Presentación

Estimado alumno:

El texto, que ahora tienes en tus manos, COMPENDIO ACADÉMICO DE ARITMÉTICA, es fruto del esfuerzo conjunto y organizado del equipo docente de Aritmética del Centro Pre Universitario de la Universidad Nacional Federico Villarreal (CEPREVI). Esto significa, entonces, que debe convertirse en una efectiva ayuda en el objetivo que te has trazado, el cual es convertirte en un estudiante villarrealino.

La experiencia adquirida en la práctica docente en los diferentes centros pre universitarios nos demuestra que un texto que contenga una teoría extraída de una bibliografía coherente, aunada a modelos de preguntas explicadas detalladamente y complementados con una variedad de problemas propuestos, se constituye en una herramienta fundamental en el aprendizaje de aquella "parte de la Matemática que se encarga del estudio del número en su formación, representación, operaciones, propiedades y algunas aplicaciones", que se conoce con el nombre de ARITMÉTICA.

Confiamos en que el presente texto se convierta en una contribución al objetivo que esperamos logres a muy corto plazo, pues no hay mayor satisfacción para un verdadero docente que aportar con un grano de arena en la formación de nuevos profesionales involucrados con el desarrollo de nuestro país.

Índice

UNIDAD 1	Razones y proporciones	3
UNIDAD 2	Promedios	13
UNIDAD 3	Magnitudes	22
UNIDAD 4	Reparto Proporcional	31
UNIDAD 5	Regla de tres	43
UNIDAD 6	Interés Simple	51
UNIDAD 7	Teoría de conjuntos	60
UNIDAD 8	Operaciones con conjuntos	70
UNIDAD 9	Numeración	79
UNIDAD 10	Conteo de números	89
UNIDAD 11	Adición y sustracción	97
UNIDAD 12	Multiplicación y División	107
UNIDAD 13	Teoría de la Divisibilidad	117
UNIDAD 14	Criterios de Divisibilidad	126
UNIDAD 15	Números Primos y Compuestos	137
UNIDAD 16	MCD y MCM	145

UNIDAD 1

Razones y proporciones

OBJETIVO

- *Establecer el concepto de «Razón».*
- *Definir una proporción aritmética y una proporción geométrica.*
- *Estudiar las consecuencias de las definiciones anteriores.*
- *Establecer una serie de razones geométricas equivalentes.*
- *Aplicar las propiedades de las proporciones geométricas y de una SRGE, en la resolución de problemas.*

1 RAZON

Es una comparación establecida entre dos cantidades. Esta puede hacerse mediante la sustracción y la división, las mismas que se denominan razón aritmética y razón geométrica respectivamente.
Sin embargo hay otras formas de comparar dos cantidades; como «la diferencia de inversas», «la diferencia de cuadrados», etc.

1.1 Razón Aritmética

Es el resultado obtenido al comparar dos cantidades mediante la sustracción.
La forma sencilla de escribir una razón aritmética es la siguiente:

$$a - b = r \quad \text{donde} \quad \begin{cases} a : antecedente \\ b : consecuente \\ r : valor\ de\ la\ razón \end{cases}$$

1.2 Razón Geométrica

Es el resultado obtenido al comparan dos cantidades mediante la división.
La forma sencilla de escribir una razón geométrica es la siguiente:

$$\frac{a}{b} = q \quad \text{donde} \quad \begin{cases} a : antecedente \\ b : consecuente \\ r : valor\ de\ la\ razón \end{cases}$$

Cuando en un ejercicio se proponen el término «razón» ó «relación» se debe entender que se esta haciendo referencia a la razón geométrica.

2 PROPORCIÓN

Así se denomina a la igualdad establecida entre dos razones del mismo valor y de una misma clase.

2.1 proporción aritmética

Se forma cuando igualamos dos razones aritméticas del mismo valor. Es decir:

$a - b = c - d$

Para que la igualdad mostrada sea una Proporción aritmética, necesariamente debe cumplirse, que:

$$a + d = b + c$$

Los números «a» y «d» se denominan términos extremos mientras que los números «b» y «c» se denominan términos medios.

Por lo tanto: en una proporción aritmética ***«la suma de los extremos es igual a la suma de los medios»***

Tipos de proporciones aritméticas

Dependiendo del valor que pueden tener los términos medios. Las proporciones aritméticas son de dos formas:

I. proporción aritmética discreta

Es aquella proporción aritmética donde los términos medios son diferentes, es decir:

$$a - b = c - d$$

Observación:

Los cuatro términos son diferentes entre sí y cada uno de ellos se denomina «cuarta diferencial»

II. proporción aritmética continua

Es aquella proporción aritmética donde los términos medios son iguales, es decir:

$$a - b = b - c$$

Observación:

- a, b y c son diferentes entre sí.
- «b» es la «media diferencial» de «a» y «c» y su valor esta dado por la siguiente relación:

$$b = \frac{a + c}{2}$$

- Y generalmente «c» es la «tercera diferencial» de «a» y «b»

2.2 proporción geométrica

Se forma cuando igualamos dos razones geométricas del mismo valor. Es decir:

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$$

Para que la igualdad mostrada sea una Proporción geométrica, necesariamente debe cumplirse
axd = bxc

Los números «a» y «d» se denominan términos extremos mientras que los números «b» y «c» se denominan términos medios.

Por lo tanto:
En una proporción geométrica; ***el producto de los extremos es igual al producto de los medios***.

Tipos de proporciones geométricas

Dependiendo del valor que pueden tener los términos medios. Las proporciones geométricas son de dos formas:

I. proporción geométrica discreta

Es aquella P.G. donde los términos medios son diferentes, es decir:

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$$

Los cuatro términos son diferentes entre sí y cada uno de ellos se denomina «cuarta proporcional»

II. proporción geométrica continua

Es aquella P.G. donde los términos medios son iguales, es decir:

$$\frac{a}{b}=\frac{b}{c}$$

- *a, b y c son diferentes entre sí.*
- *«b» es la «media proporcional» de «a» y «c» y su valor esta dado por la siguiente relación:*

$$b=\sqrt{axc}$$

- *Y generalmente «c» es la «tercera proporcional» de «a» y «b».*

3. SERIE DE RAZONES GEOMÉTRICAS EQUIVALENTES

Es la igualdad establecida entre más de dos razones geométricas equivalentes, es decir todas iguales a un mismo valor «k».

$$\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\frac{a_3}{b_3}=\cdots=\frac{a_n}{b_n}=k$$

$$\begin{aligned} a_1 &= b_1 xk \\ a_2 &= b_2 xk \\ &\vdots \\ a_3 &= b_3 xk \end{aligned}$$

Donde:
$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ son los antecedentes.
$b_1, b_2, b_3, \ldots, b_n$ son los consecuentes.
«k» es la constante ó razón de la serie.

Propiedades

- «la suma de los antecedentes es a la suma de los consecuentes, como cada antecedente es a su respectivo consecuente». Es decir:

$$\frac{a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n}{b_1+b_2+b_3+\ldots+b_n}=\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\frac{a_3}{b_3}=\cdots=\frac{a_n}{b_n}=k$$

- «El cociente entre el producto de los antecedentes y producto de los consecuentes, es igual a la razón elevado al número de razones consideradas». Es decir:

$$\frac{a_1 x a_2 x a_3 x \ldots x a_n}{b_1 x b_2 x b_3 x \ldots x b_n}=k^n$$

3. SERIE DE RAZONES GEOMETRICAS EQUIVALENTES CONTINUAS

Ocurre cuando; «fija una razón inicial, las otras tienen como antecedente el consecuente de la razón anterior» es decir:

$$\frac{a}{b}=\frac{b}{c}=\frac{c}{d}=\frac{d}{e}=\ldots=\frac{x}{y}=\frac{y}{z}=k$$

Se nota que: $a = z.k^{(\text{número de razones})}$

EJERCICIOS DE APLICACIÓN

1. Hallar la cuarta proporcional de m; 52 y n; sabiendo que «m» es la media proporcional de 52 y 13; y «n» es la tercera proporcional de 25 y 15.

Resolución

Si «x» es la cuarta proporcional de m; 52 y n $\Rightarrow \frac{m}{52}=\frac{n}{x}$ …(α)

si «m» es la media proporcional de 52 y 13 $\Rightarrow \frac{52}{m}=\frac{m}{13}$

Entonces $m^2 = 52x13$ $\quad m = 26$

Si «n» es la tercera proporcional de 25 y 15 $\Rightarrow \frac{25}{15} = \frac{15}{n}$

Entonces $n = \frac{15x15}{25}$ $\quad n = 9$ $\quad$ Finalmente en (α) $\frac{26}{52} = \frac{9}{x}$

$\therefore$ **x = 18**

2. Dos números son entre si como 8 es a 5. si la razón aritmética de sus cuadrados es 351. hallar el mayor de los números.

Resolución

Si los números son entre si como 8 es a 5, $\Rightarrow$ a = 8k y b = 5k

Luego: a + b = 13k y a - b = 3k

Pero $a^2 - b^2 = 351$ entonces (a + b)(a – b) = 351 …(a)

Al reemplazar los valores de la suma y la diferencia de «a» y «b» en (a), se obtiene: 13k.3k = 351

k.k = 3.3

$\therefore$ k = 3

Finalmente: El mayor de los números es: a = 8x3 **= 24**

3. Dos números están en la relación de 2 a 7. agregando a uno de ellos 73 y 138 al otro se obtienen cantidades iguales. Hallar la suma de los números.

Resolución

Si los números están en la relación de 2 a 7, $\Rightarrow$ a = 2k y b = 7k

Agregamos «al menor 138 y al mayor 73», es decir:

a + 138 = b +73

Reemplazando los valores de «a» y «b»

2k + 138 = 7k + 73

$\therefore$k = 13

Finalmente: la suma: a + b = 9k, es decir: **a + b= 117**

4. Las edades de Antonio y beto están en la razón de 5 a 3. las edades de beto y cesar están en la razón de 4 a 7. si la suma de las tres edades es 159 años. Hallar la edad de cesar.

Resolución

Si $\frac{a}{5}=\frac{b}{3}$ y $\frac{b}{4}=\frac{c}{7}$ $\Rightarrow$ $\frac{a}{5x4}=\frac{b}{3x4}$ y $\frac{b}{4x3}=\frac{c}{7x3}$

$\therefore$ $\frac{a}{20}=\frac{b}{12}=\frac{c}{21}=k$ Luego $\frac{a+b+c}{53}=\frac{159}{53}=k=3$

Finalmente la edad de cesar será c = 21x3 = **63 años**

5. Si $\frac{a}{3!}=\frac{b}{4!}=\frac{c}{5!}=k$ y además el producto de los antecedentes es 3x6! Hallar el mayor de los 3 antecedentes.

Resolución

a.b.c = 3x6! Entonces $\frac{3x6!}{3!x4!x5!}=k^3$ $\therefore k=\frac{1}{2}$

Finalmente el mayor de los antecedentes es: c = 5!xk = $\frac{120}{2}=60$

PROBLEMAS PROPUESTOS

1. Dos números son entre sí como 7 es a 9. Si la media diferencial entre ellas es 24, calcular la razón aritmética entre ellos.
   A) 2 B) 3 C) 4
   D) 5 E) 6

2. En 50 litros de agua agregamos 2 Kg. de azúcar. ¿cuántos litros de agua debemos adicionar para que cada litro tenga 25 gr. de azúcar.
   A) 20 B) 25 C) 30
   D) 40 E) 50

3. Sabiendo que $\frac{a+b}{a-b}=4$. Y la media aritmética de a y b es 8; calcular el mayor de los números.
   A) 6 B) 5 C) 9
   D) 15 E) 10

4. Si Rebeca le diera 5 nuevos soles a milagritos tendría tantos soles como 5 es a 4; Pero si recibiera 10 nuevos soles de milagritos la relación sería de 4 a 3. ¿Que cantidad de nuevos soles tiene Rebeca?
   A) 530 B) 440 C) 380
   D) 220 E) 525

5. Lo que gana y gasta un obrero semanalmente es como 3 es a 2, cuando gana 1320 nuevo soles. Pero cuando gana 1400 nuevos soles la relación es de 4 a 3. ¿Cuánto habrá ahorrado al cabo de seis semanas, si en cada una de las tres primeras gano 1320 nuevos soles?
   A) 1050 B) 1870 C) 2320
   D) 2370 E) 1320

6. En una urna hay 180 bolas, por cada 4 bolas rojas hay 7 bolas amarillas y 9 blancas. Entonces el numero de bolas rojas es:
   A) 9 B) 10 C) 36
   D) 20 E) 90

7. Si: $\frac{a+b}{a-b}=\frac{13}{7}$ y $\frac{a+c}{a-c}=\frac{9}{6}$, calcule la razón aritmética de a y b si c = 24.
   A) 11 B) 13 C) 78
   D) 12 E) 84

8. Si: $\frac{a+4}{a-4}=\frac{b+5}{b-5}=\frac{c+7}{c-7}=\frac{d+9}{d-9}$

   Además a + b + c + d = 125; calcular el «axd»
   A) 200 B) 300 C) 400
   D) 900 E) 600

9. A una fiesta acuden 120 personas. Al sonar «el embrujo» ocurre que las personas que bailaban y las que no bailaban estaban en la relación de 7 a 5. Si la relación de hombres y mujeres que no bailaban era de 3 a 2. ¿Cuánto hombres no bailaban?
   A) 25 B) 30 C) 48
   D) 52 E) 60

10. Si $\frac{c}{e}=\frac{e}{p}=\frac{p}{r}=\frac{r}{32}=\frac{3}{v}=\frac{v}{n}=k$

calcular «c + e + p + r + v + n» además c < 3

A) 29 B) 53 C) 48
D) 35 E) 62

11. En un salón de clases la quinta parte de las mujeres es igual a la tercera parte de los hombres. ¿Qué parte del total representan las mujeres?

