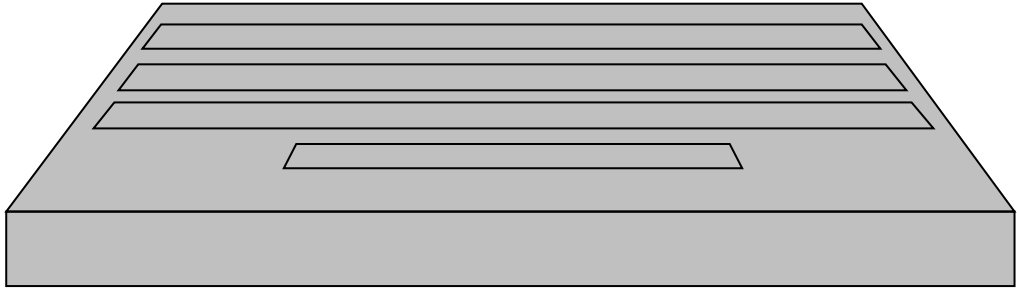


الوحدة الأولى
المستقيم والدائرة
والقطع المخروطي



محتويات الوحدة

رقم الصفحة	الموضوع
	المقدمة
	تمهيد
	أهداف الوحدة
	1. المستوى الديكارتي
	1.1 النظام الإحداثي المتعامد
	2.1 المسافة بين نقطتين
	2. الخط المستقيم
	1.2 تعريف الخط المستقيم
	2.2 ميل الخط المستقيم
	3.2 معادلة الخط المستقيم
	4.2 معادلة الخط المستقيم المار بين نقطتين
	5.2 حالات خاصة للخط المستقيم
	6.2 الصيغة العامة للخط المستقيم
	3. التوازي والتعامد
	1.3 التوازي
	2.3 التعامد
	4. البعد بين نقطتين وخط مستقيم
	5. المحل الهندسي
	6. الدائرة
	1.6 صور وعادلة الدائرة

	2.6 مماس الدائرة
	7. القطع المخروطي
	الخلاصة
	لمحة مسبقة عن الوحدة التالية
	إجابات التدريبات
	مسرد المصطلحات
	المراجع

المقدمة

تمهيد

عزيزي الدارس، مرحباً بك في هذه الوحدة الأولى من مقرر الهندسة التحليلية وهي بعنوان "المستقيم والدائرة والقطع المخروطي".

إن لهذه أهمية كبيرة فمنذ القدم عرف اليونان المستقيم واستخدموه للتعبير عن الاعداد الحقيقية الموجبة. ثم جاء ديكارت الذي عمل على تمثيل نقاط المستوى R^2 وبهذا الاسلوب أصبح من السهل وصف الخط المستقيم بمعادلة جبرية والتي لها كثير من التطبيقات في العلوم الطبيعية والإنسانية كالتمثيل البياني للعلاقات الخطية والمتباينات والبرمجة الخطية ويرها.

أما القطوع المخروطية فقد استعملت لحل المعادلات التكعيبية ودراسة حركة الكواكب. وقد ركزنا في هذه الوحدة على الناحية النظرية، أما الناحية التطبيقية فقد تركناها للوحدات القادمة من هذا المقرر.

وقد أوردنا في هذه الوحدة الكثير من الأمثلة المحولة لتسهيل على الدارس دراسة هذه الوحدة.

كما وضعنا تدريبات متنوعة وأسئلة للتقويم الذاتي وارفقنا حلولاً لها تقع في نهاية الوحدة علاوة على الأشكال والرسومات التوضيحية. وأخيراً نتمنى لك التوفيق في فه هذه الوحدة.

أهداف الوحدة



يتوقع منك أخي الدارس بعد فراغك من دراسة هذه الوحدة أن تكون قادراً على أن:

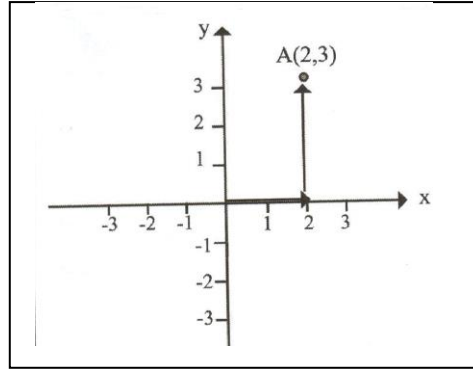
- 1- ترسم المستوى الديكارتي بمحورية x و y .
- 2- تعين النقط في المستوى الديكارتي.
- 3- تشتق قانون المسافة بين نقطتين في المستوى، وتجري تطبيقات عليه.
- 4- تعرف ميل الخط المستقيم.
- 5- تشتق معادلات الخط المستقيم المختلفة.
- 6- تحدد شروط توازي مستقيمين وتعامدهما، وتجد ميل مستقيم يوازي مستقيم آخر أو يعامده.
- 7- تشتق قانون بعد نقطة عن مستقيم معلوم وتطبيقه.
- 8- تشرح مفهوم المحل الهندسي.
- 9- تشتق معادلة الدائرة بصورها المختلفة.
- 10- تشتق معادلة مماس الدائرة.
- 11- تحسب طول المماس المرسوم لدائرة من نقطة خارجها.
- 12- تتعرف مفهوم القطع المخروطي.

1. المستوى الديكارتي

1.1 النظام الإحداثي المتعامد

عزيزي الدارس، لقد درست في مراحل التعليم السابقة النظام الإحداثي المتعامد وعرفت أنه يتكون من تقاطع محورين كما في الشكل (1).

الشكل (1)



حيث أن المحور الأفقي يسمى x والمحور العمودي يسمى y ونقطة تقاطع المحورين تسمى نقطة الأصل، والمستوى الناتج يسمى المستوى الديكارتي أو المستوى الإحداثي. كل نقطة في المستوى الإحداثي تقابل زوجاً مرتباً من الأعداد الحقيقية، مسقطه الأول يسمى الإحداثي x ومسقطه الثاني يسمى الإحداثي y ، ويرمز له (x, y) وكل زوج مرتب من الأعداد الحقيقية يقابل نقطة في المستوى وكل نقطة في المستوى تمثل زوجاً مرتباً. لتعيين النقطة التي تمثل الزوج المرتب $A(2, 3)$ في المستوى الإحداثي نبدأ من نقطة الأصل ونتحرك إلى اليمين بمقدار وحدتين، ثم نتحرك إلى الأعلى بمقدار (3) وحدات لتصل إلى النقطة المطلوبة A كما هو موضح بالشكل (1).

مثال (1):

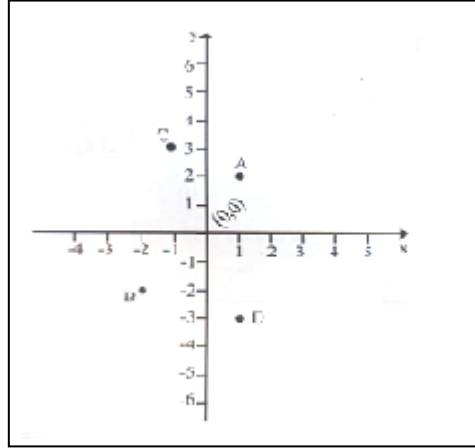
عين على المستوى الديكارتي النقاط التالية:

$O(0,0), A(1,2), B(-2,-2), C(-1,3), D(1,-3)$

الحل:

أنظر الشكل (2):

الشكل (2)



النقطة $O(0,0)$ تسمى نقطة الأصل وهي نقطة تقاطع المحورين x و y

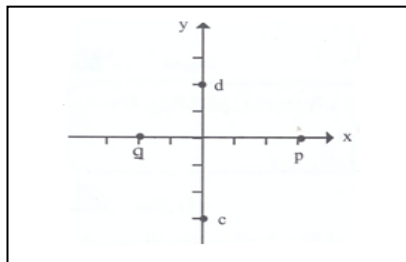
مثال (2):

عين النقاط $p(3,0), q(-2,0), d(0,2), c(0,-3)$ في المستوى الديكارتي

(ماذا تستنتج؟).

الحل: أنظر الشكل (3)

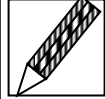
الشكل (3)



لاحظ ن النقاط تقع على محور x أو على محور y بصور عامة:
 ؟ النقطة التي تقع على محور x تكون إحداثياتها $(x,0)$.
 ؟ النقطة التي تقع على محور y تكون إحداثياتها $(0,y)$

تدريب (1)

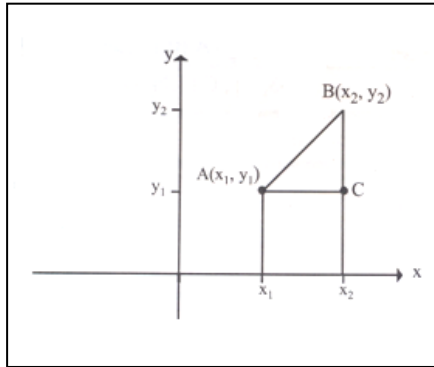
ارسم محورين متعامدين وعيّن في المستوى الديكارتي النقط التالية:
 $a(4,-1)$, $b(4,3)$, $c(0,3)$, $d(-5,-4)$



1.2 المسافة بين نقطتين

افرض أن $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ نقطتان في المستوى الكارتي كما في الشكل (4):

الشكل (4)



لحساب المسافة بين النقطتين A, B أي طول النقط المستقيمة AB نلاحظ

أن المثلث ABC قائم الزاوية في C وأن:

$$AC = x_2 - x_1 , \quad BC = y_2 - y_1$$

و بتطبيق نظرية فيثاغورس نجد:

$$(AB)^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$$

$$(AB)^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$$

بأخذ الجذر التربيعي للطرفين نجد:

$$(AB) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

وتعريف العلاقة الأخيرة بقانون المسافة بين نقطتين.

تعريف:

المسافة بين نقطتين $A(x_1, y_1)$ و $B(x_2, y_2)$ هي:

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

مثال (1):

احسب المسافة بين النقطتين $A(2,3)$, $B(4,5)$

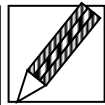
الحل:

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$AB = \sqrt{(4 - 2)^2 + (5 - 3)^2} = \sqrt{8}$$

تدريب (2)

إذا كانت $A(0,1)$ أي النقط التالية أقرب إلى A :
 $B(-3,-1)$, $C(1,1)$, $D(3,2)$



مثال (2):

برهن أن المثلث الذي رؤسه $A(-2,-2)$, $B(1,-2)$, $C(1,3)$ قائم الزاوية.

