$$T = -50e^{(-0.045)(20)} + 100$$

$$= -50(0.41) + 100$$

$$= 79.5^0 F$$