A) 2/5 B) 3/8 C) 7/8
D) 5/2 E) 5/8

12. La edad de Rebeca es a la edad de Milagritos como 10 es a 7, ¿Cuál será la relación de sus edades dentro de 5 años, si hace 5 años fue como 3 es a 2.

A) 11/8 B) 13/8 C)27/8
D) 5/12 E) 8/11

13. Ana comparte el agua de su balde con rosa y esta con lucy. Si lo que le dio ana a rosa es a lo que no le dio como 4 es a 5, y lo que dio rosa a lucy es a lo que no le dio como 5 es a 4. ¿en que relación se encuentra lo que no le dio ana a rosa y lo que recibió lucy?

A) 4/9 B) 9/4 C) 5/4
D) 5/12 E) 4/5

14. En la siguiente proporción geométrica $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, se cumple que a + d = 24; b + c= 18 además la suma de los cuadrados de los cuatro términos es 580. hallar (a + c) si a > d y b < c

A) 18 B) 38 C) 30
D) 52 E) 81

15. En una reunión de camaradería por cada 5 hombres adultos que entran, ingresan 6 niños y por cada 3 mujeres adultas que entran ingresan 8 niñas. Si en total ingresaron 286 niños de ambos sexos y el número de hombres adultos es al de mujeres adultas como 7 es a 4. ¿Cuántas mujeres adultas asistieron?

A) 48 B) 28 C) 37
D) 52 E) 60

16. La cuarta proporción de *a, b y c* es 3; y la tercera proporción de *a* y *b* es 9. Hallar el valor de «*a* + *b* + *c*» si *b* – *c* = 4

A) 14 B) 12 C) 15
D) 20 E) 17

17. En la serie $\frac{a^3}{b}=\frac{b}{c}=\frac{c}{d}=\frac{d}{a}=k$ se cumple que $\frac{b}{c}+a=12$ hallar b+c+d

A) 351 B) 375 C) 495
D) 550 E) 615

18. Se tienen dos terrenos de igual área, el primero es de forma cuadrada y el segundo, rectangular. Si uno de los lados del primero es al lado menor del segundo como 3 es a 2. ¿en que relación están sus perímetros?

A) 17/18 B) 15/16 C) 12/13
D) 13/14 E) 49/50

19. Dos números son entre si como 9 es a 8. si el mayor de los números se triplica y el menor aumenta en 24, la razón se duplica. Hallar el mayor de los números.
A) 60 B) 54 C) 48
D) 65 E) 45

20. Si $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}=3$ y $\frac{a^2+c^2}{df}=27$,
Calcular: $\frac{ce}{b^2+d^2}$
A) 3 B) 6 C) 9
D) 15 E) 18

21. Si: $\frac{a}{b}=\frac{b}{c}$, tal que: a – c = 12 y $a^3-c^3=4032$ Hallar: $a^2+b^2+c^2$
A) 306 B) 456 C)499
D) 336 E) 218

22. La suma de cuatro números enteros es 320 y los 2 primeros son entre si como 3 a 1, mientras que los dos últimos están en la relación de 9 a 5. Si la diferencia entre los dos primeros es 20,¿Cuál es el valor de la razón aritmética del mayor con el menor?
A) 118 B) 130 C) 270
D) 150 E) 170

23. En una carrera de 200 metros Anita la gano a Juanita por 20 metros. En una carrera de 180 metros Juanita le gano a Rebeca por 30 metros. ¿Por cuantos metros ganara Anita a Rebeca en una carrera de 400 metros?
A) por 100m B) por 110m
C) por 50m D) por 75m
E) por 150m

24. Si la suma de los cuadrados de 2 números es a la diferencia de los cuadrados de los mismos, como 29 es a 21. ¿Qué porcentaje del mayor es el menor?
A) 48% B) 30% C) 50%
D) 40% E) 60%

25. En una proporción geométrica de razón 3/5 la suma de los cuatro términos es 168 y la diferencia de los consecuentes es 35. Halle el menor de los antecedentes.
A) 18 B) 13 C) 21
D) 15 E) 17

26. En una serie de 4 razones geométricas iguales, los antecedentes son a, 2a, 3a, 4a y el producto de los dos últimos consecuentes es 48. hallar la suma de los consecuentes.
A) 10 B) 15 C) 25
D) 20 E) 35

27. La suma, diferencia y producto de dos números enteros están en la misma relación que los números 7; 1 y 48. Halle el mayor de los números.
A) 12 B) 14 C) 16
D) 20 E) 18

28. La suma y diferencia de los términos de una razón geométrica están en la relación de 5 a 3. Si el producto de dichos términos es 64. Indicar al mayor de los números.
A) 16 B) 14 C) 12
D) 10 E) 8

29. En un barco hay 9 hombres por cada 6 mujeres y en total 630 tripulantes. Al llegar al callao deben bajar 60 hombres y 30 mujeres. ¿Cual será la nueva relación entre hombres y mujeres que quedan en el barco?
A) 13/16 B) 12/17 C) 35/53
D) 53/37 E) 37/61

30. En una fiesta hay 420 personas, entre hombres y mujeres. Si en determinado momento se nota que bailan 30 parejas. ¿Cuál sería la relación entre los hombres y mujeres que no bailan? Sabiendo que por cada 3 hombres hay 4 mujeres.
A) 1/6 B) 2/7 C) 5/3
D) 5/7 E) 3/7

CLAVES

01. E	02. C	03. E	04. A	05. D	06. C	07. E	08. D	09. B	10. C
11. E	12. A	13. B	14. C	15. E	16. B	17. A	18. C	19. B	20. A
21. D	22. E	23. A	24. D	25. C	26. D	27. C	28. A	29. D	30. D

Promedios

Concepto

Denominamos PROMEDIO, a un número representativo de un conjunto de datos numéricos finitos o numerables. Esta comprendido entre el menor y mayor valor de los datos. $a_1 < a_2 < a_3 \ldots\ldots < a_n$

Entonces: $a_1 < \text{PROMEDIO} < a_n$

CLases de promedios

Dados los números:

$a_1 < a_2 < a_3 \ldots. < a_n$, procedemos a calcular los promedios

1. MEDIA ARIMÉTICA (MA)

$$MA = \frac{\text{Suma de cantidades}}{\text{Número de cantidades}} \Rightarrow MA = \frac{a_1 + a_2 + a_3 + \ldots\ldots\ldots + a_n}{n}$$

2. MEDIA GEOMÉTRICA (MG)

$$MG = \sqrt[\text{Nº de cantidades}]{\text{Producto de cantidades}} \Rightarrow MG = \sqrt[n]{a_1 x.a_2 x.a_3 x.\ldots\ldots xa_n}$$

3. MEDIA ARMÓNICA (MH)

$$MH = \frac{\text{Número de Cantidades}}{(\text{Suma de las inversas de las cantidades})} \Rightarrow MH = \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + \ldots.. + \frac{1}{a_n}}$$

$$MH = \frac{2}{\frac{1}{A} + \frac{1}{B}} = \frac{2}{\frac{A+B}{AXB}} \Rightarrow MH = \frac{2AXB}{A+B}$$

CASOS PARTICULARES:

	PARA 2 Nros.	PARA 3 Nros.
MEDIA ARITMÉTICA	$MA = \frac{A+B}{2}$	$\overline{MA} = \frac{A+B+C}{2}$
MEDIA GEOMÉTRICA	$MG = \sqrt{AxB}$	$MG = \sqrt[3]{AxBxC}$
MEDIA ARMÓNICA		$MH = \frac{3ABC}{AB+AC+BC}$

Ejemplo

Hallar la MA; MG y MH de 2, 4 y 8.

$$MA = \frac{2+4+8}{3} = \frac{14}{13} = \boxed{4\frac{2}{3}} \quad ; \quad MG = \sqrt[3]{2x4x8} = \boxed{4}$$

$$MH = \frac{3}{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}} = \frac{24}{7} = \boxed{3\frac{3}{7}}$$

Propiedades

1. Para varios números, no todos iguales:

$$MH < MG < MA$$

2. Para sólo 2 números, A y B cumple:

$$A \times B = MA \times MH$$

3. Para sólo 2 números, A y B; cumple:

$$MG^2 = MA \times MH$$

4. El error que se comete al tomar la MA en vez de la MG es:

$$MA - MG = \frac{(a-b)^2}{4(MA+MG)}$$

EJERCICIOS DE APLICACIÓN

1. Hallar dos números sabiendo que el mayor y menor de sus promedios son 5 y 24/5 respectivamente.

Resolución

MA = $\frac{a+b}{2} = 5$, entonces; $a + b = 10 = 6 + 4$

MH = $\frac{2a.b}{a+b} = \frac{24}{5}$, entonces $\frac{2.a.b}{10} = \frac{24}{5} \Rightarrow a.b = 24 = 6.4$

Luego podemos deducir que: **a = 6 y b = 4**

2. La MA de 15 números es 120; si le agregamos 5 nuevos números a los anteriores, la MA aumenta en 80 ¿Cuál es la suma de los 5 nuevos números?

Resolución

$$\frac{\sum 15 números}{15} = 120 \ , \Rightarrow \sum 15 números = \ 1800$$

$$\frac{\sum 15 números + \sum 5 numeros}{20} = 200$$

De la última expresión se tiene: $\sum 15\text{números} + \sum 5\text{números} = 4000$

Entonces: $1800 + \sum 5\text{números} = 4000 \quad \sum 5\text{números} =$ **2200**

3. El promedio aritmético de las edades de 4 hombres es 48, ninguno de ellos es menor de 45 años ¿cuál es la edad máxima que podría tener uno de ellos?

Resolución

Interpretando el enunciado: $a \geq 45$; $b \geq 45$; $c \geq 45$; $d \geq 45$

$$\frac{a+b+c+d}{4} = 48$$

«Para que uno de ellos tenga la edad máxima, el resto debe tener la edad mínima» es decir:

$$\frac{e(\max)+45+45+45}{4}=48$$

$e(max) + 135 = 192$ **e(max) = 57**

4. La MA de un número y su raíz cúbica, excede a su MG en 2601. hallar la suma de las cifras del número.

Resolución

Interpretando el enunciado: $\frac{a+\sqrt[3]{a}}{2}-\sqrt{a.\sqrt[3]{a}}$ = 2601… (α)

Hagamos un cambio de variable: $a = t^3$ entonces $\sqrt[3]{a} = t$ ...(**)

Reemplazando valores en (α)

$\frac{t^3+t}{2}-\sqrt{t^3.t} = 2601 \Rightarrow t^3 + t - 2t^2 = 2x2601 \Rightarrow t(t-1)^2 = 5202 \Rightarrow$

$t(t-1)^2 = 18(18-1)^2 \quad \therefore t = 18$

En (**) se tiene: $\sqrt[3]{a} = 18 \Rightarrow a = 18x18x18$ **a = 5832**

Finalmente la suma de las cifras del número «a» es **S = 18**

5. Un tren recorre la distancia que separa dos ciudades A y B a una velocidad de 80 km/h, pero el regreso de B hacia A es de 120 km/h ¿Cuál es la velocidad promedio del recorrido?

Resolución

«la velocidad promedio es igual a la media armónica de las velocidades en cada tramo» porque la distancia que cubre el tren al ir de A a B y retornar es la misma.

$$vmp = \frac{2x80x120}{80+120}$$ **vmp = 96 km/h**

PROMEDIO ARITMETICO PONDERADO

Si se dan «n» precios: a_1, a_2, a_3, …, a_n. Y sus respectivos pesos o frecuencias: f_1, f_2, f_3, …, $f_{n;}$ entonces el promedio ponderado será:

$$P.P = \frac{a_1 x f_1 + a_2 x f_2 + \ldots + a_n x f_n}{f_1 + f_2 + \ldots + f_n}$$

Ejemplo:

6. Determinar la nota promedio de un alumno, si al dar 3 exámenes obtuvo, 08, 10 y 15 y los pesos respectivos de cada examen son 1, 2 y 3.