الحل:

$$AB = \sqrt{(1 - (-2))^2 + (-2 - (-2))^2} = 3$$

$$AC = \sqrt{(1 - (-2))^2 + (3 - (-2))^2} = \sqrt{34}$$

$$BC = \sqrt{(1 - 1)^2 + (3 - (-2))^2} = 5$$

نلاحظ أن:

$$(AB)^2 = 9$$

$$(AC)^2 = 34$$

$$(BC)^2 = 25$$

$$(AC)^2 = (AB)^2 + (BC)^2 \quad \text{إذاً:}$$

وبالتالي فالمثلث ABC قائم الزاوية.

مثال (3):

أثبت أن النقاط $A(6,1)$, $B(5,2)$, $C(3,6)$

الحل:

$$AB = \sqrt{(6 - 5)^2 + (1 - 2)^2} = 1$$

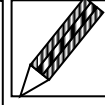
$$AC = \sqrt{(6 - 3)^2 + (1 - 6)^2} = 5$$

$$BC = \sqrt{(5 - 3)^2 + (2 - 6)^2} = 4$$

نلاحظ أن $AC = AB + BC$

إذن النقاط A , B , C تقع على استقامة واحدة.

تدريب (3)



إذا كانت $ac < (ab + bc)$ ماذا يكون الشكل الناتج عند وصل النقاط الثلاث a, b, c معاً.

أسئلة تقويم ذاتي



1- إذا كانت $A(-1,5), B(5,-3), C(-7,-3)$ أثبت أن المثلث ABC

متساوي الساقين؟

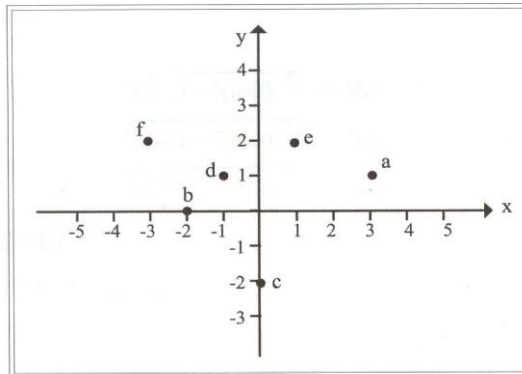
2- إذا كانت $A(2,5), B(-3,-1), C(1,-4)$ اثبت أن النقاط A, B, C

C لا تقع على استقامة واحدة؟

3- انظر في الشكل (5) ثم حدد إحداثيات كل من النقاط التالية:

F, e, d, c, b, a

الشكل (5)



4- إذا كانت $F(3,5), L(8,7), H(7,3), K(2,1)$ أثبت أن الشكل $khlf$

متوازي أضلاع.

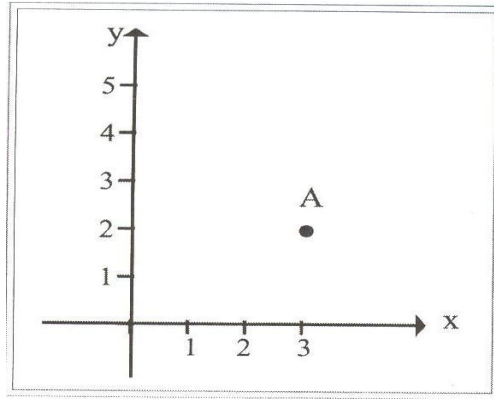
1. الخط المستقيم

1.2 تعريف الخط المستقيم

لقد درسنا المستوى الديكارتي وقلنا أن أي زوج مرتب (X, Y) يمثل نقطة في المستوى.

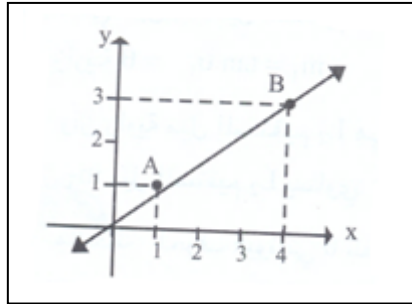
فلو أخذنا النقطة $A(3,2)$ فإنها تمثل بنقطة في المستوى كما في الشكل (6).

الشكل (6)



والآن خذ النقطتين $A(1,1)$, $B(4,3)$ كما في الشكل (7):

الشكل (7)



لو وصلنا النقطتين A, B مع بعضهما لنتجت لدينا القطعة المستقيمة $\overline{AB}$.

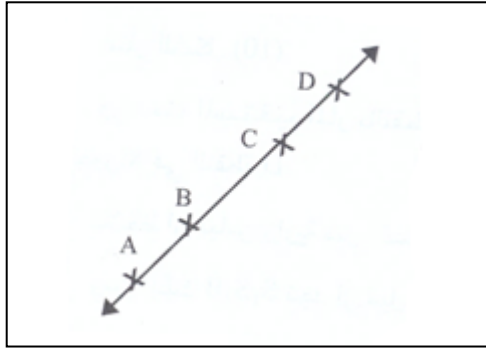
ولو أكملنا امتداد القطعة AB من جهة A إلى المالانهاية ومن جهة B إلى المالانهاية لنتج إلينا الخط المستقيم $\leftrightarrow_{AB}$.

إذن :

فالخط المستقيم: هو مجموعة لا نهائية من النقاط المتصلة معاً والتي تقع على استقامة واحدة.

ملاحظة: القطعة المستقيم $\overline{AB}$ هي جزء من الخط المستقيم $\leftrightarrow_{AB}$ وهي تمثل هذا الخط فميل القطعة $\overline{AB}$ هو نفسه ميل المستقيم $\leftrightarrow_{AB}$ كما سيأتي لاحقاً.

الشكل (8)



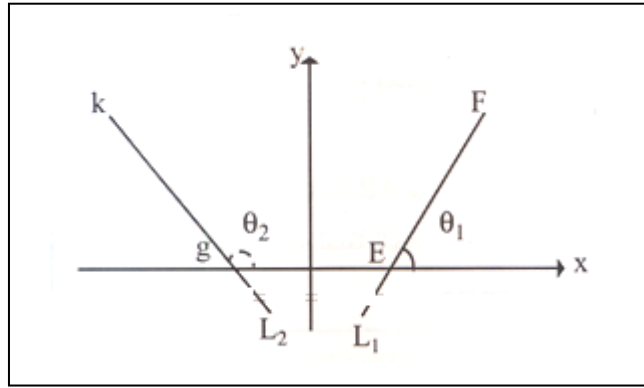
ويتم تعريف الخط المستقيم بنقطتين عليه، فنقول المستقيم $\leftrightarrow_{AB}$ هو نفسه المستقيم $\leftrightarrow_{AC}$ وهو نفسه المستقيم $\leftrightarrow_{BC}$ المبين في الشكل التالي، وذلك لأن النقاط D,C,B,A واقعة على ذلك الخط المستقيم.

2.2 ميل الخط المستقيم

تعريف:

(أ) زاوية ميل المستقيم هي أصغر زاوية موجبة يصنعها المستقيم مع الإتجاه الموجب X ونقيسها في الإتجاه المعاكس لإتجاه عقارب الساعة.
(ب) ميل الخط المستقيم يساوي ظل زاوية ميله.

بالنظر إلى الشكل (9) نجد أن زاوية ميل المستقيم L_1 هي XEF والتي قياسها θ_1 وبالتالي فإن ميل المستقيم L_1 يساوي ظل الزاوية θ_1 $m_1 = \tan \theta_1$ وأن زاوية ميل المستقيم L_2 هي θ_2 وبالتالي فإن ميل المستقيم L_2 يساوي $m_2 = \tan \theta_2$



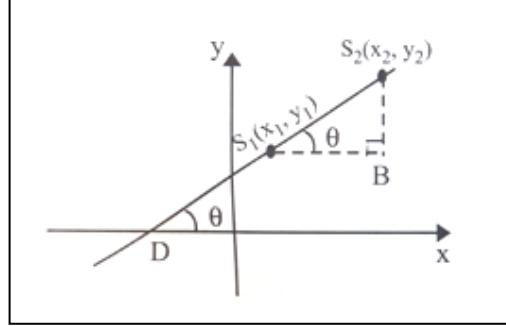
ملاحظة:

الحرف اليوناني θ يُلفظ هكذا ثيتا.

والآن نريد إيجاد علاقة لحساب ميل الخط المستقيم المار بنقطتين. افرض أن $S_1(x_1, y_1)$, $S_2(x_2, y_2)$ نقطتين في المستوى الديكارتي.

انظر الشكل (10)

الشكل (10)



ورسمنا المستقيم المار بالنقطتين S_1 و S_2 ليقطع محور X في النقطة D
 نلاحظ أن قياس زاوية ميل المستقيم هي θ ، لكن θ تساوي قياس $\angle S_2S_1B$ (لماذا؟)

ومن المثلث S_2S_1B نجد أن ميل المستقيم يساوي $m = \tan \theta = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

وتعرف العلاقة الأخيرة بميل الخط المستقيم المار بنقطتين.

مثال (1):

أوجد ميل المستقيم المار بالنقطتين $(8,7)$, $(4,2)$

الحل:

باستخدام العلاقة $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

نجد أن $m = \frac{7-2}{8-4} = \frac{5}{4}$

مثال (2):

جد كلاً من ميل المستقيم وزاوية ميله إذا علمت أنه يمر بالنقطتين (5,7) , (-5,-3) .

الحل:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \text{ من العلاقة}$$

$$m = \frac{7 - (-3)}{5 - (-5)} \text{ نجد أن}$$

$$m = \frac{7+3}{5+5} = 1 \text{ وبالتالي}$$

$$m = \tan \theta \text{ لكن}$$

$$\tan \theta = 1 \text{ إذن}$$

$$\theta = \tan^{-1} 1 = 45^\circ \text{ إذن}$$

ملاحظة:

العبارة $\theta = \tan^{-1} 1$ تعني " θ الزاوية التي ظلها يساوي 1" وتعلم من حساب المثلثات أن أصغر زاوية موجبة ظلها يساوي 1 هي 45° .

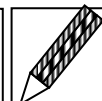
تدريب (4)

أوجد كلاً من ميل المستقيم وزاوية ميله في الحالات التالية:

(A) يمر بالنقطتين (8,-9) , (3,-4) .

(B) يمر بالنقطتين (-4,6) , (-4,3) .

(C) يمر بالنقطتين (13,5) , (13,7) .



مثال (2):

إذا كانت $A(8,6)$, $B(5,h)$ وكان ميل الخط المستقيم AB يساوي 12 فما قيمة h .

الحل:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \text{ نطبق العلاقة العامة}$$

$$12 = \frac{h - 6}{5 - 8} \Rightarrow 12 = \frac{h - 6}{-3} \text{ بالضرب التبادلي}$$

$$-36 - h - 6 \Rightarrow h = -30$$

مثال (3):

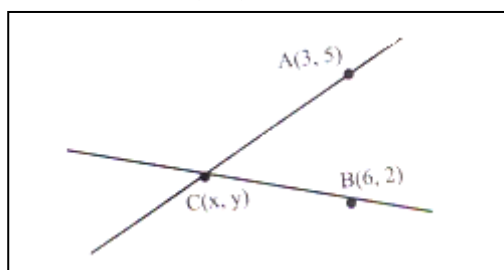
إذا كانت $A(3,5)$, $B(6,2)$ وكان المستقيمان AC , BC متقاطعان في النقطة C ، جد

إحداثيي C إذا كان ميل AC يساوي 1 وميل BC يساوي 2.

الحل:

أنظر الشكل (11)

الشكل (11)



نفرض أن ميل المستقيم AC هو m_{AC}

نفرض أن ميل المستقيم BC هو m_{BC}

ونفرض أن إحداثيي النقطة C هما (x, y)

$$m_{AC} = \frac{y-5}{x-3} = 1 \Rightarrow y-5 = x-3$$

$$y = x + 2 \dots\dots\dots (1)$$

$$m_{BC} = \frac{y-2}{x-6} = 2 \Rightarrow y-2 = 2x-12$$

$$y = 2x - 10 \dots\dots\dots (2)$$

وبحل المعادلتين (1) ، (2) آنياً وذلك بتعويض قيمة y في (1) في المعادلة (2) نجد:

$$x + 2 = 2x - 10 \Rightarrow 2x - x = 2 + 10 \Rightarrow x = 12 \dots\dots\dots (3)$$

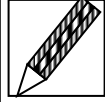
$$y = 12 + 2 = 14 \quad \text{نعوض (3) في (1)}$$

إذن إحداثيات النقطة هي C(12,14)

تدريب (5)

أ- أوجد ميل المحور X.

ب- أوجد ميل المحور Y.

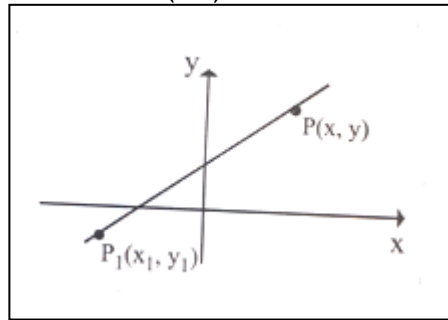


3.2 معادلة الخط المستقيم

ليكن Λ مستقيماً ميله μ ، ويمر بالنقطة $p_1(x_1, y_1)$ ونريد إيجاد معادلته.

من المعروف أن معادلة الخط المستقيم هي العلاقة الجبرية بين الإحداثي X والإحداثي Y لأي نقطة تقع على الخط المستقيم، ولنفترض أنها النقطة $P(x, y)$ كما في الشكل (12).

الشكل (12)



ويعطى علاقة الميل $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

على النقطتين p_1, p نجد أن: $m = \frac{y - y_1}{x - x_1}$

وبالضرب التبادلي ينتج أن

$$y - y_1 = (x - x_1) \dots (1)$$

مثال (1):

أوجد معادلة الخط المستقيم الذي ميله $m = \frac{1}{2}$ ويمر بالنقطة $P(2,3)$

الحل:

بالتطبيق في العلاقة (1) السابقة:

$$p_1(x_1, y_1)$$

$$y - 3 = \frac{1}{2}(x - 2) \Rightarrow y - 3 = \frac{1}{2}x - 1$$

وبالتالي:

$$y = \frac{1}{2}x - 1 + 3 \Rightarrow y = \frac{1}{2}x + 2$$

مثال (2):

أوجد معادلة الخط المستقيم الذي ميله $m = -2$ ويمر بنقطة الأصل.

الحل:

بالتطبيق في العلاقة (1) وملاحظة أن نقطة الأصل هي: $(0,0)$:

$$y - 0 = -2(x - 0)$$

$$y = -2x$$

مثال (3):

أوجد معادلة المستقيم الذي زاوية ميله $\frac{\pi}{6}$ ويمر بالنقطة $\left(2, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

الحل:

$$m = \tan \theta \Rightarrow m = \tan \frac{\pi}{6} = \tan 30^\circ$$

$$= \frac{\sin 30}{\cos 30} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow m = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

الآن نطبق في العلاقة (1):

$$y - \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}(x - 2) \Rightarrow y - \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}x - \frac{2}{\sqrt{3}} \Rightarrow$$

$$y = \frac{1}{\sqrt{3}}x - \frac{2}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow y = \frac{1}{\sqrt{3}}x - \frac{1}{\sqrt{3}}$$

تدريب (6)

أوجد معادلة الخط المستقيم الذي ميله $m=2$ ويقطع محور x عند $x=-4$



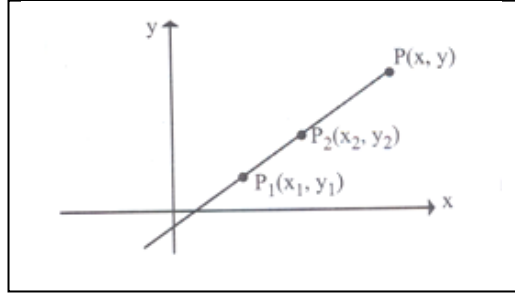
4.2 معادلة الخط المستقيم المار بنقطتين

ليكن L مستقيماً يمر بالنقطتين $P_1 (X_1, Y_1)$ ، $P_2 (X_2, Y_2)$ ولتكن $P(X, Y)$

نقطة على هذا المستقيم، أنظر الشكل (13) ونريد إيجاد العلاقة بين الإحداثي X والإحداثي Y ، أي إيجاد معادلة الخط المستقيم بتطبيق علاقة الميل.

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

الشكل (13)



على النقطتين p_1, p_2 نجد أن $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

وبتطبيق العلاقة نفسها على النقطتين p_1, p نجد أن $m_2 = \frac{y - y_1}{x - x_1}$

وبما أن النقاط p_1, p_2, p تقع على المستقيم نفسه إذاً $m_1 = m_2$

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \text{(2) وبالتالي:}$$

وتعرف العلاقة (2) بمعادلة الخط المستقيم المار بنقطتين $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$

مثال:

أوجد معادلة الخط المستقيم المار بالنقطتين $(2,3)$ $(-3,-4)$ بالتطبيق في العلاقة السابقة نجد أن:

$$\frac{y+4}{x+3} = \frac{3+4}{2+3} \Rightarrow \frac{y+4}{x+3} = \frac{7}{5}$$

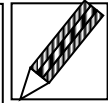
وبالضرب التبادلي:

$$y+4 = \frac{7}{5}(x+3) \Rightarrow y = \frac{7}{5}x + 5$$

تدريب (7)

أوجد معادلة المستقيم الذي يمر بالنقطتين B,A إذا كانت:

أ- $A(0,3), B(2,5)$. ب- $A(1,-1), B(-2,0)$.



أسئلة تقويم ذاتي (2)

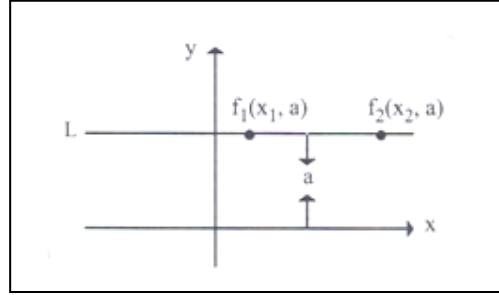


1. أوجد ميل الخط المستقيم L المار بالنقطتين $Q(4,5), O(0,0)$ ؟
2. أوجد ميل وزاوية ميل الخط المستقيم المار بالنقطتين $p_2(2\sqrt{3}, 2)$ و $p_1(\sqrt{3}, 1)$ ؟
3. أوجد معادلة المستقيم L الوارد في السؤال الأول ؟
4. أوجد معادلة المستقيم الذي ميله $m = \frac{1}{a}$ ويمر بالنقطة $p(a^3, a^2)$ ؟
5. خط مستقيم يمر بالنقطة $A(-2, 3)$ وميله $m = 4$ أوجد أحداثي نقطة تقاطعه مع محور Y ؟
6. أوجد ميل المستقيم L إذا كانت زاوية ميله مع محوره X الموجب 130° ؟
7. إذا كان ميل المستقيم AB يساوي $\frac{1}{6}$ وكانت $A(-6, -4)$ ، أوجد قيمة الثابت c ؟
8. أوجد معادلة المستقيم الذي زاوية ميله $\frac{2\pi}{3}$ ويمر بالنقطة $(2, \sqrt{3})$ ؟
9. أوجد معادلة المستقيم المار بنقطة الأصل وبالنقطة $(2, -3)$ ؟

5.2 حالات خاصة للخط المستقيم

الحالة (أ) إذا كان المستقيم L يوازي محور X ويبعد عنه بمقدار ثابت وليكن a كما في الشكل (14).

الشكل (14)



لإيجاد معادلة هذا الخط المستقيم نأخذ أي نقطتين عليه مثل

$$S_1(x_1, a), S(x_2, a) \text{ (لماذا؟).}$$

واضح أن الإحداثي Y لا يتغير مهما اختلفت النقطة على هذا الخط، فهي دائماً

تساوي مقدار ثابت، وهنا تساوي a .

$$\text{بالتطبيق في العلاقة } \frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

مثال (1):

أوجد معادلة الخط المستقيم الذي يوازي محور X ويقع تحته ويبعد عنه

وحدتين.

الحل:

بالتطبيق في العلاقة السابقة نجد $Y = -2$

مثال (2):

أوجد معادلة محور X .

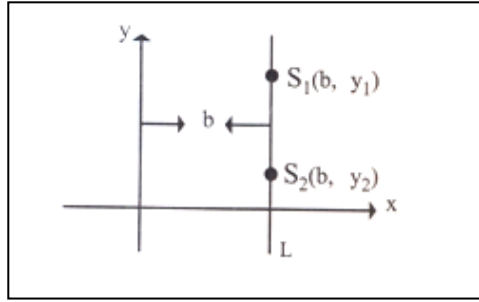
الحل:

بالتطبيق في العلاقة السابقة نجد $Y=0$

الحالة (ب):

إذا كان المستقيم L يوازي محور Y ويبعد عنه مقداراً ثابتاً يساوي b أنظر الشكل (15).