Resolución

$$\text{Nota promedio} = \frac{08x1 + 10x2 + 15x3}{1+2+3} = \frac{73}{6} = 12{,}1$$

PROBLEMAS PROPUESTOS

1. El promedio de la temperatura registrada durante 5 días consecutivos fue de 26º sobre cero. Si en los cuatro primeros días se registró 21º, 27º, 26º y 28º. ¿Cuál fue la temperatura del quinto día?
   A) 25 B) 26 C) 27
   D) 28 E) 29

2. Si el mayor de los promedios de dos números es 10 y el menor de los promedios es 8,1 ¿calcular la media proporcional de dichos números?
   A) 8 B) 6 C) 2
   D) 3 E) 9

3. Sí el promedio de 50 números pares consecutivos es 85, ¿calcular el valor del menor de ellos?
   A) 28 B) 43 C) 84
   D) 53 E) 36

4. En una sección del CEPREVI, el promedio de edades de 17 muchachos es 18 años y de 15 chicas es 17 años. Si llegaran 8 jóvenes más cuyas edades suman 159 años. ¿Cuál sería el promedio de la sección?
   A) 20 B) 18 C) 19
   D) 17 E) 21

5. Un grupo de niños tienen en promedio 15 soles. Pero si a uno de ellos le damos 1 sol mas y al siguiente 2 soles mas y al tercero 3 soles mas y así sucesivamente cada niño tendría en promedio 20 soles. ¿Cuántos niños hay en el grupo?
   A) 8 B) 10 C) 9
   D) 7 E) 6

6. Un automóvil va de la ciudad A hacia la ciudad B con una velocidad «V»; y cuando retorna lo hace con una velocidad «2V» ¿cuál será su velocidad media promedio?
   A) (2/8)V B) (3/4)V C) (4/3)V
   D) (3/7)V E) (11/6)V

7. Rebeca y sus 7 amigas tienen en promedio 7 canicas, si ninguna de sus amigas tiene menos de 5 ¿cuántas canicas como máximo tiene rebeca?
   A) 18 B) 19 C) 20
   D) 21 E) 22

8. El promedio de 20 números es 45, si uno de ellos es 64 y se retira ¿Cuál será el promedio de los 19 números restantes?
   A) 41 B) 42 C) 43
   D) 44 E) 45

9. El salario promedio de un grupo de obreros en una fábrica es de 950 soles semanales, sin embargo al recibir un aumento general de 50 soles llegaron cinco obreros ganando 1000 soles semanales cada uno. ¿Cuál será el nuevo ingreso semanal promedio de cada obrero en la fábrica?
   A) 1000 B) 1100 C) 1200
   D) 1530 E) 3600

10. Rebeca al comprarse un automóvil le regalaron dos llantas de repuesto. Cierto día al cubrir una ruta de 240 kilómetros, tuvo que usar sus dos llantas de repuestos. ¿Cuál habrá sido el recorrido promedio de cada llanta en ese día?
A) 280 B) 140 C) 160
D) 150 E) 360

11. El promedio de notas de un grupo de alumnos es 16, pero si luego del examen de recuperación una tercera parte incremento un punto y otra tercera parte en dos puntos y la última tercera parte en tres puntos. ¿Cuál será el nuevo promedio de notas?
A) 12 B) 14 C) 16
D) 15 E) 18

12. Un móvil parte del punto A, va hacia B luego a C y finalmente retorna al punto A pasando por C, con velocidades «v»; «2v»; «4v» y «6v» respectivamente. Cuál será su velocidad media promedio; si la distancia entre A y B es la mitad de la distancia entre B y C.
A) 2v/3 B) 9v/4 C) 5v/6
D) 7v/9 E) 8v/9

13. El promedio de ingresos de 10 obreros es 210 nuevos soles, de otros 30 obreros es 150, y de otro grupo de 60 obreros es 120. Hallar el salario promedio de todos ellos.
A) 118 B) 168 C) 278
D) 138 E) 861

14. En un salón de clases la edad promedio de los alumnos es de 17 años. Si llegan 15 nuevos alumnos cuyo promedio de sus edades es de 18 años. ¿Cuántos alumnos había en el salón si finalmente la edad promedio fue de 17,5 años?
A) 18 B) 16 C) 12
D) 15 E) 18

15. El promedio de las edades de un grupo de 40 personas es de 40 años, al retirarse las personas que tenían 50 años el nuevo promedio fue de 30 años ¿Cuántas personas tenían 50 años?
A) 28 B) 23 C) 21
D) 20 E) 16

16. El promedio armónico de 50 números es 30 ¿Cuál seria el promedio armónico de la quinta parte de cada uno de los 50 números?
A) 8 B) 120 C) 25,5
D) 6 E) 15

17. El promedio aritmético de 200 números es 45. determine el promedio de los números consecutivos a cada uno de los 200 números dados.
A) 41 B) 42 C) 43
D) 44 E) 46

18. La diferencia entre la media aritmética y la media geométrica de dos números es 4 y la suma de los mismos es 25. hallar la razón aritmética de dichos números
A) 20 B) 30 C) 24
D) 35 E) 16

19. Un ciclista da tres vueltas sobre una pista circular con velocidades de 10, 20, y 30 Km. /h respectivamente en cada vuelta. ¿Cuál será su velocidad media promedio?
A) $28\frac{4}{1}$ B) $16\frac{4}{1}$ C) 16
D) 18 E) $18\frac{4}{1}$

20. S_1 es el promedio de los 100 primeros enteros y positivos, S_2 es el promedio de los 100 primeros enteros pares, S_3 es el promedio de los 100 primeros enteros impares. Calcular el promedio de S_1, S_2 y S_3.
A) 85,333… B) 18,333...
C) 55 D) 100
E) 101

21. El promedio armónico de los números: 20; 30; 42; 56;.....; 870 es:
A) 100 B) 110 C) 120
D) 160 E) 13,8

22. El promedio aritmético de 3 números es 14 y su promedio geométrico es par e igual a uno de los números y su promedio armónico es 72/7. Hallar el mayor de dichos números.
A) 10 B) 12 C) 18
D) 20 E) 24

23. Indicar cuántas proposiciones son verdaderas
I. Si $MH(a,b,c) = 30 \Rightarrow MH(a/3, b/3, c/3) = 10$
II. Si $MA(a,b,c) = 15$ y $MH(a,b,c) = 10 \Rightarrow MG = 250$
III. Si $MG(a,b,c) = 2 \Rightarrow MG(a^3,b^3,c^3) = 8$
A) solo I B) I y II C) I y III
D) II y III E) solo II

24. El promedio de las notas de tres aulas A, B y C del CEPREVI son 17, 18, y n. y el promedio general de las tres aulas 18. Si la cantidad de alumnos de las aulas A, B y C están en la relación de 4 a 5 y 8 respectivamente. Hallar «n»
A) 16,25 B) 17,5 C) 18,5
D) 18,25 E) 16,5

25. El promedio aritmético de los «n» primeros números impares es 48. calcular el promedio de los siguientes «n» números pares.
A) 87 B) 143 C) 192
D) 183 E) 129

26. Los trabajadores de una tienda ganan en promedio 35 diarios. Cuántos trabajadores había, si al contratar 5 ganando 25 soles al día, el promedio salarial diario fue de 32 soles.
A) 20 B) 40 C) 60
D) 80 E) 100

27. 1. 20 amas de casa gastan en promedio 20 soles diarios en el mercado. Determine el promedio de gasto diario si 3 de ellas viajan. Sabiendo que las tres gastaban 26, 27 y 24 soles cada día.
A) 20 B) 18 C) 19,5
D) 19 E) 18,5

28. La edad promedio de un grupo «k» de personas es «m» años. Si la cuarta parte de ellos se intercambian por otros que tienen 3 años mas de edad y la mitad de ellas por personas que tienen un año menos. ¿en cuánto varía el promedio?
A) 2 B) 0,8 C) 0,25
D) 0,5 E) 0,75

29. La edad promedio de un grupo de personas dentro de «10» años será el doble de la edad promedio que tenían hace «7» años. ¿Cuál era la edad promedio dentro de 6 años?

A) 24 B) 30 C) 28
D) 35 E) 37

30. la edad promedio de un grupo de personas en «x» años excederá en 10 al promedio de sus edades hace «y» años. Dentro de «y» años el promedio de edades será de 35 años. ¿Cuál era el promedio de sus edades hace «x» años?

A) 24 B) 30 C) 28
D) 25 E) 27

CLAVES

01. D	02. E	03. E	04. B	05. C	06. C	07. D	08. D	09. A	10. C
11. E	12. B	13. D	14. D	15. D	16. D	17. E	18. A	19. B	20. A
21. C	22. E	23. A	24. C	25. B	26. A	27. D	28. C	29. B	30. D

Magnitudes

Magnitud
Es todo aquello susceptible a ser medido, aumentado o disminuyendo sus valores.

Cantidad
Es la medida de un caso particular de la magnitud.

Ejemplos:

MAGNITUD	CANTIDAD
Temperatura	37ºC
Peso	4 Kg.
Nº de Alumnos	50

Relaciones entre magnitudes

I. Magnitudes Directamente Proporcionales (DP)

Se dice que 2 magnitudes son D.P. cuando el cociente de sus valores correspondientes es constante. Se observa que al aumentar (o disminuir) una de ellas la otra también aumenta (o disminuye), respectivamente.

Ejemplo:

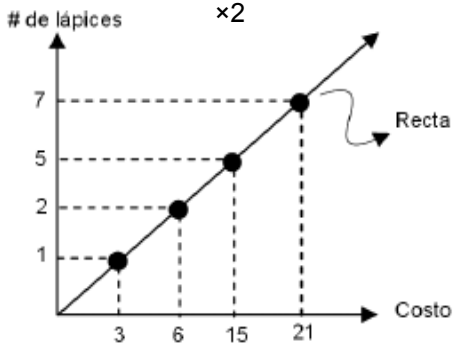
Si 1 lápiz cuesta S/.3.00

Costo (S/.)	S/.3	S/.6	S/.15	S/.21
# lápices	1	2	5	7

×2 (sobre S/.3 y S/.6)

×2 (sobre 1 y 2)

Gráficamente:



Se observa que: $\frac{Costo}{N^{o}\ Lápices} = \frac{3}{1} = \frac{6}{2} = \frac{15}{5} = \frac{21}{7} = 3$

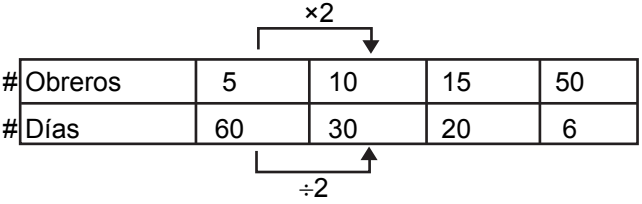
En General: Si A es D.P. con B.

➡ $\frac{\text{valor de A}}{\text{valor de B}} = k$ k: Constante de Proporcionalidad

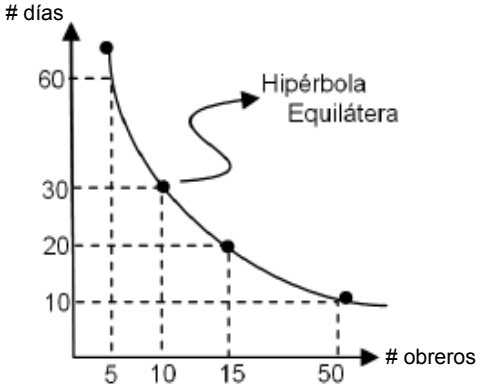
II. Magnitudes Inversamente Proporcionales (IP)

Se dice que 2 magnitudes son IP cuando el producto de sus valores correspondientes es constante. Se observa que al aumentar (o disminuir) una de ellas la otra disminuye (o aumenta) respectivamente.

Ejemplo Si 5 obreros hacen una obra en 60 días.



Gráficamente:



Se observa que:

(Nº obreros)x(Nº de días) = 5x60 = 10x30 = 15x20 = 50x6 = 300

En General: si A es I.P. con B

➡ (Valor de A)(Valor de B) = k k = Constante de proporcionalidad

Propiedades

1. Si A es D.P. con B y C: ➡ $\frac{A}{B \times C} = k$

2. Si A es I.P. con B y C: ➡ $A \times (B \times C) = k$

3. Si A es I.P. con B: ➡ A es D.P. con 1/B

4. Si A es D.P. con B e IP con C: ➡ $\frac{A \times C}{B} = k$ (Proporcionalidad compuesta)

5. Si A es D.P. con B: ➡ A^n es D.P. con B^n

   Si A es I.P. con B: ➡ A^n es I.P. B^n

PROBLEMAS DE APLICACIÓN

1. A es proporcional a la suma de (*B* y *C*) e inversamente proporcional al cuadrado de *D*. Cuando *A* = 2; *B* = 3; y *D* = 6; entonces *C* = 5. Hallar el valor de *C* cuando *A* = 9; *B* = 10 y *D* = 4.

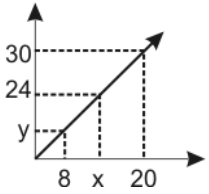
Resolución

$$\left.\begin{array}{l} \frac{A}{B+C} = K \\ A \times D^2 = K \end{array}\right\} \frac{A \times D}{(B+C)} = k$$

Con los datos:

$$\frac{2 \times 6^2}{(3+5)} = \frac{9 \times 4^2}{(10+c)} \qquad \therefore \qquad C = 6$$

2. Si: A (DP.) B. Hallar (x+y)



Resolución

A d.p. B ➡ $\frac{A}{B} = K$

$\frac{y}{8} = \frac{24}{x} = \frac{30}{20}$ ➡ $x = 16 \ ; \ y = 12$

$\therefore \quad x + y = 28$

3. Según la ley de Boyle, la presión es IP. al volumen que contiene determinada cantidad de gas. ¿A que presión está sometido un gas, si al aumentar esta presión en 2 atmosferas, el volumen varía en 40%?

Resolución

(presión)x(volumen) = k

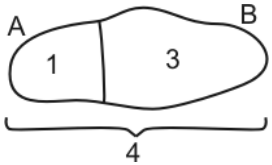
entonces $PxV = (P+2)(60\%V)$ ➡ $P = (P+2)60\%$ ➡ $5P = 3P + 6$

$\therefore P = 3$

4. Si el precio de un diamante es D. P. al cuadrado de su peso. ¿Cuánto se perdería, si un diamante que cuesta $ 32 000 se rompe en dos pedazos siendo uno el triple del otro?