الشكل (15)



لإيجاد معادلة هذا المستقيم L نأخذ أي نقطتين عليه مثل $S_1(b, y_1)$ $S_2(b, y_2)$ (لماذا؟)

واضح أن الإحداثي X لا يتغير مهما اختلفت النقطة على المستقيم L فهي دائماً تساوي مقداراً ثابتاً وهو b وعند حساب ميل الخط L نجد أن:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{b - b} = \frac{y_2 - y_1}{0}$$

أي أن الميل كمية غير معينة (لأن المقام يساوي صفراً) ولكم نحن نعلم أن معادلة

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \text{ هي: الخط المستقيم المار بنقطتين هي}$$

وبالتطبيق في هذه العلاقة نجد أن:

$$\frac{y-y_1}{x-b} = \text{كمية غير معينة}$$

وتكون نتيجة المقدار $\frac{y-y_1}{x-b}$ كمية غير معينة إذا كان

$$x-b=0 \Rightarrow x=b \dots (4)$$

وتعرف العلاقة (4) بمعادلة المستقيم الذي يوازي محور y ويبعد عنه مقداراً ثابتاً

.b

مثال (1):

أوجد معادلة المستقيم الذي يوازي محور y ويبعد عنه 7 وحدات إلى اليسار.

الحل:

بالتطبيق في المعادلة (4).

مثال (2):

أوجد معادلة محور y .

الحل:

نطبق في العلاقة السابقة حيث b صفر وبالتالي " $x=0$ ".

الحالة (ج):

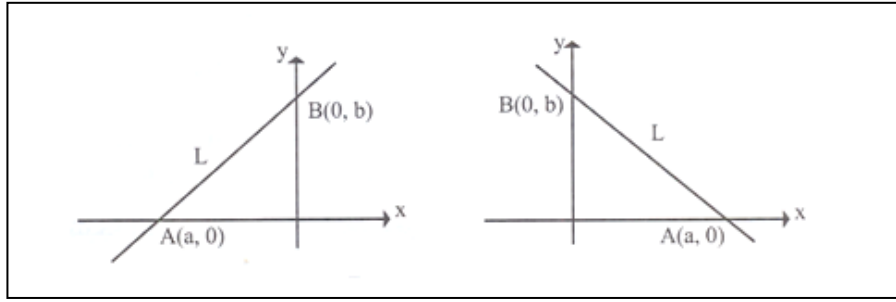
درسنا في الحالتين أ ، ب المستقيم الذي يوازي محور x أو محور y

ولاحظنا أنه يقطع أحد المحورين في نقطة واحدة فقط.

أما إذا كان المستقيم لا يوازي أحد المحورين فإنه سوف يقطع المحورين في

نقطتين أنظر الشكل (16).

الشكل (16)



أما إحداثيات النقطة A فتكون $(a, 0)$ وإحداثيات $B(0, b)$. ونسمي الإحداثي X للنقطة A مقطع المستقيم من محور X. ولإيجاد معادلة هذا الخط المستقيم بدلالة مقطعية من المحورين X, Y نتبع الخطوات التالية:

$$\text{من المعادلة: } \frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$\text{نجد أن: } \frac{y - 0}{x - a} = \frac{b - 0}{0 - a} \Rightarrow \frac{y}{x - a} = \frac{b}{-a}$$

$$\text{بالضرب التبادلي: } bx - ba = -ay \Rightarrow bx + ay = ba$$

$$\text{بالقسمة على } ba \text{ نجد أن } \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \dots\dots (5)$$

وتعرف العلاقة (5) بمعادلة المستقيم الذي مقطعه من المحورين y, x على الترتيب b, a .

مثال (1):

أوجد معادلة المستقيم الذي مقطعه من محور X يساوي 3 ومقطعه من محور Y يساوي 2.

الحل:

$$\text{نطبق في (5) فنجد } \frac{x}{3} + \frac{y}{2} = 1$$

مثال (2):

أوجد مقطعي المستقيم L من المحورين، إذا كانت معادلته $6X - 12 = 3$
الحل:

نكتب المعادلة على صورة العلاقة (5).

نقسم على 3 ثم نضع المعاملات في المقام:

$$2x - 4y = 1 \Rightarrow \frac{x}{2} + \frac{y}{-4} = 1$$

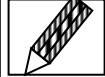
$$(2x = \frac{x}{2} \text{ لاحظ أن})$$

$$\frac{1}{2} = x \text{ إذن مقطعه من محور}$$

$$-\frac{1}{4} = y \text{ ومقطعه من محور}$$

تدريب (8)

أوجد مقطعي المستقيم L من المحورين إذا كانت x عند $x = -4$



6.2 الصيغة العامة لمعادلة الخط المستقيم

لقد تعلمنا في البنود السابقة صيغ مختلفة لمعادلة المستقيم ومنها:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

ويمكن التعبير عن جميع الصيغ السابقة لمعادلة الخط المستقيم بالصورة

$$ax + by + c = 0$$

حيث أن أحد العددين a, b على الأقل $\neq$ صفراً.

ونستطيع إثبات أن ميل المستقيم المعطاه معادلته في الصورة العامة يساوي $-\frac{a}{b}$

أي - معامل x

معامل y

البرهان:

$$ax + by + c = 0$$

وبالتالي: $by = -ax - c$

$$y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$$

نأخذ $-\frac{a}{b}$ كعامل مشترك فنجد:

$$y = -\frac{a}{b} \left(x + \frac{c}{b} \right)$$

ولكن: كيف أصبحت $-\frac{c}{b}$ بعد أخذ العامل المشترك $-\frac{a}{b}$ ؟

بسيطة: لنقسم: $\left(\frac{-c}{b} \right) \div \left(\frac{-a}{b} \right)$

$$\left(\frac{-c}{b} \right) \div \left(\frac{-a}{b} \right) = \left(\frac{-c}{b} \right) \times \left(\frac{-b}{a} \right) = \frac{c}{a}$$

لنعد إلى المعادلة $y = -\frac{a}{b} \left(x + \frac{c}{b} \right)$

ونقارنها بالمعادلة العامة:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$m = -\frac{a}{b}$$

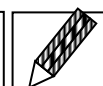
مثال (1):

أوجد ميل المستقيم L الذي معادلته $3x + 2y - 5 = 0$.

نطبق في العلاقة (6) $m = \frac{-3}{2}$

تدريب (9)

أوجد ميل المستقيم L الذي معادلته $-2x = 4y + 6$



ملاحظة: يمكن إيجاد مقطع المستقيم L من المحورين الإحداثيين إذا كانت معادلته معطاه بالصورة العامة بإتباع الطريقة الموضحة بالأمثلة التالية:

مثال (2):

أوجد مقطعي المستقيم L من المحورين الإحداثيين إذا كانت معادلته: $5y - 3x = 7$.

الحل:

لايجاد مقطعه من محور x نضع $y = 0$ فينتج:

$$-3x = 7 \Rightarrow x = -\frac{7}{3}$$

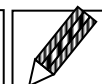
ولايجاد مقطعه من محور y نضع $x = 0$ فينتج أن:

$$5y = 7 \Rightarrow y = \frac{7}{5}$$

تدريب (10)

أوجد إحداثيات نقط تقاطع المستقيم L مع المحورين الإحداثيين إذا كانت

$$\text{معادلته: } \frac{2x}{3} - \frac{4y}{5} + 6 = 0$$



أسئلة تقويم ذاتي (2)



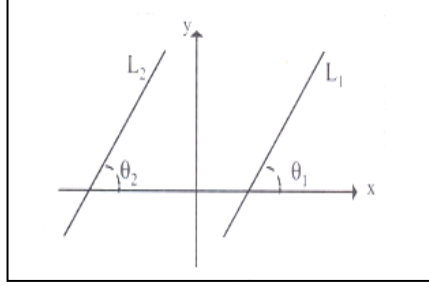
- 1- أوجد معادلة المستقيم في الحالات التالية:
 - أ- يوازي محور X ويبعد عنه 8 وحدات للأعلى.
 - ب- يوازي محور X ويبعد عنه 7 وحدات للأسفل.
 - ج- يوازي محور Y ويبعد عنه 12 وحدة لليمين.
 - د- يوازي محور Y ويبعد 8 وحدات لليسار.
 - هـ- مقطعه من محور $X=31$ ومقطعه من محور $Y=99$.
 - و- مقطعه من محور $X=6$ ويمر بالنقطة $(2,3)$.
 - ز- مقطعه من محور $Y=4$ ويمر بالنقطة $(5,6)$.
- 2- أوجد معادلة المستقيم L الذي زاوية ميله 30° ويقطع محور X عند العدد 3.
- 3- أوجد معادلة المستقيم L الذي زاوية ميله $\frac{\pi}{4}$ ويقطع محور Y عند العدد 12.
- 4- أوجد معادلة المستقيم L الذي مقطعه من محور $X=9$ ومقطعه من محور $Y=-3$.
- 5- أوجد مقطعي المستقيم L من المحورين الإحداثيين إذا كانت معادلته $\frac{x}{2} - \frac{y}{3} - 12 = 0$.
- 6- أوجد ميل المستقيم L الذي معادلته $\frac{x}{3} = \frac{y}{4} - 5$.
- 7- أوجد مقطعي المستقيم L من المحورين الإحداثيين إذا كانت معادلته $25x - 50y = 75$.

3. التوازي والتعامد Parallel and Perpendicular

1.3 التوازي

لنأخذ مستقيمين L_1, L_2 في وضع توازي، أنظر الشكل (17) نلاحظ أن θ_2, θ_1 في وضع تناظر، أي أن: $\theta_2 = \theta_1$ (لماذا؟)

الشكل (17)



وإذا افترضنا أن:

$$m_1 = l_1 \text{ ميل}$$

$$m_2 = l_2 \text{ ميل}$$

$$\text{فإن: } m_1 = \tan \theta_1$$

$$m_2 = \tan \theta_2$$

$$\text{وبما أن } \theta_1 = \theta_2 \text{ إذن } \tan \theta_2 = \tan \theta_1 \text{ إذن } m_1 = m_2$$

وهذا يقود إلى النتيجة التالية:

نتيجة (1)

إذا كان المستقيمان L_1, L_2 متوازيان فإن ميليهما متساويان، والعكس صحيح.

مثال (1):

إذا كانت $A(5,6)$, $B(1,4)$, $C(10,8)$, $D(2,4)$ **الحل:**

$$m_{AB} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$m_{AB} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{4 - 8}{2 - 10} = \frac{1}{2}$$

بما أن $m_{CD} = m_{AB}$ إذن المستقيمان متوازيان.