Resolución

$$\frac{\text{Precio}}{(\text{Peso})^2} = K$$



➡ $\frac{P_A}{1^2} = \frac{P_B}{3^2} = \frac{32000}{4^2} = 2000$

$\frac{P_A}{1} = 2000$ ➡ $P_A = 2000$

$\frac{P_B}{9} = 2000 \Rightarrow P_B = 18000$

Se perdería: 32 000 – 20 000 = $ 12 000

$P_A + P_B$ = $. 20 000

5. Se sabe que *A* es D.P. a $\sqrt{B}$ (cuando *C* es constante) y C^2 es D.P. a $\sqrt{A}$ (cuando *B* es constante). Si se tiene la siguiente tabla:

Hallar: $\sqrt{x+4}$

A	96	648
B	9	x
C	2	3

Resolución

$$\frac{A}{\sqrt{B}} = K_1$$

$$\frac{C^2}{\sqrt{A}} = K_2 \Rightarrow \frac{C^4}{A} = K_2$$

$$\Rightarrow \frac{A}{\sqrt{B} x C^4} = K$$

Con los datos:

$$\frac{96}{\sqrt{9} x 2^4} = \frac{648}{\sqrt{X}\ x\ 3^4} \Rightarrow x = 16$$

$$\therefore \sqrt{16+4} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$

PROBLEMAS PROPUESTOS

1. Si A es DP a la raís cuadrada de B e IP con el cubo de C, entonces A = 3 cuando B = 256 y C = 2. Hallar B cuando A = 24 y C = 1/2.
   A) 2 B) $\sqrt{2}$ C) 3
   D) 4 E) 5

2. La eficiencia de un trabajo se mide en puntos y es D.P. a los años de trabajo e I.P. a la raíz cuadrada de la edad del trabajador. Sabiendo que la eficiencia de Jorge es de 2 puntos cuando tiene 1 año de trabajo y 25 años de edad. ¿cuál será su eficiencia a los 36 años?
   A) 16 B) 25 C) 28
   D) 20 E) 24

3. El peso de un disco varía proporcionalmente a su espesor y al cuadrado de su radio. Hallar la relacion entre los radios de dos discos cuyos espesores estan en la relación de 9 a 8 y el peso del 1ro es el doble del 2do.
   A) 4/3 B) 9/8 C) 16/9
   D) 9/5 E) 4/1

4. Si A es IP a la raís de B. Hallar el valor inicial de A si se sabe que al disminuir en 30 unidades, el valor de B varía en un 44%
   A) 120 B) 150 C) 144
   D) 160 E) 180

5. Dos magnitudes son IP. si una de ellas aumenta en 3/5 de su valor ¿como varía el valor de la otra?
   A) No varía
   B) Aumenta en 5/3
   C) disminuye en 3/8
   D) Disminuye en 3/5
   E) disminuye en 1/2

6. Si F es una función de proporcionalidad directa tal que: F(3) + F(7) = 20. Hallar el valor de F(21/5)xF(5)xF(7)
   A) 1200 B) 1176 C) 1154
   D) 1100 E) 1086

7. El ahorro mensual de un empleado es DP a la raíz cuadrada de su sueldo. Cuando el sueldo es S/. 324 gastaba s/. 189. ¿cuanto gastará cuando su sueldo sea de s/. 576?.
   A) 228 B) 356 C) 396
   D) 408 E) 418

8. Si una magnitud A es DP a B y C e IP a D^2 entonces ¿Qué variación experimentará A cuando B se duplica, C aumenta en su doble y D se reduce a su mitad?
   A) Aumenta 23 veces su valor.
   B) Aumenta 30 veces su valor
   C) Se reduce en 1/3 de su valor.
   D) se duplica
   E) Aumenta 35 veces su valor.

9. Una rueda de 42 dientes engrana con otra de «x» dientes, dando la 1ra 25 vueltas por minuto y la 2da 2100 vueltas por hora. el valor de «x» es
   A) 25 B) 10 C) 35
   D) 30 E) 40

10. El precio de un televisor «plasma» varia en forma DP al cuadrado de su tamaño e IP a la raís cuadrada de la energía que consume. cuando su tamaño es «T» pulgadas y consume «x» de energía su precio es de $360. El precio de un televisor

cuyo tamaño es los 3/2 del anterior y consume x/4 de energía, será:
A)$520 B)$ 1620 C)$ 720
D) $ 920 E) $ 320

11. Sean las magnitudes A y B cuyos valores se dan en la siguiente tabla

A	2	6	10	12	30
B	x	18	y	72	450

hallar «x + y»
A) 48 B) 50 C) 52
D) 54 E)60

12. La duración de un viaje por ferrocarril es DP a la distancia e IP a la velocidad. A su vez la velocidad es IP al número de vagones del tren. si un tren de 30 vagones recorre 30 km en 1/2 hora. ¿Cuántos kilometros puede recorrer un tren de 10 vagones en 10 minutos?
A) 10 B) 20 C) 30
D) 15 E) 25

13. Sabiendo que la magnitud A es IP al cuadrado de B y a la raís cuadrada de C y DP al cubo de D. Cuando A = B = D entonces C = 4. Hallar el valor de C cuando A=2D y D=3B.
A) 27 B) 81 C) 35
D) 80 E) 45

14. Si el tiempo que demora un planeta en dar la vuelta al sol es DP al cubo de la distancia entre el sol y el planeta e IP al peso del planeta ¿Cuánto tiempo demora un planeta de doble peso que el de la tierra en dar la vuelta al sol, si la distancia que lo separa del sol es el doble que el de la tierra?
A) 1300 días B)1460 días
C) 365 días D) 1530 días
E)1800 días

15. Si B se triplica, entonces A^2 se triplica (C es constante) y cuando C se hace el doble, entonces A^2 disminuye a su mitad (B es constante). sabiendo que A^2 , B y C están relacionadoscon una constante de proporcionalidad igual a 4, hallar el valor de B cuando A = 2 y C = 3/2.
A) 3/2 B) 5/4 C) 30
D) 1/2 E) 5/2

16. Si A es IP a $(B^2 - 1)$ siendo A igual a 24 cuando B es igual a 10 . Hallar A cuando B es igual a 5.
A) 24 B) 99 C) 12
D) 13 E) 100

17. A es DP a B e IP a C. Si A = B cuando B = 12 y C = 2. Hallar A cuando B = 7 y C = 14.
A) 1 B) 2 C) 4
D) 6 E) 8

18. La magnitud A es DP a B^2 e IP a $\sqrt[3]{C}$ si el valor de B se duplica y el de C disminuye en sus 26/27. ¿que sucede con el valor de A?
A) Queda multiplicado por 12
B) Disminuye en 1/11 de su valor
C) Aumenta en 1/11 de su valor
D) Se triplica
E) Se cuadruplica

19. Si A varía proporcionalmente con (B^2+4) yB varía proporcionalmente con $(\sqrt{C}-5)$; ademas cuando A=16, B = 2 y C = 81. calcular A cuando C = 49
A) 8 B) 9 C) 10
D) 11 E) 12

20. ¿Cual es el peso de un diamante que vale 3920 soles?, si uno de 4 kilates cuesta 1280 soles y el precio es DP al cuadrado de peso.
(1 kilate = 0,2 gramos)
A) 1g B) 2g C) 1,96g
D) 7g E) 1,4g

21. El sueldo por un trabajo será DP al cuadrado de la edad del empleado. Si este actualmente tiene 15 años, ¿dentro de cuantos años cuadruplicara su sueldo?
A) 30 B) 20 C) 15
D) 18 E) 25

22. Si A es IP a B cuando A = a, B = b y si A aumenta 1 unidad, B disminuye 1, si ademas se cumple que: $\frac{a+1}{b}=\frac{x}{8}=\frac{y}{19}$ Hallar $\sqrt[3]{x+y}$
A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 5

23. Se tienen dos magnitudes A y B, en el siguiente cuadro se muestran los valores que toman las variaciones de A y B. Hallar a + b.

A	36	16	9	a
B	2	b	4	6

A) 4 B) 5 C) 6
D) 7 E) 9

24. Si se cumple que A es IP a B^n calcular (a + b + n) si:

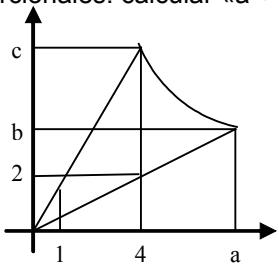
A	10	2,5	5	0,4	0,1	9
B	1	2	$\sqrt{2}$	a	b	$\sqrt{1,1}$

A) 7 B) 12 C) 17
D) 15 E) 18

25. Sean A y B dos magnitudes tales que: A es IP a B^2 si $B \leq 24$, A es DP a $\sqrt{B}$ si $B \geq 24$; si A es 360 cuando B es 8. Hallar A cuando B = 600
A) 100 B) 200 C) 300
D) 400 E) 500

26. En un edificio el volumen de agua que lleva a cierto piso es IP a «T» donde «T» es el tiempo que se demora al llegar el agua al piso «n». Si cuando lleva 80 litros al segundo piso la demora es 4 segundos, ¿que tiempo demorará en llegar 5 litros al cuarto piso?
A) 1 s B) 2 s C) 3 s
D) 4 s E) 5 s

27. Del siguiente gráfico de magnitudes proporcionales. calcular «a + b»



A) 10 B) 11 C) 12
D) 14 E) 15

28. Una rueda dentada A de 50 dientes está unida mediante un eje con el engranaje B y este a su vez engrana con otra rueda C. Sabiendo que B y C tienen respectivamente 28 y 42 dientes. Si A, da 360 RPM. ¿Cuánto tiempo empleará la rueda C en dar 81600 vueltas?
A) 5h 40min B) 5h 30 min
C) 5,5h D) 5,4h
E) 5,6h

29. El precio de un diamante es DP al cuadrado de su peso. un diamante se divide en tres partes que son DP a 2, 3 y 5. Si la diferencia en precios de la mayory menor de las partes es $420. calcula el precio del diamante entero.
A) 1500 B) 2000 C) 2500
D) 3000 E) 3500

30. El costo de un artículo (C) es igual a la suma del gasto en materias primas (G) y salarios (S). el gasto en materias primas es IP a la cantidad de maquinarias (Q) que se tiene y el salario es DP al numero de horas trabajadas por día (H). si Q = 2 y H = 6, entonces C = 12 y si Q = 4, H = 9, entonces C = 16. ¿Cuántas horas se debe trabajar para que C = 23 si Q = 6?
A) 13,0 B) 13,2 C) 13,4
D) 13,6 E) 13,8

CLAVES

01. D	02. D	03. A	04. E	05. C	06. B	07. C	08. A	09. D	10. B
11. C	12. B	13. B	14. B	15. A	16. B	17. A	18. A	19. C	20. E
21. C	22. C	23. E	24. C	25. B	26. D	27. C	28. A	29. B	30. C

Reparto Proporcional

CONCEPTO
Consiste en repartir una cantidad en varias partes que sean proporcionales a otros varios números dados (números índices).

Clases
1. Reparto simple: - directo
   - inverso
2. Reparto Compuesto

REPARTO SIMPLE

Reparto Simple Directo

Las partes deben ser proporcionales a los números dados; es decir, los cocientes respectivos deben permanecer constantes.

Ejemplo:

Repartir 600 en 3 partes que sean proporcionales a 7, 4 y 9.

Solución:

Sean las partes: A, B y C

Se tiene: $A + B + C = 600$

Además: $\frac{A}{7} = \frac{B}{4} = \frac{C}{9} = K$

Despejando cada parte: $A = 7k$, $B = 4k$ y $C = 9k$

La suma de las partes es 600: $7k + 4k + 9k = 600$

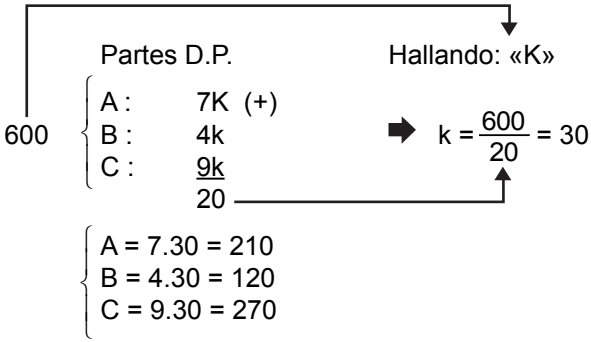
$$20k = 600$$

$$k = 30$$

Entonces las 3 partes son: $A = 7(30) = 210$
$B = 4(30) = 120$
$C = 9(30) = 270$

Este problema ha sido resuelto utilizando procedimientos matemáticos, pero para la solución de problemas del presente capítulo es conveniente trabajar con el método práctico que veremos a continuación.

METODO PRÁCTICO
(Ejercicio Anterior)



Propiedad

«Si a los índices de un reparto se les multiplica o divide por un mismo número, el reparto no se altera».

Esta propiedad evitará operar con números muy grandes o muy pequeños.

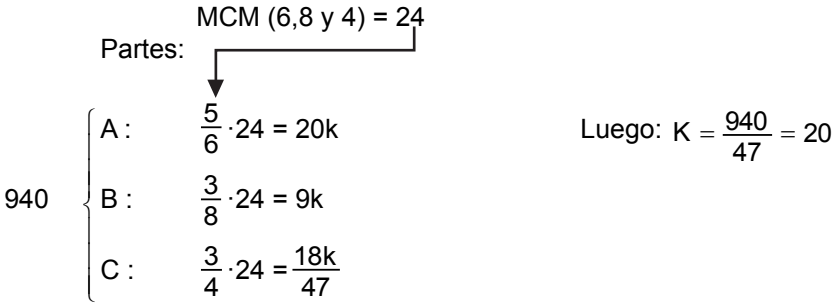
Ejercicio 2

Cuando los números proporcionales son fracciones.

Repartir: 940 en 3 partes que sean proporcionales a los números:

$$\frac{5}{6}, \frac{3}{8} \text{ y } \frac{3}{4}$$

Solución:
Es conveniente que los números proporcionales sean enteros; entonces, buscamos números enteros que estén en la misma relación que las fracciones; para ello es necesario hallar el MCM de los denominadores.



Las partes: A = 20 x 20 = 400
B = 9 x 20 = 180
C = 18 x 20 = 360

Repartimiento Simple Inverso

Recordando la propiedad de magnitudes proporcionales:

Si A es I.P. con B

➡ A es D.P. con $\frac{1}{B}$

Interpretando la propiedad y aplicando a los problemas, significa que si una parte es I.P. al número dado; entonces dicha parte será D.P. a la inversa del número.

Ejemplo:

Repartir 780 en 3 partes que sean inversamente proporcionales a los números 6, 9 y 12.