مثال (2):

إذا كانت $A(3,2)$, $B(5,Y)$, $C(2,1)$, $D(3,-2)$ **الحل:**
أوجد قيمة Y (الإشارة // تعني يوازي).

$$m_{AB} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{Y - 2}{5 - 3} = \frac{Y}{2} - 1$$

$$m_{CD} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = -\frac{2 - 1}{3 - 2} = -3$$

بما أن $CD // AB$ إذن $m_{AB} = m_{CD}$

$$\frac{Y}{2} - 1 = -3 \Rightarrow Y = -4 \text{ إذن}$$

مثال (3):

أوجد ميل المستقيم L الذي يوازي المستقيم المار بالنقطتين $(4,10)$, $(5,7)$

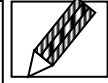
الحل:

نفرض أن ميل $m_1 L_1$ وميل المستقيم المار بالنقطتين m_2 من التوازي ينتج أن

$$m_1 = m_2 \text{ إذا } \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{10 - 7}{4 - 5} = \frac{3}{-1} = -3$$

تدريب (11)

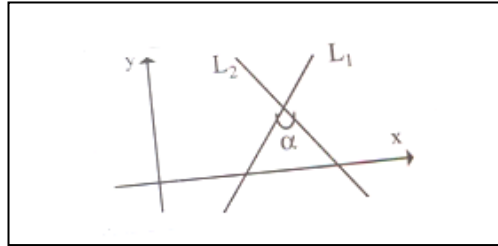
أوجد معادلة المستقيم L الذي مقطعه من محور y يساوي -2 ويوازي المستقيم الذي معادلته.



2.3 التعامد

إذا كانت α بين المستقيمين L_2, L_1 كما في الشكل (18) فإن من المعروف أن:

الشكل (18)



$$\tan \alpha = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2}$$

حيث m_1 ميل المستقيم L_1 ، m_2 ميل المستقيم L_2

وإذا كان المستقيمان في وضع تعامد فإن $90^\circ = \alpha$ وكذلك $\tan \alpha$ كمية غير

$$\frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2} = \text{معينة أي أن كمية غير معينة}$$

$$\text{أي أن: } 1 + m_1 m_2 = 0 \Rightarrow m_1 m_2 = -1$$

وهكذا يقود إلى النتيجة التالية:

نتيجة:

إذا كان المستقيمان L_1, L_2 متعامدين فإن معادلة ص 33

مثال (4):

إذا كانت $A(2,4)$, $B(-1,2)$, $C(-1,5)$, $D(1,2)$ بين أن المستقيمين AB , CD

متعامدان .

الحل:

$$m_{AB} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{2 - 4}{-1 - 2} = \frac{-2}{-3} = \frac{2}{3}$$

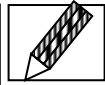
$$m_{CD} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{2 - 5}{1 - (-1)} = \frac{-3}{2}$$

$$m_{AB} m_{CD} = \left(\frac{2}{3}\right) \times \left(\frac{-3}{2}\right) = -1 \text{ لاحظ أن:}$$

إذن $CD \perp AB$ (الإشارة $\perp$ تعني متعامد مع).

تدريب (12)

إذا كانت $A(-2,0)$, $B(0,3)$, $C(-1,7)$, $D(8,1)$ بين أن المستقيم



$AB \perp$ المستقيم CD

مثال (5):

أوجد ميل المستقيم L_1 الذي يعامد المستقيم المار بالنقطتين (1,5) , (2,3)

الحل:

افرض m_1 ميل المستقيم L_1

m_2 ميل المستقيم المار بالنقطتين.

بما أن المستقيمين متعامدان إذاً $[m_1 m_2]$

$$m_2 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{5 - 3}{1 - 2} = -2$$

$$m_1 = \frac{-1}{-2} = \frac{1}{2} \text{ إذاً}$$

مثال (6):

إذا كانت زاوية ميل المستقيم L_1 تساوي 150° ، وزاوية ميل المستقيم L_2 تساوي 60°

بين أن $L_2 \perp L_1$

الحل:

$$m_1 = \tan 150 = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$m_2 = \tan 60 = \sqrt{3}$$

$$m_1 m_2 = \frac{-1}{\sqrt{3}} (\sqrt{3}) = -1$$

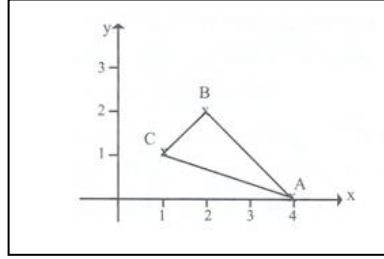
بما أن $m_1 m_2 = -1$ إذن $L_2 \perp L_1$

مثال (7):

باستعمال الميل بين أن النقط $A(4,0)$, $B(2,2)$, $C(1,1)$ رؤوس مثلث قائم الزاوية.

الحل: أنظر الشكل 19.

الشكل (19)



$$m_{AB} = \frac{2-0}{2-4} = -1$$

$$m_{AC} = \frac{1-0}{1-4} = -\frac{1}{3}$$

$$m_{CB} = \frac{1-2}{1-2} = 1$$

$$m_{AB} \cdot m_{CB} = -1 \quad \text{لاحظ أن:}$$

إذن: $CD \perp AB$ إذن مثلث قائم الزاوية.

مثال (8):

إذا كانت $A(3,2)$, $B(5,Y)$, $C(2,1)$, $D(3,-2)$ أوجد قيمة Y إذا كان $CD \perp AB$

الحل:

$$m_{AB} = \frac{y-2}{5-3} = \frac{y-2}{2}$$

$$m_{CD} = \frac{-2-1}{3-2}$$

بما أن $CD \perp AB$

$$m_{AB} \cdot m_{CD} = -1 \quad \text{إذاً:}$$

إذاً:

$$\left(\frac{y-2}{2} \right) (-3) = -1$$

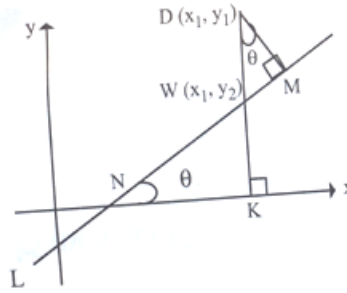
$$\frac{y-2}{2} = \frac{1}{3}$$

$$y = \frac{8}{3}$$

4. البعد بين نقطة الأصل وخط مستقيم

سنستعمل الصورة العامة لمعادلة الخط المستقيم $ax + by = 0$ في إيجاد بعد نقطة عن مستقيم، ويعرف هذا البعد بأنه: طول العمود النازل من تلك النقطة على ذلك المستقيم. ولإيجاد طول العمود النازل من النقطة $D(x_1, y_1)$ على المستقيم L نرسم من النقطة D عموداً على المستقيم L فيقطعه في النقطة M كما في الشكل (20).

الشكل (20)



إذاً المطلوب إيجاد طول DM .

نفرض أن النقطة $W(x_1, y_2)$ وهي نقطة تقاطع العمود النازل من D على محور X مع المستقيم L ، والنقطة W تقع على المستقيم L إذن فهي تحقق معادلته، أي أن:

$$ax_1 + by_2 + c = 0 \Rightarrow$$

$$by_2 = -ax_1 - c$$

$$y_2 = \frac{-a}{b}x_1 - \frac{c}{b}$$

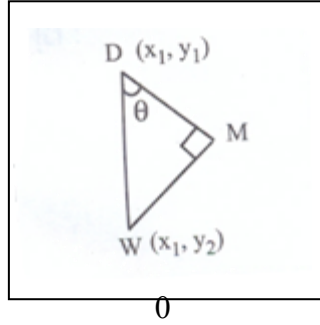
$$DW = Y_1 Y_2 \quad \text{لكن:}$$

وبالتعويض بقيمة Y_2

$$DW = y_1 - \left(\frac{-a}{b}x_1 - \frac{c}{b} \right) = y_1 + \frac{a}{b}x_1 + \frac{c}{b}$$

خذ المثلث القائم الممثل في الشكل (21):

الشكل (21)



نلاحظ أن:

$$\cos \theta = \frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}} = \frac{DM}{DW}$$

وبالضرب التبادلي

$$DM = |DW \cos \theta| \dots (1)$$

ومن معادلة المستقيم

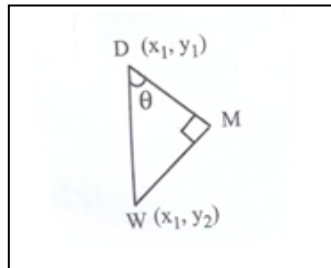
$$y_2 = \frac{-a}{b} x_1 - \frac{c}{b}$$

نلاحظ أن ميل المستقيم هو معامل x_1 أي $\frac{-a}{b}$

$$\tan \theta = \frac{-a}{b} \quad \text{أي: } \frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}} =$$

وبالعودة إلى المثلث وحسب فيثاغورس نلاحظ أن:

الشكل (22)



$$DW = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$\cos\theta = \frac{DM}{DW} \quad \text{إذن:}$$

$$DW = y_1 + \frac{a}{b}x_1 + \frac{c}{b} \quad \text{وبالتعويض قيمة}$$

$$\cos\theta = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \quad \text{وقيمة}$$

في المعادلة (1) نجد أن:

$$DM = \left| \left(y_1 + \frac{a}{b}x_1 + \frac{c}{b} \right) \cdot \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right|$$

$$DM = \left| \frac{ax_1 + by_1 + c}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right| \quad \text{إذن:}$$

وتعرف العلاقة (7) بـ بعد النقطة (x_1, y_1) عن المستقيم الذي معادلته $ax + by + c = 0$ مثال (1):

أوجد بعد النقطة $D(-5, 1)$ عن المستقيم الذي معادلته $3x - 4y + 4 = 0$.
الحل:

نطبق في العلاقة (7)

بعد النقطة D عن المستقيم L تساوي

$$|3(-5) + (-4)(1) + 4| = 3$$

مثال (2):

أوجد بعد النقطة $(1, -3)$ عن المستقيم الذي معادلته $2x - 3y = 4$.
الحل:

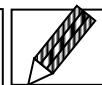
نكتب معادلة المستقيم بالصورة العامة: $2x - 3y - 4 = 0$

$$a = 2, b = -3, c = -4 \quad \text{إذن:}$$

ونطبق في العلاقة (7)

$$\text{بعد النقطة عن المستقيم} \quad \frac{(2)(1) + (-3)(-3) + (-4)}{\sqrt{2^2 + (-3)^2}}$$

تدريب (13)



أوجد البعد بين المستقيمين المتوازيين L_1, L_2 .

1. إذا كانت معادلة $L_1: x - 3y = 1$.

2. ومعادلة المستقيم $L_2: x - 3y = 4$.

5. المحل الهندسي Plane Geometry

تعريف:

يسمى المنحنى الذي ترسمه نقطة تتحرك في المستوى تحت شروط معينة بالمحل الهندسي لهذه النقطة.

وبصورة عامة:

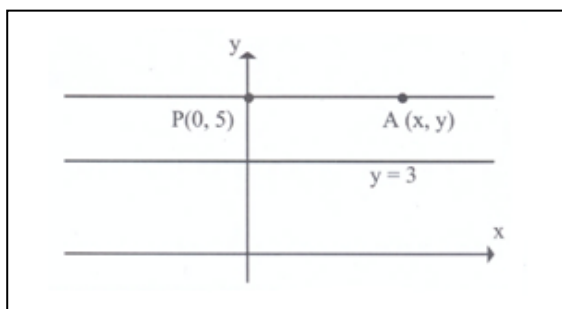
معادلة المحل الهندسي هي علاقة جبرية بين الإحداثي x والإحداثي للنقطة المتحركة (x, y) .

مثال (1):

أوجد المحل الهندسي للنقطة المتحركة $A(x, y)$ بحيث تبعد بمقدار وحدتين عن المستقيم $y = 3$.

إذن المحل الهندسي للنقطة المتحركة $A(x, y)$ هو مستقيم يوازي المستقيم الثابت $y = 3$ ويبعد عنه وحدتين كما في الشكل (23).

الشكل (23)



وباستعمال قانون البعد بين النقطة A والمستقيم $y = 3$ نجد أن $\frac{|y-3|}{\sqrt{1}} = 2 \rightarrow |y-3| = 2$

إذن $y - 3 = \pm 2$

أي $y = 1$ أو $y = 5$

وبما أن النقطة المتحركة $A(x, y)$ تمر بالنقطة $p(0, 5)$ إذن $y = 1$ غير ممكنة أي أن معادلة المحل الهندسي $y = 5$.

أسئلة تقويم ذاتي (4)



1- ABCD قطعة أرض بحيث أن $A(40, 10)$, $B(30, 30)$, $C(-10, 10)$, $D(0, -10)$ بين بوساطة الميل أن القطعة مستطيلة الشكل.

2- باستخدام قانون البعد بين نقطة ومستقيم بين أن النقطة $(-1, 1)$ تقع على المستقيم:

$$5x + 3y - 2 = 0$$

3- أوجد المحل الهندسي للنقطة المتحركة $A(x, y)$ التي تبعد بعداً ثابتاً قدره وحدتان عن النقطة $B(1, 2)$ ثم أوجد معادلته.

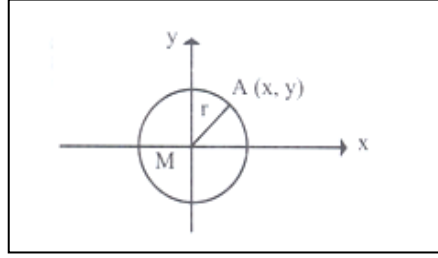
6. الدائرة The Circle

تعريف : الدائرة هي المحل الهندسي لنقطة تتحرك على بعد ثابت من نقطة ثابتة، ويسمى البعد الثابت نصف قطر الدائرة، وتسمى النقطة الثابتة مركز الدائرة.

1.6 صورة معادلة الدائرة

أولاً الصورة العامة لمعادلة الدائرة التي مركزها نقطة الأصل M ونصف قطرها r. في الشكل المجاور.

الشكل (24)



نفرض أن $A(x, y)$ نقطة على الدائرة، وباستخدام قانون البعد بين النقطتين A, R نجد أن:

$$AM = \sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2} = r$$

$$= \sqrt{x^2 + y^2} = r$$

$$x^2 + y^2 = r^2 \quad \text{بالتربيع}$$

تعرف العلاقة السابقة بالصورة العامة لمعادلة الدائرة التي مركزها نقطة الأصل M ونصف قطرها r .

مثال (1):

أوجد معادلة الدائرة التي مركزها نقطة الأصل ونصف قطرها 3 وحدات.

الحل:

بالتطبيق في العلاقة $x^2 + y^2 = r^2$ نجد أن:

$$x^2 + y^2 = 9$$

مثال (2):

أوجد مركز ونصف قطر الدائرة التي معادلتها $2x^2 = 18 - 2y^2$.

الحل:

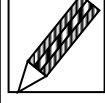
نكتب المعادلة على الصورة العامة $2x^2 + 2y^2 = 18$

بالقسمة على 2 $x^2 + y^2 = 9$

إذن مركز الدائرة (0,0) ونصف قطرها = 3

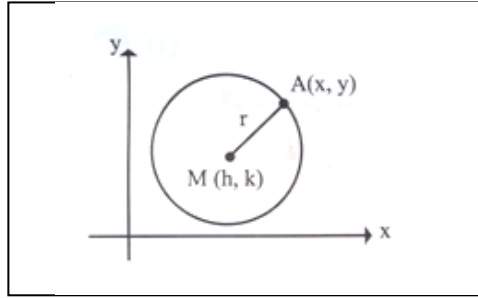
تدريب (14)

أوجد معادلة الدائرة التي مركزها نقطة الأصل ونصف قطرها 5 وحدات.



ثانياً: الصورة العامة لمعادلة الدائرة التي مركزها $M(h, k)$ ونصف قطرها 3 نفرض أن $A(x, y)$ نقطة على الدائرة كما في الشكل (25).

الشكل (25)



نستخدم قانون البعد بين نقطتين

$$MA = \sqrt{(x-h)^2 + (y-k)^2} = r$$

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2 \quad \dots\dots\dots (9) \quad \text{بالتربيع}$$

تعرف العلاقة (9) بالصورة العامة لمعادلة الدائرة التي مركزها $M(h, k)$.

مثال (3):

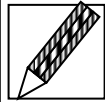
أوجد معادلة الدائرة التي مركزها $(-2, -3)$ ونصف قطرها 2.

الحل:

$$(x+2)^2 + (y+3)^2 = 4 \quad \text{نطبق في العلاقة (9) فنحصل على}$$

تدريب (15)

أوجد معادلة الدائرة التي مركزها $(5, 6)$ ونصف قطرها 9 وحدات.



مثال (4):

أوجد المركز ونصف القطر للدائرة التي معادلتها: $(x-4)^2 + y^2 = 25$

الحل:

بمقارنة المعادلة أعلاه بالمعادلة (9) نجد أن مركز الدائرة (4و0) ونصف قطرها = 5.

ثالثاً: الصورة القياسية لمعادلة الدائرة العامة التي مركزها $M(h,,k)$ ونصف قطرها r .

لنبدأ بالمعادلة $(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$

بفك الأقواس $x^2 - 2hx + h^2 - 2ky + k^2 = r^2$

$$x^2 + y^2 - 2hx - 2ky + h^2 + k^2 - r^2 = 0$$

ونفرض أن: $h^2 + k^2 - r^2 = c$ و $-k = f$ و $-h = g$

وينتج أن: $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0 \dots (10)$

تعرف المعادلة (10) بالصورة القياسية لمعادلة الدائرة العامة التي مركزها $M(h,,k)$ ونصف قطرها r .

ملاحظات:

إذا أعطيت معادلة الدائرة كما في الصورة (10) يكون:

(أ) المركز $(-g,-f)$

(ب) نصف قطر الدائرة $\sqrt{g^2 + f^2 - c}$

حيث $g^2 + f^2 - c > 0$

(ج) معامل x^2 = معامل y^2 = 1

(2) معامل xy = 0

مثال (5):

أوجد المركز ونصف القطر للدائرة: $x^2 + y^2 + 4x + 6y - 12 = 0$

الحل:

بمقارنة المعادلة أعلاه بالمعادلة (10) نجد:

$$2g = 4 \rightarrow g = 2 \quad \text{و} \quad 2f = 6 \rightarrow f = 3$$

إذن المركز $(-2, -3)$ ونصف القطر

$$\sqrt{g^2 + f^2 - c} = \sqrt{2^2 + (3)^2 - (-12)} = 5$$

مثال (6):

للدائرة $2x^2 + 2y^2 - 12x = 14$ أوجد المركز ونصف القطر.

الحل:

نكتب المعادلة على صور (10): $2x^2 + 2y^2 - 12x - 14 = 0$

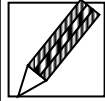
نقسم على 2 $x^2 + y^2 - 6x - 7 = 0$

بالمقارنة نجد $c = -7$ و $f = 0$ و $g = -3$

إذن المركز $(3, 0)$ ونصف القطر $\sqrt{9 + 0 + 7} = \sqrt{16} = 4$

تدريب (16)

- (أ) أوجد معادلة الدائرة التي مركزها $(-3, -7)$ وتمس محور x .
 (ب) أوجد معادلة الدائرة التي تمر بالنقاط $(0, 0)$, $(2, 0)$, $(3, -1)$.



2.6 مماس الدائرة

أولاً: الصورة العامة لمعادلة مماس الدائرة عند نقطة معلومة عليها.

نحن نعلم أن: $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ هي الصورة القياسية لمعادلة الدائرة

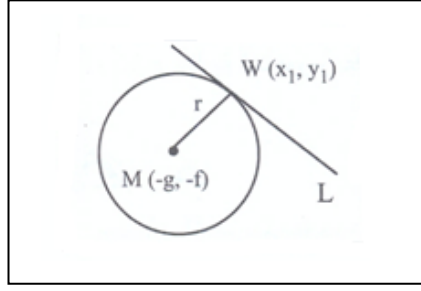
التي مركزها $M(h, k)$ ونصف قطرها r .

ونعلم أيضاً أن مركز هذه الدائرة هو $(-g, -f)$ فلو أخذنا الدائرة التي مركزها

$(-g, -f)$ ورسمنا لها مماساً L عند نقطة عليها مثل $W(x_1, y_1)$ كما في الشكل

(26).

الشكل (26)



لوجدنا أن الصورة العامة لمعادلة المماس L هي:

$$xx_1 + yy_1 + g(x + x_1) + f(y + y_1) + c = 0 \dots (11)$$

وسوف أترك إثبات هذه المعادلة لك عزيزي الدارس.