MCM (6, 9, 12)

	Partes	I.P.	D.P.		
780	A :	6	$\frac{1}{6}$	x	36 = 6K
	B :	9	$\frac{1}{9}$	x	36 = 4K
	C :	12	$\frac{1}{12}$	x	36 = 3K

➡ $K = \frac{780}{13} = 60$

Las partes son: A = 6 x 60 = 360
B = 4 x 60 = 240
C = 3 x 60 = 180

Nota

En reparto inverso, a aquel que tiene el número proporcional menor le toca la parte mayor y viceversa.

REPARTO COMPUESTO

Propiedad

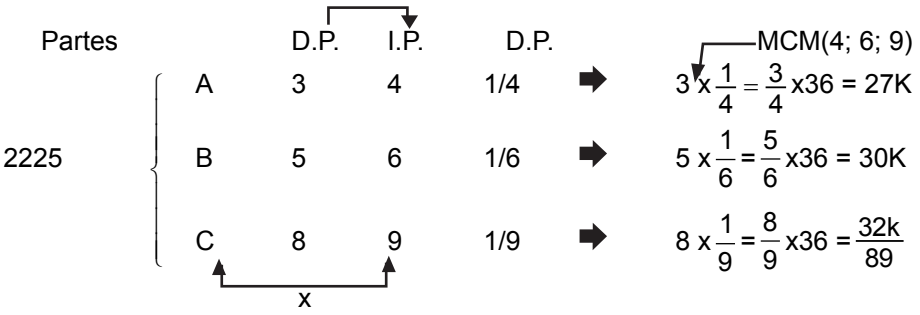
Si A es D.P. con B e I.P. con C

➡ A es D.P. con B y D.P. con $\frac{1}{C}$

➡ A es D.P. $(B \times \frac{1}{C})$

Aplicación

Repartir 2225 en 3 partes que sean D.P. a los números 3, 5 y 8 e I.P. a los números 4, 6 y 9.



$K = \frac{2225}{89} = 25$

Las partes son:

A = 27 x 25 = 675

B = 30 x 25 = 750

C = 32 x 25 = 800

Regla de Compañía

La Regla de Compañía tiene por objeto repartir entre varios socios los beneficios (ganancias) que han obtenido o las perdidas que han sufrido en sus negocios. La Regla de Compañía es un caso particular del repartimiento proporcional.

Los beneficios o las pérdidas deben repartirse proporcionalmente a los capitales de los socios y a los tiempos que dichos capitales quedaron invertidos en la empresa.

Caso General

Se han asociado 3 personas; aportando la 1ra. 2000 dólares durante 6 meses, la 2da. 4000 dólares durante 8 meses y la 3ra. 6000 dólares durante 10 meses. Al finalizar la operación obtuvieron una ganancia de 5200 dólares.

¿Cuánto le corresponde a cada socio?

Resolución

La «G» es D.P. al capital y tiempo ➡ G es D.P. (Cap. x Tiempo)

Reduciendo:

	Socio	Capital	t	Capital	t			D.P.
G=5200	A	2000	6	1	3	➡	A :	3K
	B	4000	8	2	4	➡	B:	8K
	C	6000	10	3	5	➡	C:	15K

➡ $K = \frac{5200}{26} = 200$

A cada socio le toca:

A = 3 x 200 = 600
B = 8 x 200 = 1600
C = 15 x 200 = 3000

PROBLEMAS DE APLICACIÓN

1. Repartir 1647 en tres partes, tal que la primera sea a la segunda como 2 es a 5, y que ésta sea a la tercera como 3 es a 8. ¿Cuál es la cantidad menor?

Resolución

partes

1647

A	2	×	3	=	6k
B	5	×	3	=	15k
C	5	×	8	=	40k

➡ $K = \frac{1647}{61} = 27$

61

A = 6.27 = 162 ➡ Parte menor

Partes: B = 15.27 = 405

C = 40.27 = 1080

2. Repartir 1134 en 4 partes cuyos cuadrados sean proporcionales a los números 12, 27, 48 y 75. Indicar la suma de la mayor y menor de las partes.

Resolución

	dato	DP			DP	Partes
A	A^2	12	4	➡ A	2k	←
B	B^2	27	9	➡ B	3k	←
C	C^2	48	16	➡ C	4k	←
D	D^2	75	25	➡ D	5k	←
	↓ $\sqrt{}$		↓ $\sqrt{}$		14	

➡ $K = \frac{1134}{14} = 81$ ➡ $A + D = 7K = 567$ (81)

3. Una cantidad se reparte en forma IP. A los números 2/5, 1/4, 2/9, 1/5 y 1/N; siendo la parte que le corresponde al último la tercera parte del total. Hallar N.

Resolución

		IP	DP			=	MCM (Denominadores)
X	A	$\frac{2}{5}$	$\frac{5}{2}$	×	2	=	5k
	B	$\frac{1}{4}$	4	×	2	=	8k
	C	$\frac{2}{9}$	$\frac{9}{2}$	×	2	=	9k ➡ $k = \frac{x}{32+2N}$
	D	$\frac{1}{5}$	5	×	2	=	10k
	E	$\frac{1}{N}$	N	×	2	=	2Nk
							(32+2N)K

Dato: $E = \frac{x}{3}$

$2NK = \frac{x}{3}$

$$2N\left(\left(\frac{x}{32+2n}\right)\right)=\frac{x}{3}$$

$6N = 32 + 2N \Rightarrow N = 8$

4. Se reparte N D.P. a los números $\sqrt{32},\ \sqrt{72}$ y $\sqrt{162}$; observando que la media geométrica de las partes obtenidas es 4/19 de N más 578. Hallar N.

Resolución

$$N \left\{ \begin{array}{ll} A: & \overset{DP}{\overbrace{\sqrt{32}}} = 4\sqrt{2} = 4k \\ B: & \sqrt{72} = 6\sqrt{2} = 6k \\ C: & \sqrt{162} = 9\sqrt{2} = 9k \end{array} \right\} \quad N = 19k \ldots\ldots (1)$$

Dato:

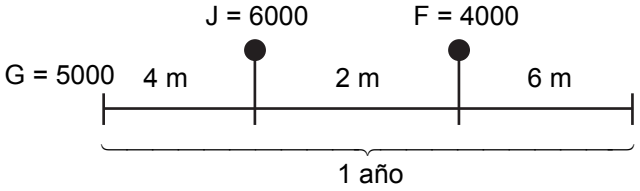
$$\text{MG: } \sqrt[3]{4k.6k.9k} = \frac{4}{19}N + 578$$

$$6k = \frac{4}{19}(19k) + 578 \Rightarrow K = 289$$

En (1): N = 5491

5. Gladys inició su negocio con $ 5000 y a los 4 meses acepta a José como socio, quien aporta $ 6000. Dos meses después, Fernando se une al negocio aportando $ 4000. Si al cabo de un año de iniciado el negocio se decide liquidarlo con una ganancia de $ 1650. ¿Cuánto ganó Gladys?

Resolución



La garantía es D.P. a los capitales aportados y D.P. al tiempo que están dichos capitales en el negocio.

	Cap	tiempo	DP	
G = 1650	G : ~~5000~~	12 m = 30 =	5k	
	J : ~~6000~~	8 m = 24 =	4k	➡ $K = \frac{1650}{1} = 150$
	F : ~~4000~~	6 m = 12 =	$\frac{2k}{1}$	

Gladis ganó: $5k = 750$

$\downarrow$

150

PROBLEMAS PROPUESTOS

1. Repartir 154 en partes DP a los números 2/3, 1/4, 1/5 y 1/6. Indicar la diferencia de la mayor y menor de las partes
   A) 54 B) 60 C) 66
   D) 50 E) 75

2. Repartir 1868 en tres partes que sean IP a los cuadrados de los números: 5, 1/2 y 3. ¿Cuánto corresponde al 2do?
   A) 180 B) 1800 C) 1200
   D) 1000 E) 960

3. Descomponer 1781 en 3 partes que sean proporcionales a los números: 42^2, 28^3 y 56^2 Indicar la mayor parte.
   A) 1576 B) 982 C) 1456
   D) 892 E) 2158

4. Repartir 7400 en 3 partes de tal modo que la primera sea a la segunda como 4 es a 5 y la segunda a la tercera como 3 es a 2. Indicar la menor parte.
   A) 2400 B) 1800 C) 3000
   D) 2000 E) 2200

5. 3 empleados se reparten una gratificación en forma proporcional a su remuneración mensual que son S/.1 350, S/.925 y S/.750, si se sabe que al primero le ha correspondido S/.1 170 menos que a los otros 2 juntos. Calcular el importe de la gratificación.
   A) S/. 10 890 B) S/. 9 870
   C) S/. 9 780 D) S/. 11 100
   E) S/. 10 980

6. Dividir el número 15540 en 3 partes que sean IP a 10^8, 10^9 y 10^{10} Indicar la mayor parte.
   A) 14400 B) 14000 C) 125
   D) 12100 E) 11100

7. Repartir 4 290 en partes I.P. a los números: $\sqrt{75}$, $\sqrt{147}$ y $\sqrt{243}$. Indicar la parte menor.
   A) 950 B) 1050 C) 1100
   D) 1080 E) 1130

8. Dividir el número 7 700 en partes DP a 14^2, 70^2 y 21^2 e IP a 2, 100 y 1/3. Dar la mayor de las partes como respuesta.
   A) 6930 B) 6500 C) 2156
   D) 6660 E) 6666

9. Se reparte \$100 en partes DP a m^2 , 2m y 1; siendo «m» un número natural. Si la mayor cantidad al hacer el reparto es 64. Hallar «m» si es mayor que 2.
   A) 7 B) 3 C) 4
   D) 5 E) 6

10. Una cantidad se reparte en forma I.P. a los números 2/5, 1/4, 2/9, 1/5 y 1/N; siendo la parte que le corresponde al último, la 3era. parte del total. Hallar N.
    A) 4 B) 5 C) 8
    D) 7 E) 6

11. Repartir 1 134 en 4 partes cuyos cuadrados sean proporcionales a los números 12, 27, 48 y 75. Indicar la suma de la mayor y menor de las partes.
    A) 467 B) 565 C) 469
    D) 567 E) 571

12. Se reparte N DP a los números $\sqrt{32}$; $\sqrt{72}$; $\sqrt{162}$; observando que la media geométrica de las partes obtenidas es 4/19 de N más 578. Hallar N.
A) 289 B) 5491 C) 1734
D) 1560 E) 1156

13. Se propone a 3 alumnos repartir proporcionalmente un número. Uno de ellos lo hace directamente a 3, 4 y 7; el otro lo hace directamente a los cuadrados correspondientes, encontrándose una diferencia de 480 en lo que corresponde al primero. Hallar el número.
A) 5180 B) 1554 C) 2500
D) 5080 E) 5480

14. Se han asociado 3 personas aportando la 1era. 2000 soles durante 6 meses, la 2da. 4000 durante 8 meses y la 3ra. 6000 soles durante 10 meses. Al finalizar la operación se obtuvo una ganancia de 5 200 soles. ¿Cuánto le corresponde al 2do. socio?
A) 1600 B) 2000 C) 2400
D) 2300 E) 1800

15. Dos personas se asocian aportando cada uno S/. 2000, 4 meses después aceptaron a un tercero con S/. 4000 de capital. A los 9 meses de iniciado el negocio se liquidó encontrándose una ganancia de S/. 8 400. ¿Cuál es el valor de la ganancia del 3ro?
A) 2700 B) 2900 C) 3000
D) 3100 E) 3250

16. El dueño de un taller mecánico decide repartir las bonificaciones de escolaridad en función directa al número de autos arreglados en el mes de febrero y de manera I.P. a la raíz cuadrada del número de minutos de tardanza. Si los obreros A, B y C han arreglado 27, 70 y 60 autos y han llegado tarde en 18, 50 y 32 minutos respectivamente.
¿Cuánto recibió B si en total se repartió 570 soles?
A) 180 B) 200 C) 210
D) 220 E) 225

17. Hugo, Paco y Luis se reparten un dinero que les dio su tío Donald en forma I.P. a los números 5, 8 y 12 respectivamente; pero luego deciden repartirse el dinero en partes iguales, por lo cual uno de ellos devuelve 230 soles. ¿Cuánto más recibe Luis?
A) 170 B) 180 C) 190
D) 160 E) 200

18. Una cantidad es repartida en forma D.P. a 3 números y se obtiene 96, 32 y 24. ¿Cuál será la mayor de las partes si el reparto se hubiera hecho en forma I.P. a los mismos números?
A) 76 B) 96 C) 84
D) 91 E) 200

19. Se reparte cierta cantidad de dinero entre 3 hermanos en forma proporcional a los números: $\overline{mn}, \overline{nm}$ y $\overline{nn}$, correspondiéndoles a los dos primeros 456 y 798 soles

respectivamente. ¿Cuánto se repartio?
A) $2190 B) $1990 C) $2090
D) $1290 E) $9020

20. Se reparte S/. 5 700 entre 3 personas A, B y C en partes que sean proporcionales a 3 números consecutivos crecientes. Luego del reparto se observa que la quinta parte de lo que le toca a B más lo que le tocó a A hacen lo que le tocó a C. ¿Cuánto le tocó a esta última persona?
A) $2020 B) $2030 C) $2040
D) $2090 E) $2080

21. Dos socios aportan un capital total de $ 24600. Si el aporte de la 1º excede al de la 2º en $ 2400 ¿Cuánto le toca al 1º socio sobre un beneficio de $ 8610?.
A) $4275 B) $3725 C) $4075
D) $3925 E) $4725

22. Dos personas A y B inician un negocio; el capital que aporta A es la mitad que el de B, pero el tiempo que permanece A en la compañía es el triple del tiempo que permanece B. Si al repartirse las utilidades la diferencia entre la utilidad de A y la de B fue de S/. 4 000. Hallar la utilidad total.
A) $24000 B) $40000
C) $12000 D) $20000
E) $18000

23. Una acequia de regadío debe atravesar 2 chacras «A» y «B» la primera de 320 m y la segunda de 232m. Para construir dicha acequia los propietarios contratan a un obrero por S/. 920 y los 3 hacen el trabajo en partes iguales. ¿Cuánto debe pagar el propietario de «A»?
A) s/.240 B) s/.480 C) s/.520
D) s/.680 E) s/. 600

24. Si 500 se reparte I.P. a los 10 primeros términos de la sucesión: 2; 6;12; 20; 30; .... la mayor parte será:
A) 150 B) 175 C) 215
D) 225 E) 275

25. Raúl y Cesar llevan 7 y 11 panes, respectivamente, se encuentran con Marcos y comparten con él los 18 panes en partes iguales; Marcos en muestra de agradecimiento entregó 60 soles. ¿Cómo deben repartirse el dinero Raúl y Cesar?
A) 20 y 40 B) 5 y 55
C) 10 y 50 D) 25 y 35
E) 45 y 15

26. Se desea repartir una herencia entre 3 hermanos dos de ellos de 18 y 32 años, discuten si hacerlos directa o inversamente proporcional a sus edades, le piden al tercero que opine y él responde «me dá igual». Determinar la herencia si al primero le tocó 1200000 mas en el reparto inverso
A) 2775000 B) 3500000
C)1000000 D) 4550000
E) 2000000

27. José antes de morir deja a su hermana s/. 8400 y una claúsula en su testamento que dice: «Si mi hermana tiene una hija dejo para

esta los 2/3 y 1/3 para la madre; pero si tiene un hijo, a este le tocará 1/3 y 2/3 para la madre».