مثال (1):

$$x^2 + y^2 - 3x + 10y - 15 = 0 \text{ الدائرة للمماس}$$

الحل:

النقطة (4, -11) تقع على الدائرة لأنها تحقق معادلتها (تأكد من ذلك) وبالتطبيق

في العلاقة (11) نجد أن معادلة المماس هي:

$$4x - 11y - \frac{3}{2}(x + 4) + 5(y - 11) - 15 = 0$$

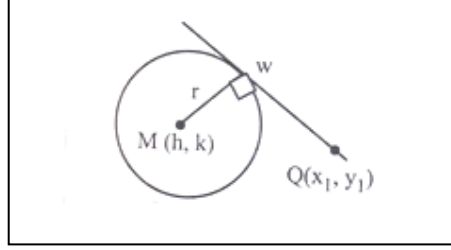
$$5x - 12y = 152 \text{ أي:}$$

ثانياً: طول المماس المرسوم لدائرة من نقطة خارجها.

لتكن الدائرة M مركزها $M(h, k)$ ونصف قطرها r وليكن QW مماساً للدائرة عند

النقطة W ومرسوماً من النقطة المعلومة $Q(x_1, y_1)$ كما في الشكل (27).

الشكل (27)



$$QW = \sqrt{(x_1 - h)^2 + (y_1 - k)^2 - r^2} \dots\dots (12) \text{ إذن}$$

وتعرف العلاقة (12) بطول المماس المرسوم من نقطة خارجها.

البرهان:

نصل MQ فينتج المثلث القائم الزاوية QMW القائم فس W (لماذا؟)

وبتطبيق قانون المسافة بين نقطتين نجد أن:

$$MQ = \sqrt{(x_1 - h)^2 + (y_1 - k)^2}$$

وبتطبيق نظرية فيثاغورس على المثلث القائم نجد أن:

$$QW = \sqrt{(x_1 - h)^2 + (y_1 - k)^2 - r^2}$$

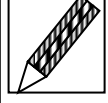
مثال:

جد طول المماس المرسوم من النقطة $(1, 2)$ للدائرة $(x - 2)^2 + (y + 5)^2 = 9$

الحل:

$$L = \sqrt{(1 - 2)^2 + (2 + 5)^2 - 9} = \sqrt{41} \quad (12) \text{ نطبق العلاقة}$$

تدريب (17)



بين أن طول المماس L المرسوم من النقطة $Q(x_1, y_1)$ للدائرة

$$x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$$

$$L = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + 2gx_1 + 2fy_1 + c}$$

أسئلة تقويم ذاتي (4)



1- أوجد معادلة الدائرة التي مركزها نقطة الأصل ونصف قطرها 4؟

2- أوجد المركز ونصف القطر للدائرة $(x-7)^2 + (y-2)^2 = 36$ ؟

3- أوجد مركز الدائرة ونصف قطر الدائرة

$$4x^2 - 8 - 12y + 4x = -4y^2$$

4- أوجد معادلة المماس للدائرة أوجد معادلة المماس للدائرة

$$x^2 + y^2 + 4x + 6y - 12 = 0 \text{ عند النقطة } (2, 0).$$

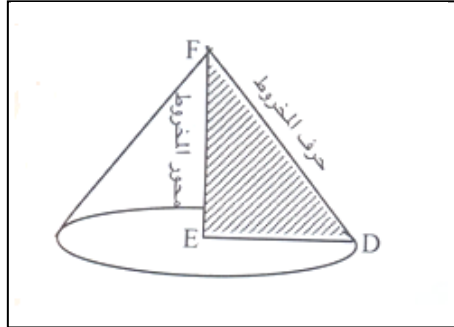
5- جد طول المماس المرسوم من النقطة $(13, 1)$ للدائرة

$$(x+3)^2 + (y-12)^2 = 16$$

7. القطع المخروطي Conical Section

تعلم أنه إذا زاد مثلث DEF القائم الزاوية في E دورة كاملة حول الضلع EF يتكون نتيجة الدوران مخروط دائري قائم كما في الشكل (28).

الشكل (28)



تسمى النقطة F رأس المخروط وتسمى القطعة المستقيمة EF محور المخروط وتسمى القطعة FD حروف المخروط إذا كونا جسماً من مخروطين متطابقين بحيث يكون لهما رأس مشترك ومحورها على استقامة واحدة وقطعنا سطح هذا الجسم بسطح مستو فإن المنحنى الناتج من القطع يسمى قطعاً مخروطياً.

ونتيجة هذا القطع نحصل على أحد القطوع التالية:

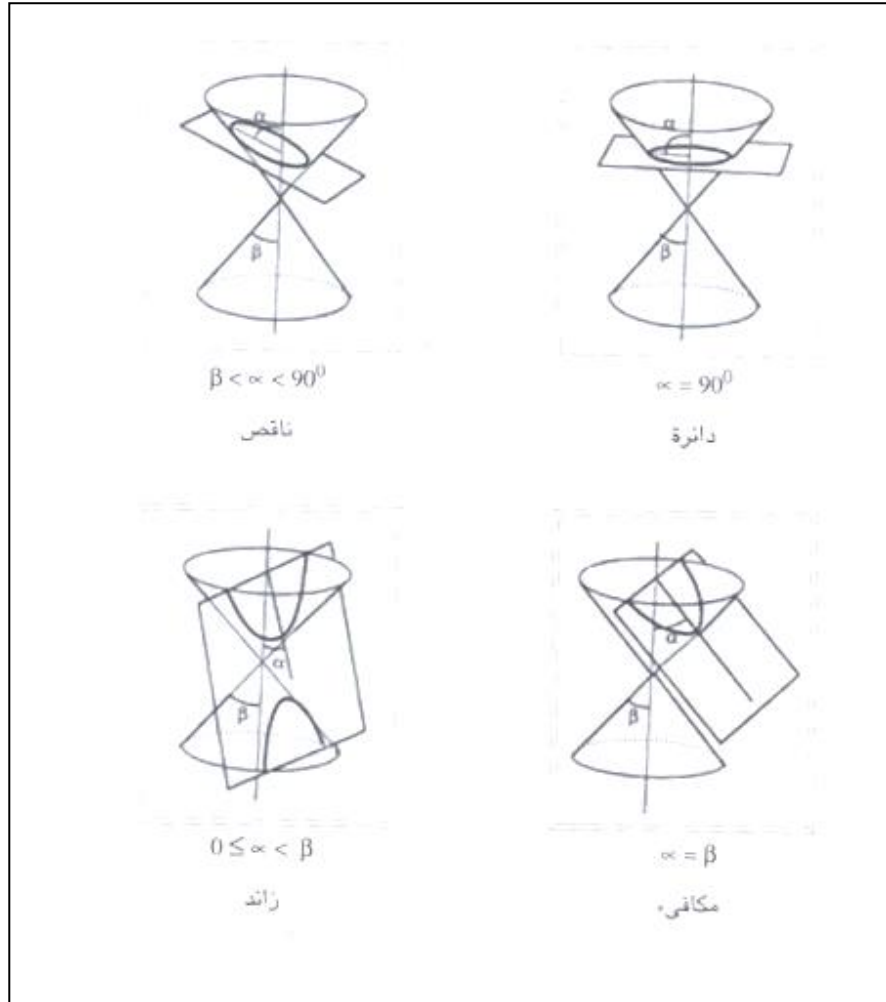
أ- دائرة: وتنتج عندما يكون المستوى القاطع عمودياً على محور المخروط وغير مار بالرأس كما في الشكل (29).

ب- قطع ناقص: وينتج عندما يقطع المستوى أحد المخروطين بحيث يكون مائلاً على محور المخروط كما في الشكل (29).

ج- قطع زائد: وينتج عندما يقطع المستوى المخروطين معاً ولا يكون موازياً لحرف المخروط كما في الشكل (29).

د- قطع مكافئ: وينتج عندما يكون المستوى موازياً لحرف المخروط كما في الشكل (29).

الشكل (29)



α الزاوية الحادة بين محور المخروط والمستوى الذي يقطعه.

β الزاوية الحادة بين محور المخروط وحرفه.

ونلخص ما يأتي:

(1) يكون القطع دائرة إذا كانت $\alpha = 90^\circ$

(2) يكون القطع ناقصاً إذا كانت $\beta < \alpha < 90^\circ$

(3) يكون القطع مكافئاً إذا كانت $\alpha = \beta$

(4) يكون القطع زائداً إذا كانت $0 \leq \alpha < \beta$

مثال (1):

دار المثلث ABC المرسوم في الشكل حول الضلع AB ، ثم صنع منه المخروط الذي في الشكل، ثم قطع بمستوى يصنع زاوية α مع محوره MN.

(1) $\alpha = 30$.

(2) $\alpha = 60$.

(3) $\alpha = 90$.

(4) $\alpha = 75$.

الحل:

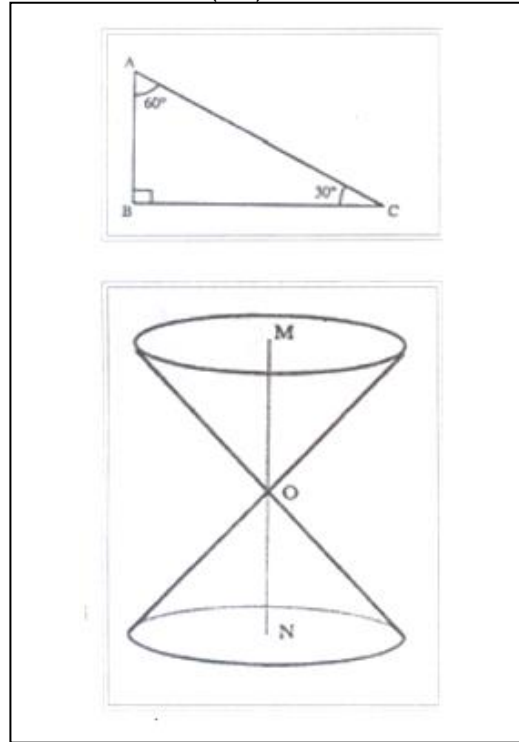
(1) زتائد.

(2) مكافئ.

(3) دائرة.

(4) ناقص.

الشكل (30)



الخلاصة

عزيزي الدارس، في نهاية هذه الوحدة نرجو أن تكون قد حققت الأهداف المرجوة منها، ولمساعدتك على استذكار أهم المفاهيم الواردة في الوحدة، اقدم فيما يلي تلك المفاهيم عبر النقاط التالية:

1- بدأنا بالمستوى الديكارتي وكيفية تعيين النقاط عليه، وذكرنا أن كل نقطة على ذلك المستوى تعرف بإحداثيين هما (x, y) .