Sucede que la hermana de José tiene un hijo y una hija ¿Cuánto le tocará a la hija?

A) 4800 B) 1200 C) 2400
D) 3600 E) 1500

28. Tres socios A, B y C aportan 30000, 50000 y 60000 soles durante 5, 4 y 6 meses respectivamente «A» por ser el administrador cobra el 20% de las utilidades y en total recibe una ganancia de s/. 5240. Hallar la utilidad total.

A) 14000 B) 14100 C) 14200
D) 15700 E) 18100

29. Un padre deja como herencia a sus hijos 0,4176 há para que se repartan DP a sus edades que son 15, 18 y 25 años respectivament; pero antes de morir el padre pidió que el reparto se hiciera en partes iguales. El que se perjudicó con el cambio de testamento dejo de recibir.

A) 400 B) 392 C) 451
D) 408 E) 510

30. Al repartir N en partes proporcionales a los números: $\sqrt{28}, \sqrt{63}$ y $\sqrt{112}$ la suma de la mayor y menor de las partes es a la segunda como:

A) 2:1 B) 3:2 C) 4:1
D) 4:3 E) 5:2

CLAVES

01. B	02. B	03. C	04. D	05. A	06. B	07. B	08. A	09. C	10. C
11. D	12. B	13. A	14. A	15. C	16. C	17. C	18. A	19. C	20. D
21. E	22. D	23. D	24. E	25. C	26. A	27. A	28. C	29. D	30. A

Regla de tres

Concepto

La regla de tres es un procedimiento aritmético que permite calcular algún valor desconocido luego de comparar varias magnitudes.

De acuerdo al número de magnitudes hay 2 clases:

1. Regla de 3 Simple { - Directa / - Inversa }
2. Regla de 3 compuesta

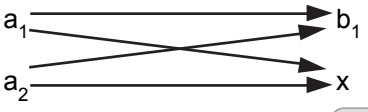
A. REGLA DE 3 SIMPLE DIRECTA

Se comparan 2 magnitudes directamente proporcionales.

MÉTODO: Multiplicación en «ASPA».

Si:

Magnitud (A) DP Magnitud (B)



$\Rightarrow \quad a_1 \cdot x = a_2 \cdot b_1 \quad \Rightarrow \quad x = \dfrac{a_2 \, x \, b_1}{a_1}$

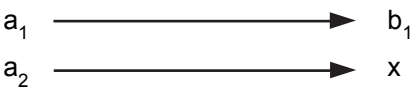
B. REGLA DE 3 SIMPLE INVERSA

Intervienen 2 magnitudes inversamente proporcionales.

MÉTODO: Multiplicación en paralelas.

Si:

Magnitud (A) Magnitud (B)



$\Rightarrow \quad a_2 \cdot x = a_1 \cdot b_1 \quad \Rightarrow \quad x = \dfrac{a_2 x b_1}{a_2}$

REGLA DE 3 COMPUESTA

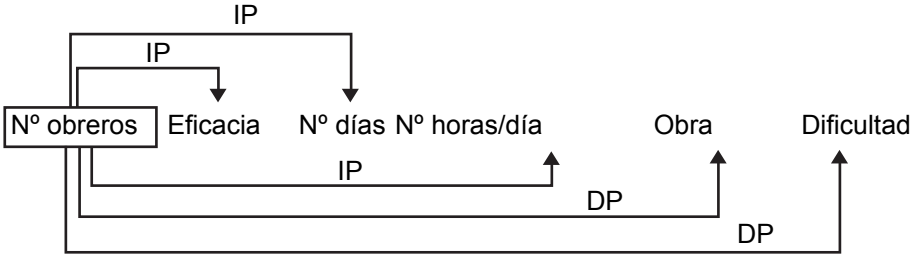
Intervienen más de 2 magnitudes. La regla de 3 compuesta es el procedimiento de cálculo que permite hallar un valor, cuando se conocen un conjunto de valores correspondientes a varias magnitudes.

MÉTODO DE SOLUCIÓN: Proporcionalidad.

Para resolver este tipo de problemas conviene relacionar la 1ra. magnitud con c/u de las otras, comparándolas, tal que si son D.P., se expresa como división y si son I.P., se expresa como una multiplicación, llevando estas relaciones a una sola expresión que se mantiene constante, pese a la variación de las magnitudes que intervienen.

CASO GENERAL:

Un grupo de obreros con determinada eficiencia construyen en «d» días de «h» horas diarias, una obra que presenta cierta dificultad. Planteando:

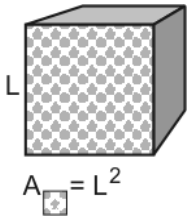


$$\frac{(\text{Nº obreros})(\text{Efic.})(\text{Nº días})(\text{Nº h / d})}{(\text{Obra})(\text{Dificultad})} = k$$

PROBLEMAS DE APLICACIÓN

1. Para pintar un cubo de 10 cm de arista se gastó 12 soles. ¿Cuánto se gastará para pintar otro cubo de 15 cm de arista?

Resolución



Al pintar las caras del cubo:

A mayor área, habrá un mayor costo (DP).

ÁREA COSTO

Si: 6.10^2 → S/. 12

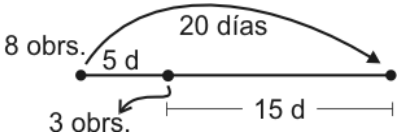
➡ 6.15^2 → S/. x

} R3SD (ASPA)

$6.10^2 \cdot x = 6.15^2 . 12$ ➡ X = 27

2. Ocho obreros pueden hacer una obra en 20 días; después de 5 días de trabajo se retiran 3 obreros. ¿Con cuántos días de atraso terminó la obra?

Resolución



Si luego del 5to día todo hubiese seguido normal:

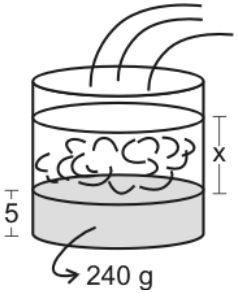
	Nº Obreros		Nº días	
➡	8 Obrs.	⟶	15 d.	R3SD (Paralelas)
Ahora:	5 Obrs.	⟶	X d.	

$\cancel{5} \cdot X = 8 \cdot \cancel{15}$ ➡ $X = 24$

∴ Retraso: 24 – 15 = 9 días

3. Se hace disolver 240 gr de azúcar en 5 litros de agua. ¿Cuántos litros de agua debe añadirse a esta mezcla para que un litro de agua de la nueva mezcla tenga 8 gr de azúcar?

Resolución



Si: 1L ⟶ 8 g

(x +5)L ⟶ 240 g

R3SD (ASPA)

$(x+5) \cdot 8 = 1 \cdot 240$

$x + 5 = 30$ ➡ $x = 25$

4. Juan es el doble de rápido que Pedro, pero la tercera parte que Luis. Si Luis y Pedro hacen una obra en 27 días, ¿en cuántos días harán la misma obra los 3 juntos?

Resolución

Si:	Pedro	:	1 «obrero»	
➡	Juan	:	2 «obreros»	Juntos: 9 «obreros»
y	Luis	:	6 «obreros»	
Luego:	L + P	:	7 «obreros»	27 días

Juntos: 9 «obreros» X días

$$9x = 7.27 \Rightarrow \boxed{X = 21}$$

5. 8 agricultores, trabajando 10 h/d durante 5 días, pueden arar un terreno cuadrado de 40 m de lado. ¿Cuántos agricultores de doble rendimiento serán necesarios para que en 6 días de 8 h/d aren otro terreno de 48 m de lado si su dureza es el doble del anterior.

Resolución

Por proporcionalidad:

$$\frac{(\text{Tiempo}).(\text{Efic.}).(\text{Nº de obreros})}{(\text{Dificultad}).(\text{Obra})} = K$$

$$\frac{\overbrace{(10.5).1.8}^{1º\ serie}}{1.40^2} = \frac{\overbrace{(6.8).2.x}^{2º\ serie}}{2.48^2}$$

Simplificando: $\frac{48}{4} = x \Rightarrow \boxed{x = 12}$

6. Una guarnición de 400 soldados sitiados en un fuerte tiene víveres para 180 días y se consume 900 gr por hombre y por día. Si se recibe en refuerzo de 100 soldados pero no recibirán víveres antes de 240 días, ¿cuál deberá ser la ración de un hombre por día para que los víveres puedan alcanzarles?

Resolución

$\overbrace{\text{obreros}}$	$\overbrace{\text{tiempo}}$		$\overbrace{\text{obra}}$
400 soldados	180d	900 g/d	víveres
500 soldados	240d	x g/d	víveres

Por proporcionalidad:

$$\frac{\overbrace{(180.900).400}^{1º\ serie}}{(\text{víveres})} = \frac{\overbrace{(240.x).500}^{2º\ serie}}{(\text{víveres})}$$

Simplificando: $\boxed{540 = X}$

PROBLEMAS PROPUESTOS

1. Un grupo de obreros pueden hacer una obre en 4 meses, si con 108 albañiles mas lo harian en 40 días. ¿Cuántos obreros hubo al principio?
   A) 44 B) 45 C) 54
   D) 52 E) 58

2. Para hacer un cuvo compacto de 6 cm. de arista se ha utilizado 24 horas. ¿Que parte de un cubo del doble de arista se habrá construido en 32 horas?
   A) 1/5 B) 1/6 C) 1/7
   D) 1/4 E) 1/8

3. En 12 días, 8 obreros han hecho las 2/3 partes de una obra. se retiran 6 obreros. ¿Cuántos días demorarán los obreros restantes para terminar la obra?
   A) 36 B) 12 C) 48
   D) 24 E) 15

4. Si 60 hombres pueden cavar una zanja de 800 m^3 en 60 días. ¿Cuántos días necesitaran 100 hombres, 50% mas eficientes, para cavar una zanja de 1200 m^3 cuya dureza del terreno es 2 veces mas que la anterior?
   A) 120 B) 90 C) 80
   D) 70 E) 60

5. Un total de 72 carpinteros ha trabajado un total de 4800 m^2 de madera en 90 días. ¿Cuántos días necesitarán 60 carpinteros del mismo rendimiento para trabajar 12000 m^2 de madera?
   A) 270 B) 280 C) 290
   D) 260 E) 250

6. 20 monos comen 20 platanos en 20 minutos. ¿Cuántos monos comeran 70 platanos en 70 minutos?
   A) 70 B) 20 C) 35
   D) 40 E) 60

7. Un carnerito ha sido atado a un poste con una soga de 6m. de largo, tarda 10 días en comer el pasto que esta a su alcanze. ¿Que tiempo sera necesariopara que pueda comer toda la hierba a su alcanze con una soga cuya longitud es dos veces mas de la cuerda original?
   A) 40 B) 60 C) 90
   D) 75 E) 80

8. La cantidad de granos de maíz que se puede guardar en un recipiente esférico de 3 dm de diámetro es 1200. ¿Cuántos granos de maíz se puede guardar en un recipiente esférico de 6 dm de diámetro?
   A) 4800 B) 6000 C) 2400
   D) 8000 E) 9600

9. Con s/. 1200 se pueden pintar 3 cubos de 9 cm. de arista. ¿Cuántos cubos de 27 cm. de lado se podrá pintar con s/. 3600?
   A) 1 B) 2 C) 3
   D) 4 E) 5

10. Con 8 obreros se puede hacer una obra en 20 días; con 10 obreros 4 veces más rapidos que los anteriores. ¿En cuántos días haran una obra 9 veces más dificil que la anterior?
    A) 25 B) 31 C) 33
    D) 32 E) 34

11. Una obra debía terminarse en 30 días empleando 20 obreros, trabajando 8 horas diarias. Despues de 12 días de trabajo, se pidió que la obra quedase terminada 6 días antes de aquel plazo y asi se hizo. ¿Cuántos obreros se aumentaron teniendo presente que se aumento tambien en 2 horas el trabajo diario?
A) 4 B) 24 C) 44
D) 0 E) 20

12. 16 obreros pueden hacer una obra en 38 días. ¿En cuántos días harán dicha obra si 5 de los obreros aumentan su rendimiento en 60%?
A) 30 B) 31 C) 32
D) 41 E) 48

13. 35 obreros pueden hacer una obra en 27 días, al cabo de 6 días de trabajo se les une cierto número de obreros de otro grupo, de modo que en 15 días más terminaron la obra ¿Cuántos obreros eran del segundo grupo?
A) 10 B) 12 C) 16
D) 14 E) 18

14. Tres obreros abren una zanja cúbica de 216 m^3 en 5 días trabajando 10 h/d ¿Cuál será la profundidad de otra zanja cúbica que ha sido abierta por 15 obreros en 10 días trabajando 8 h/d
A) 3m B) 4m C) 12m
D) 6m E) 8m

15. Un grupo de 21 obreros ha hecho en 12 días de 8 h/d, L_1m. de una carretera, otro grupo de 40 obreros, 20% más eficientes que los anteriores, han hecho L_2 m. de la misma carretera en 7 días trabajando 10 h/d. Halle la relación L_1/L_2.
A) 1/5 B) 3/5 C) 2/5
D) 4/5 E) 1/3

16. Si 18 obreros realizan la construcción de una casa en 50 días. ¿En cuántos días la harán, si 10 obreros aumentan su rendimiento en 20%?
A) 35 B) 40 C) 36
D) 45 E) 42

17. 30 hombres se comprometen terminar una obra en 15 días; al cabo de 9 días solo han hecho los 3/11 de la obra, razón por la cual, el capataz refuerza la cuadrilla con 42 hombres. ¿Con cuántos días de retrazo se terminará la obra?
A) 9 B) 4 C) 5
D) 3 E) 6

18. 20 hombres trabajaron durante 30 días a 6 h/d para levantar un edificio de 25m. de altura, 12m. de largo y 10m. de ancho. Al terminar este edificio la cuadrilla con 4 hombres menos paso a construir otro edificio de 20m. de alto 14m. de largo y 10m. de ancho, trabajando 7 h/d y con el doble de dificultad. ¿Cuántos días necesitaran para construirlo?
A) 15 B) 30 C) 45
D) 60 E) 75

19. Un cilindro de aguardiente que tiene 30cm de radio y 1m de altura cuesta 120 nuevos soles. ¿Cuánto costara otro cilindro de 25cm de radio y 1.2m de altura?
A) 72 B) 84 C) 97
D) 100 E) 170

20. Si 20 peones se demoran 15 días de 7 h/d de trabajo en sembrar 50 m^2 de terreno. ¿Cuántos días de 8 h/d de trabajo se demoraran en sembrar 80m^2, 15 peones doblemente eficientes?
A) 10 B) 12 C) 14
D) 16 E) 18

21. Se construye una obra con 4 máquinas que trabajan 10 h/d debiendo terminarla en 30 días. Al final del 6to día una de ellas se malogra durante «x» días. Halle el valor de «x» si desde el 7mo día las otras tres máquinas trabajan 12 h/d y cuando se repara la malograda, esta solo puede trabajar 8 h/d, sabiendo que se termina en el plazo estipulado
A) 10 B) 13 C) 14
D) 12 E) 16

22. 15 albañiles han hecho en 12 días 3/4 de un puente; si entonces se retiran 7 albañiles ¿En cuánto tiempo terminaran los restantes?
A) 10 B) 7,5 C) 8
D) 9,5 E) 11

23. 15 obreros pueden ejecutar una obra en 21 días, despues de 6 días se retiran 6 obreros y los restantes terminaron la obra. ¿En cuánto tiempo se ejecuto la obra?
A) 15 B) 20 C) 25
D) 30 E) 31

24. 18 obreros se comprometen a realizar una obra en 20 días trabajando 8 h/d, al finalizar el 5to día se les pidio que entreguen la obra 3 días antes de lo pactado razon por la cual deciden trabajar 9 h/d y contratar mas obreros. ¿Cuántos obreros se contrataron?
A) 1 B) 2 C) 4
D) 3 E) 5

25. Un batallon de soldados cumple una misión durante 40 días, llevando viveres a razon de 4 raciones diarias por soldado. luego de 20 días refuerzan la misión 20 soldados mas y a partir de ese momento consumen todos una ración menos por día, culminando los viveres en 10 días. ¿Cuántos soldados conformaban el batallon inicialmente?
A) 12 B) 15 C) 20
D) 30 E) 25

26. Ricardo puede realizar una obra en 24 días y su hermano Federico en 40 días. Si trabajan juntos con un 50% más de eficiencia terminaran la misma obra en N días. Halle N.
A) 6 B) 8 C) 9
D) 10 E) 12

27. 30 obreros se comprometen a realizar una obra en 12 días trabajando 6 h/d, luego de haber realizado la tercera parte de la obra se les comunica que la obra es una sexta parte más, en ese momento despiden a 5 obreros y los que quedan trabajan 2 horas mas por día. ¿En cuántos días mas terminaran la obra?
A) 1 B) 2 C) 4
D) 3 E) 5

28. Un ganadero tiene 450 ovejas que puede alimentar por 50 días. despues de 10 días vende 50 ovejas y «t» días mas tarde se

sacrifican 20 ovejas por estar enfermas y los alimentos duran 6 días mas de lo previsto. Hallar «t»

A) 20 B) 24 C) 26
D) 28 E) 25

29. Se sabe que 20 obreros pueden hacer una obra en 7 días. Pero realmente el primer día trabajan los 20 obreros y luego al iniciar el segundo día se retiran 8 obreros. ¿Cuántos obreros de doble eficiencia deben contratar a partir del 4to día para terminar en el plazo fijado?

A) 10 B) 13 C) 15
D) 6 E) 8

30. En una obra se observa que faltando 54 días para su culminación fueron despedidos 10 obreros; pero a 12 días para la culminación debe contratarse «n» obreros para cumplir con el plazo original. determinar la suma de cifras de «n».

A) 8 B) 9 C) 10
D) 11 E) 12

CLAVES

01. C	02. B	03. D	04. B	05. A	06. B	07. C	08. E	09. A	10. D
11. A	12. C	13. D	14. C	15. B	16. D	17. B	18. D	19. D	20. C
21. D	22. B	23. E	24. B	25. A	26. D	27. A	28. C	29. D	30. B

Interés Simple

Interés (I)
Es la ganancia, beneficio, utilidad o renta que genera un capital «C» al ser prestado un tiempo «T» y sujeta a una tasa de «r %».

Elementos que intervienen en el cálculo del Interés

I. Capital (C)
Es todo bien o servicio (generalmente dinero) que queda prestado o cedido generando ganancia.

II. Tiempo (t)
Es el plazo o período que queda prestado el capital.

III.Tasa (r%)
También llamado rédito; es la ganancia que se obtiene por cada cien unidades de capital en cierta unidad de tiempo; se expresa, generalmente, en tanto por ciento.

Ejemplo:

Una taza de 5% anual nos indica que por cada año que prestemos un capital, ganamos el 5% de él.

FÓRMULAS PARA CALCULAR EL INTERÉS SIMPLE

1. $I = \frac{CxTxr}{100}$ Cuando «t» está en años.

2. $I = \frac{CxTxr}{1200}$ Cuando «t» está en meses.

3. $I = \frac{CxTxr}{36000}$ Cuando «t» está en días.

El Monto (M)
Es la agregación o suma del capital más el interés que ha generado.

MONTO = CAPITAL + INTERÉS

OBSERVACIONES

En las diferentes fórmulas para calcular el interés, la tasa (r) es siempre anual; sino fuera así se busca una tasa equivalente:

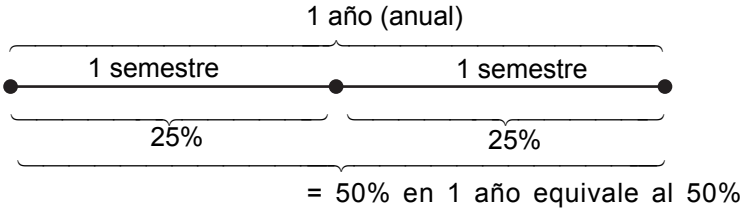
Tasas Equivalentes

Son aquellas que expresadas de manera diferente, generan la misma ganancia al estar aplicados al mismo capital y durante el mismo tiempo.

Ejemplos:

Si se presta un dinero al:

* 45% anual. (no se hace conversión)
* 25% semestral. (buscan tasa equivalente a anual)

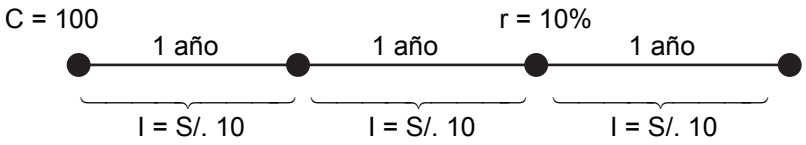


* 5% mensual < > 60 % anual
* 7% bimestral < > 42 % anual
* 10 % Trimestral < > 40 % anual

2. En Interés Simple, el capital permanece constante a lo largo de todo el proceso, por lo que en los mismos tiempos generan los mismos intereses.

Ejemplo: Caso General:

Se presta S/. 100 en 3 años al 10% anual. Calcular el interés y el monto.



Entonces: $\begin{cases} I = 30 \\ M = 100 + 30 \end{cases} \Rightarrow M = 130$

* Siempre se gana S/. 10 por año (10% de 100)

3. Se debe tener en cuenta que:

Mes Comercial	: 30 días
Año Comercial	: 360 días
Año Común	: 365 días
Año bisiesto	: 366 días

PROBLEMAS RESUELTOS

1. ¿Qué interés produce un capital de S/. 120 000 durante 2 meses y 10 días, colocado al 12% trimestral?

Resolución

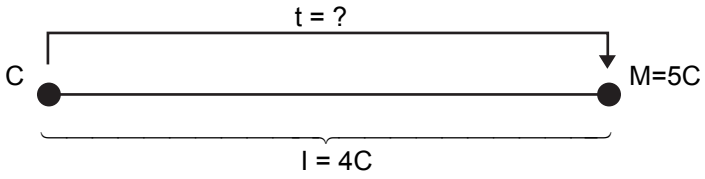
C = 120 000 ; t = 2 meses 10d< > 70 días.

r = 12% trimestral < > 12 x 4 = 48% anual.

Fórmula: $I = \frac{c.t.r.}{36000}$; «t» en días

$I = \frac{120000 \,.70.48}{36000}$ ➡ I = 11 200

2. Un capital se impone al 20% semestral. ¿Luego de cuántos años se ha de quintuplicar?



Si: r = 20% semestral < > 20 x 2 = 40% anual.

Por fórmula: I : $4\cancel{C} = \frac{\cancel{C}.t.40}{100}$ («t» en años)

➡ 10 años = t

3. Un capital es impuesto al 50%. ¿En cuántos meses produce el 25% del monto?

Resolución

r = 50% anual ; t =?

El «C» produce un interés: I = 25% M

$$\frac{I}{M}=\frac{25}{100}=\frac{1}{4}\begin{cases} I = 1K \\ M = 4k \\ Si = I + C = M \end{cases} \Rightarrow \quad C = 3k$$

En la formula de Interés simple («t» en meses)

I : $1k = \frac{3k.t.50}{1200}$ ➡ Resolviendo: t = 8 meses

4. La tercera parte de un capital se coloca al 9% de interés simple. ¿A qué tanto por ciento deberá colocarse el resto para obtener un beneficio total del 11% anual de dicho capital?

Resolución

Capital = 3k $\begin{cases} C_1 = k \ ; r = 9\% \\ C_2 = 2k \ ; r = x\% \end{cases}$

Beneficio: I = 11% (3k) ; t = 1 año

De los datos: $I_1 + I_2$ = I total.

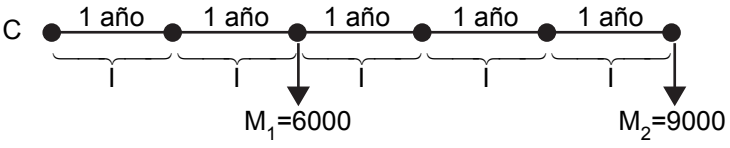
Reemplazando: $\frac{k.1.9}{100}+\frac{210.1.x}{100}=\frac{1}{100}(3k)$

$$9k + 2k\,x = 33\,k$$

$$2k\,x = 24k \quad \Rightarrow \quad x = 12$$

5. Se impuso un capital por dos años y el monto fue 6000. Si se hubiera impuesto por 3 años más, el monto hubiera sido 9000. ¿Cuál fue la tasa de interés?

Resolución



En «I» simple en tiempos iguales (1 año) le ganan los mismos intereses; luego, del gráfico:

$$C + 2I = 6000 \quad ... (1)$$

$$C + 5I = 9000 \quad ... (2)$$

Restando: $3I = 3000 \Rightarrow I = 1000$

En (1): $C = 4000$

Luego el «I» en 1 año:

$$I: \ 1000 = \frac{4000.1.r}{100} \Rightarrow r = 25\%$$

PROBLEMAS PROPUESTOS

1. Dos capitales que estan en relación de 21 a 10 se han colocado al 6% y 8%. Si los capitales e intereses suman s/. 105260 al cabo de 10 años y 6 meses. Encontrar la diferencia de los capitales
   A) 20000 B) 21000 C) 22000
   D) 24000 E) 25000

2. Calcular el interés producido por s/. 6000 impuestos al 0,5% mensual durante 2 años, 8 meses y 6 días.
   A) s/. 696 B) s/.1922 C) s/. 966
   D) s/.1026 E) s/.1251

3. Un capital de s/. 55900 se divide en 3 partes las cuales son impuestas al 30%, 45% y 25% respectivamente y resulta que producen un mismo interes anual. ¿Calcular la parte impuesta al 25%?
   A) s/.23100 B) s/.23400
   C) s/.23520 D) s/.23800
   E) s/.24320

4. Determinar el capital depositado en el regimen de interes simple a una tasa del 8% bimestral, si se sabe que despues de 6 trimestres el monto generado fue s/. 9288.
   A) 15975 B) 6275 C) 13746
   D) 5400 E) 5200

5. Un capital colocado durante cierto tiempo al 4% produce un montode 14400 soles. Colocando el mismo capital al 5% durante un año menos daría un interés de 2400 soles. calcular el capital.
   A) 11500 B) 12000 C) 12500
   D) 13000 E) 13500

6. ¿Durante cuanto tiempo se debe colocar un capital al 60% semestralpara que el monto sea el 180% del capital?
   A) 8 meses B) 9 meses
   C) 8 años D) 12 meses
   E) 9 años

7. Una persona luego de imponer un capital por un año y 8 meses al 6% decide repartir los intereses producidos entre sus 3 sobrinos. a uno de ellos le dá 1/3, al segundo los 3/8 y al tercero el resto. Calcular el capital de dicha persona sabiendo que si el tercer sobrino impone su parte al 80% de interes simple ganaría en un año y 3 meses, 50 soles menos que la parte del segundo sobrino.
   A) 8000 B) 1000 C) 6000
   D) 2000 E) 9000

8. Un capital se impone al 20% anual . al final del primer año se retiran los intereses y una parte del capital igual a los intereses lo mismo se hace al final del segundo año quedando el capital disminuido en s/. 108000 ¿Cuál es el valor del capital?
   A) S/.200000 B) S/.100000
   C) S/.400000 D) S/.500000
   E) S/.300000

9. Un capital produce un interes al cabo de cierto tiempo en el cual se observa que la diferencia entre el capital y el interés equivale al 32% de dicho capital. calcular que interés produce un capital de s/.