2- أوجدنا المسافة بين نقطتين $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ وذلك باشتقاق العلاقة $AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$.

3- عرفنا ميل المستقيم الذي يميل بزاوية θ عن محور x الموجب يساوي ظل زاوية الميل: $m = \tan \theta$.

وميل المستقيم المار بالنقطتين $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ هو $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$.

4- قمنا باشتقاق معادلة الخط المستقيم الذي ميله m ويمر بالنقطة $A(x_1, y_1)$ وهي $y - y_1 = m(x - x_1)$.

5- قمنا باشتقاق معادلة المستقيم المار بالنقطتين $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ وهي $\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$.

6- وقمنا بإيجاد معادلات المستقيم لحالات خاصة وهي:

$x = b$ يوازي محور y ويبعد عنه بمقدار b .

$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ معادلة المستقيم بدلالة مقطعية من المحورين الإحداثيين.

7- كتبنا معادلة المستقيم بالصيغة العامة وهي:

$$ax + by + c = 0$$

بحيث أحد العددين a, b على الأقل $\neq 0$.

-8 درسنا التوازي وقلنا أن المستقيم L_1 والذي ميله m_1 يوازي المستقيم L_2 والذي ميله m_2 إذا كان $m_1 = m_2$.

-9 درسنا التعامد وقلنا أن المستقيم L_1 والذي ميله m_1 يعامد المستقيم L_2 والذي ميله m_2 إذا كان $m_1 m_2 = -1$.

-10 اشتقاق البعد بين النقطتين $A(x_1, y_1)$ والمستقيم $ax + by + c = 0$ وهو

$$\frac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

-11 شرحنا مفهوم المحل الهندسي، وهو المنحنى الذي ترسمه نقطة تتحرك في المستوى تحت شروط معينة، كما ذكرنا أن الدائرة هي المحل الهندسي لنقطة تتحرك على بعد ثابت من نقطة ثابتة.

-12 قمنا باشتقاق معادلات الدائرة العامة، وهي ضمن الحالات التالية:

- مركزها نقطة الأصل ونصف قطرها r $(x^2 + y^2 = r^2)$
- مركزها $M(h, k)$ ونصف قطرها r $((x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2)$

-13 الصورة القياسية لمعادلة الدائرة العامة هي:

$$x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$$

-14 معادلة المماس المرسوم من النقطة $A(x_1, y_1)$ للدائرة:

$$xx_1 + yy_1 + g(x + x_1) + f(y + y_1) + c = 0$$

$$xx_1 + yy_1 + g(x + x_1) + f(y + y_1) + c = 0$$

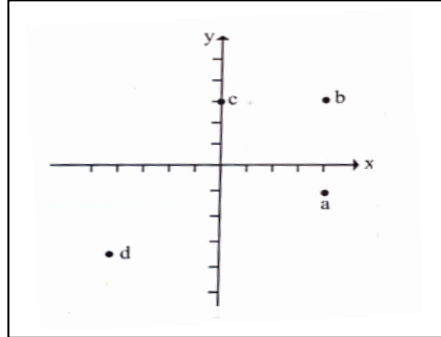
-15 قمنا باشتقاق طول المماس المرسوم لدائرة من نقطة خارجها والتي إحداثياتها

$$(x_1, y_1) \text{ فكان الطول } \sqrt{(x_1 - h)^2 + (y_1 - k)^2 - r^2}$$

-16 وأخيراً عرفنا القطوع المخروطية وهي الدائرة والقطع الزائد والقطع الناقص والقطع المكافئ وكيف تنتج.

إجابات التدريبات:

تدريب (1)



تدريب (2):

$$AB = \sqrt{9+4} = \sqrt{13}$$

$$AC = \sqrt{1+0} = \sqrt{1} = 1$$

$$AD = \sqrt{9+1} = \sqrt{10}$$

C أقرب

تدريب (3):

الشكل مثلث.

تدريب (4):

A) $m = -1, \theta = 135^\circ$

B) $m = \frac{3}{0} = 1, \theta = 90^\circ$ غير معرف

C) $m = \frac{-2}{0} = 1, \theta = 90^\circ$ غير معرف

تدريب (5)

A) 0

B) غير عرف

تدريب (6):

$$m = 2, (-4, 0)$$

المعادلة

$$Y - 0 = 2(X + 4)$$

$$Y = 2X + 8$$

تدريب (7):

a) $\frac{y-3}{x-0} = \frac{5-3}{2-0} \Rightarrow y = x + 3$:المعادلة

b) $\frac{y+1}{x-1} = \frac{0+1}{-2-1} \Rightarrow \frac{y+1}{x-1} = \frac{1}{-3}$

$$y = \frac{-x}{3} - \frac{2}{3}$$

تدريب (8):

A) نضع $x = 0$ ينتج أن

مقطع من المحور y $-3y - 5 = 0 \Rightarrow y = -\frac{5}{3}$

نضع $y = 0$ ينتج أن

مقطع من محور x $2x - 5 - 0 \Rightarrow x = \frac{5}{2}$

B) نضع $x = 0$ ينتج أن

مقطع من محور y $-5y + 10 - 0 \Rightarrow y = 2$

نضع $y = 0$ ينتج أن

$$3x + 10 = 0 \Rightarrow x = -\frac{10}{3}$$

مقطع من محور x

تدريب (9):

$$4y = -2x - 6$$

بالقسمة على 4

$$y = \frac{-1}{2}x - \frac{6}{4}$$

$$m = \frac{-1}{2} \quad \text{إذن}$$

تدريب (10):

نكتب المعادلة على الصورة:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

$$\frac{2x}{3} - \frac{4y}{5} = -6$$

نقسم على -6

$$\frac{x}{-9} + \frac{y}{\frac{15}{2}} = 1$$

مقطعة من محور x $-9 = x$

مقطعة من محور y $\frac{15}{2} = y$

تدريب (11):

ميل المستقيم $2y = 4x - 1$ يساوي 2

ميل = ع ميل المستقيم = 2

إذن $m = 2, (0, -2)$

المعادلة $m = 2, (0, -2)$

$$y = 2x - 2$$

تدريب (12):

$$m_{AB} = \frac{3}{2}, m_{CD} = \frac{-6}{9}$$

$$m_{AB} m_{CD} = \left(\frac{3}{2}\right) \left(\frac{-6}{9}\right) = -1$$

إذن المستقيمان متعامدان

تدريب (13):

$$x - 3y - 1 : L_1 \text{ نأخذ معادلة}$$

$$x=1 \text{ نفرض قيمة } y=0 \text{ نجد أن}$$

$$L_1 \text{ إذن النقطة } (1,0) \text{ تقع على}$$

$$ax + by + c = 0 \text{ نضع معادلة } L_2 \text{ على الصورة}$$

$$x - 3y - 4 = 0 \text{ فينتج}$$

$$a = 1, b = -3, c = -4$$

نطبق على قانون المسافة بين النقطة $(1,0)$ والمستقيم L_2

$$\left| \frac{(1)(1) + (-3)(0) - 4}{\sqrt{9+1}} \right| = \frac{3}{10}$$

$$\frac{3}{\sqrt{10}} \text{ البعد بين المستقيمين}$$

تدريب (14):

$$x^2 + y^2 = 25 \text{ المعادلة}$$

تدريب (15):

$$(x-5)^2 + (y-6)^2 = 81 \text{ المعادلة}$$

تدريب (16):

بما أن الدائرة تمس محور x إذن نصف قطرها 7.

$$(x-3)^2 + (y-7)^2 = 49 \text{ المعادلة}$$

تدريب (17):

مركز الدائرة $(-g, -f)$

نصف قطرها $r = \sqrt{g^2 + f^2 - c}$

باستخدام المعادلة (12) نجد أن طول المماس L هو

$$L = \sqrt{[x_1 - (-g)]^2 + [y_1 - (-f)]^2 - (g^2 + f^2 - c)}$$
$$= \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + 2gx_1 + 2fy_1 + c}$$

مسرد المصطلحات

❖ الزاوية Angle:

المسافة الدائرية بين مستقيمين متقاطعين.

❖ محور Axis:

خط مستقيم أفقي أو عمودي نقوم بتدريجه ليكون مرجعاً للأشكال الهندسية، واصطلاح على أن يكون الخط الأفقي هو محور x والخط العمودي هو محور y .

❖ المستوى الديكارتي Cartesian plane:

هو المستوى الواقع بين محور x و y عند تقاطعهما معاً في نقطة الأصل $(0,0)$.

❖ نقطة الأصل Origin:

النقطة التي يتقاطع عندها محور x و y .

❖ المحل الهندسي Plane geometry:

المنحنى الذي ترسمه نقطة تتحرك في المستوى تحت شروط معينة.

❖ الخط المستقيم Streat line:

مجموعة لا نهائية من النقاط المتصلة معاً، والتي تقع على استقامة واحدة، ويتم تعريفه بنقطتين واقعتين عليه.

❖ الدائرة The Circle:

هي المحل الهندسي لنقطة تتحرك على بعد ثابت من نقطة ثابتة، تسمى البعد الثابت نصف قطر الدائرة، وتسمى النقطة الثابتة بمركز الدائرة.

❖ مماس الدائرة Tangent:

الخط المستقيم الذي يقطع الدائرة في نقطة واحدة تقع عليها.

❖ القطوع المخروطية Conical Sections:

هي الأشكال الناتجة عن تقاطع سطح مستوٍ مع مخروطين متحدين من جهة رأسيهما، وأشهر القطوع المخروطية ثلاثة هي: القطع المكافئ Parabola والناقص Ellipse والزائد Hyperbola.

المراجع العربية والأجنبية

المراجع العربية:

1. عوض عدنان، وعزام مفيد؛ وعلاونه، أحمد؛ وعثمان، الهندسة الإحداثية عمان: جامعة القدس المفتوحة، ط2، 2003م.
2. نصير، عبد المجيد؛ والناشف، بسام، الحسبان: التفاصيل والتكامل والهندسة التحليلية عمان: دار البشير، 1989م.
3. سمور، خالد، الرياضيات والهندسة التحليلية عمان: دار الفكر، ط1، 1999م.

المراجع الأجنبية:

- Silverman R.A, Calculus with Analytic Geometry. New Jersey: Prentice-Hall,1985.
- Swokowski, E.W. Calculus with Analytic Geometry. Prindle, Weberand Schmidt,3 rd ed. 1984.
- Salas S.I, Calculus, one and Several Variables.Wiley,1980.