480 en la cuarta parte del tiempo anterior con una tasa del 25% menor que el anterior
A) 68 B) 72,4 C) 51,6
D) 92 E) 48,6

10. Dos capitales cuya diferencia es de s/. 15000 producen un interés de s/. 3750 anualmente y estan colocados al 5% y al 4%. ¿Cuales son dichos capitales?
A) 35000 y 50000
B) 40000 y 55000
C) 38000 y 53000
D) 25000 y 40000
E) 45000 y 60000

11. Hallar el capital de una persona sabiendo que los 2/5 impuestos al 4% y los 3/7 al 5% dan una renta anual de s/. 5200.
A) s/.112000 B) s/. 120000
C) s/.140000 D) s/. 148000
E)s/. 150000

12. Un capital impuesto al 15% trimestral de interés simple produce anualmente s/. 3000 mas de interés que si se impusiese al 55% anual. ¿Cual es dicho capital?
A) 60000 B) 65000 C) 68000
D) 69000 E) 70000

13. Una persona coloca 3/7 de su capital al 30% mensual y el resto al 20% mensual obteniendose luego de 3 meses un monto de s/. 121000. ¿Cual era el capital inicial?
A) 11000 B) 100000 C)90000
D) 80000 E)70000

14. Se ha colocado a interés simple una cantidad al 6% y otra al 8%. el primero es al segundo como 3/2 es a 7/5, los capitales e intereses reunidos al termino de 10 años y 6 meses dá: s/. 100420. ¿Cual es el menor de los capitales?
A) 40000 B) 30000 C)28000
D)33000 E) 14000

15. Andrea tiene s/. 400 que presta al 10% mensual. Fabiola tiene s/. 600 que presta al 10% bimensual. ¿Dentro de cuantos meses los montos seran iguales?
A) 30 B) 20 C) 16
D) 24 E) 27

16. Un capital de s/. 30000 estuvo impuesto durante cierto tiempo al 8% anual; al cabo del cual se retira la totalidad del monto y se impone al 10% durante un tiempo que supera en 5 mese al anterior; produciendo un interés de s/. 11590. Hallar el tiempo de esta última imposición.
A) 3años 1 mes
B) 3años 2meses
C) 2años 9meses
D) 3 años 5 meses
E) 2años 10 meses

17. Dos capitales fueron impuestos al mismo tiempo a dos tasa que estan en relación de 5 a 4; despues de un tiempo se observa que los intereses producidos hasta ese momento estan en razon inversa al de las tasas. ¿En que relación estaban los capitales?
A) 5:4 B) 25:9 C) 25:7
D) 25:16 E) 36:49

18. Un negociante presta s/. 4800 al 2,5% trimestral y al momento del reembolso recibe un total de s/. 5880. ¿Cuánto tiempo duró el prestamo?
A) 2 años
B) 2 años y 3 meses
C) 2 años y 4 meses
D) 2 años y 6 meses
E) 3 años

19. Una persona coloca los 3/7 de su herencia al 5% y el resto lo ha dividido en dos partes, colocando la primera al 6% y la segunda al 3% produciendo ambos el mismo interés. Si se obtiene una renta de s/.1860. Calcular el valor de la herencia
A) 40000 B) 41000 C) 42000
D) 43000 E) 44000

20. Si a un capital se le suma sus intereses de 15 meses, se halla un nuúmero que es a este capital como 682 es a 620. ¿ A que tanto por ciento fué colocado?
A) 6 B) 6,66 C) 8
D) 8,5 E) 9,3

21. La R.A de dos capitales es de s/. 1500; se impone el mayor al 3% y el otro al 4% de interes simple durante 18 meses, luego de ese tiempo los montos son iguales. El menor capital es:
A) 300000 B) 25500 C) 2650
D) 600000 E) 104500

22. Un capital prestado al 5% mensual durante 4 meses, produce un interés de s/.800; ¿Que interés producirá el mismo capital a una tasa del 3% bimestral en 8 meses?
A) 450 B) 480 C) 2800
D) 3200 E) 3600

23. Se impone s/. 36000 en dos bancos una parte al 8% y la otra al 6% obteniendose anualmente s/. 2620 de ganacia. Hallar la segunda parte
A) s/.12000 B)s/.13000
C) s/.14000 D) s/.16000
E) s/. 26000

24. ¿En cuanto tiempo un capital impuesto al 1% quincenal, se triplicará?
A) 6años y 2 meses
B) 7años y 4 meses
C) 7 años y 6 meses
D) 8 años
E) 8 años y 4 meses

25. A dos estudiantes se les dejo que calcularan los intereses producidos por un capital al 4% durante 219 días y presentaron los resultados con una diferencia de 3 soles debido a que uno de ellos hizo el calculo con un año comun. Determinar el capital.
A) s/.10000 B) s/.6000 C)s/.9000
D) s/.12000 E) s/. 7000

26. ¿Que interés produce un capital de s/. 120000 durante 2 meses y 10 días, colocando al 16% cuatrimestral?
A) s/.12000 B) s/.11200
C)s/.10000 D) s/.11800
E) s/.13500

27. Si se hubiese depositado un capital al 5% en lugar de 3% se hubiese ganado 200 soles mas. ¿Cual es el interés que se hubiese ganado en el mismo plazo si la tasa hubiera sido 10%?
A) s/.1000 B) s/.1200 C)s/.2000
D) s/.3000 E) s/.3400

28. ¿En cuánto se convertirá s/. 7200 impuesto al 17% trimestral en 5 meses?
A) s/.84200 B) s/.9240
C)s/.942000 D) s/.9500
E) s/.9540

29. 3 persona imponen sus capitales que estan en la misma relación que sus edades que son: 20, 25 y 21 años. al 15%, 20% y 22/7% respectivamente. Calcular la suma de los intereses que produciran los capitales en un año. Si la suma de los capitales es s/. 1320
A) s/.169,42 B) s/.178,85
C) s/.165,2 D) s/.163,8
E) s/.173,2

30. ¿Cuanto tiempo ha estado impuesto un capital de s/. 4000 para que al 9% produzca 23 soles?
A) 20 días B) 23 días C)26días
D) 39 días E) 46 días

CLAVES

01. C	02. C	03. B	04. D	05. B	06. A	07. C	08. E	09. C	10. A
11. C	12. A	13. E	14. C	15. B	16. E	17. D	18. B	19. C	20. C
21. E	22. B	23. B	24. E	25. C	26. B	27. A	28. B	29. E	30. B

UNIDAD 7

Teoría de conjuntos

I. CONCEPTO

Hablando estrictamente, se considera al «Conjunto» como un concepto no definido, acostumbrándose a usar como sinónimos de conjuntos a las palabras: «colección», «reunión», «agregado», etc.

Es por ello que podemos afirmar que la palabra «conjunto» nos da la idea de agrupación de objetos homogéneos de posibilidades reales o abstractas. Los integrantes que pertenecen a la agrupación se les llaman «ELEMENTOS» del conjunto.

II. NOTACIÓN

«A» es el conjunto cuyos elementos son las letras del alfabeto.

$$A = \{a, b, c, ..., z\}$$

III. CARDINAL DE UN CONJUNTO (n)

El cardinal de un conjunto viene a ser el número de elementos que posee un conjunto.

n(A) .... Se lee: «Numero de elementos del conjunto A»

EJEMPLO:

$A = \{2; 4; 6; 8; 10\}$ ➡ $n(A) = 5$

$B = \{1; 1; 2; 2\}$ ➡ $n(B) = 2$

$C = \{\{2; 3\}; \{7; 8\}\}$ ➡ $n(C) = 2$

IV. RELACIÓN DE PERTENENCIA ( ):

Es aquella que relaciona a todos y cada uno de los elementos de un conjunto, dicho conjunto.

$$\text{Elemento} \in \text{Conjunto}$$

Ejemplos:

* $A = \{5, 10, 15, 20, 25\}$ ➡ $5 \in A$: «5 pertenece al conjunto A»

  También: $10 \in A$; $20 \in A$; $21 \notin A$.

* $B = \{2; 3; \{4\}; 5\}$ ➡ $2 \in B$; $3 \in B$; $5 \in B$; $4 \notin B$; $\{4\} \in B$

V. DETERMINACIÓN DE CONJUNTOS:

1. ***Por Comprensión o de forma constructiva***. Cuando se define al conjunto enunciando una o más propiedades comunes se caracterizan a los elementos de dicho conjunto.
2. ***Por Extensión o de forma tabular***: Es cuando se enumeran uno a uno todos o algunos de los elementos del conjunto.

Ejemplo:

A) Determinar el conjunto de las vocales.

B) Determinar el conjunto de los números impares menores que 16.

SOLUCIÓN

**** Por Extensión:***	**** Por Comprensión:***
A = [a, e, i, o, u]	A = [x /x es una vocal]
B = [1, 3, 5, 7, 9, 13, 15]	B = [x/x es un numero impar, x < 16]

OBSERVACIÓN:

x/x se lee: «x es un elemento del conjunto tal que x «.

VI. RELACIONES ENTRE CONJUNTOS

1. ***INCLUSIÓN*** ($\subset$). Se dice que un conjunto «A» está incluido en un conjunto «B»; todos los elementos de «A» pertenecen a «B».

   Ejemplo:

   Si: A = {a, b, {c}} y B = {a, b, {c}, d}

   ➡ * $A \subset B$

   «A está incluido en B»
   «A es parte de B»
   «A está contenido en B»
   «A es subconjunto de B»

   También:

   * $\{a, b\} \subset A$; * $\{c, d\} \not\subset B$
   * $\{b, \{c\}\} \subset A$; * $\{A\} \not\subset A$

OBSERVACIÓN:

Convencionalmente se considera que el conjunto vacío (ϕ) está incluido en todo conjunto.

➡ $\phi \subset A$; $\phi \subset B$

* ***SUBCONJUNTO:***

Sea el conjunto A, es subconjunto de A todo conjunto incluido en el conjunto A.

Ejemplo:

Si: A = {a, b, c}

Subconjuntos de A:

{a}; {b}; {c}; {a, b}; {a, c}; {b, c}; {a, b, c}; ϕ

Entonces «A» tiene 8 subconjuntos.

➡ Nº de Subconjuntos de A = $2^{n(A)}$

2. ***SUBCONJUNTO PROPIO***. Dado un conjunto «A», un subconjunto propio de «A» es todo aquel subconjunto de «A», excepto el que es igual a él.

➡ Nº de Subconjuntos Propios de A = $2^{n(A)} - 1$

IGUALDAD DE CONJUNTOS. Se dice que dos conjuntos son iguales si tienen los mismos elementos.

➡ $A = B \Leftrightarrow A \subset B \quad y \quad B \subset A$

EJEMPLO:

Si:

A = {1, 3, 5, 7, 9} ➡ A = B

B = {x $\in$ N / X impar < 10}

EJEMPLO:

Si A y B son conjuntos iguales, hallar X+Y

Si: A = $\{2^x - 1; 27\}$ y B = $\{3^{y-1}; 31\}$

RESOLUCIÓN

Los elementos de A son los mismos que los del conjunto B; entonces se deduce:

* $2^x - 1 = 31$
  $2^x = 32$
  $x = 5$

* $27 = 3^{y-1}$
  $3^3 = 3^{y-1}$
  $3 = y-1$
  $y = 4$

$\therefore$ $x + y = 9$

3. ***CONJUNTOS DISJUNTOS***. Dos conjuntos son disjuntos cuando no tiene elementos comunes.

EJEMPLO:

P = {2; 4; 6; 8} ; I = {1; 3; 5; 7}

VII. CLASES DE CONJUNTOS POR EL NÚMERO DE ELEMENTOS:

1. ***CONJUNTO UNITARIO***. Es aquel conjunto que consta de un solo elemento.

$S = \{X \in N / 3 < X < 5\}$ ➡ $X = 4$

$S = \{4\}$ $n(S) = 1$

EJEMPLO:

Si: $A = \{a^2 - 6; a + b; 10\}$ es Unitario.

Hallar: a x b; si aN

RESOLUCIÓN

Los 3 elementos son los mismo (iguales).

$* a^2 - 6 = 10$

$a^2 = 16$

$a = 4$

$* a + b = 10$

4 6

➡ $a \times b = 24$

2. ***CONJUNTO VACÍO*** (ϕ; { }). Es aquel conjunto que no posee elementos; también se le denomina conjunto nulo. Por convención se acuerda que el conjunto vacío es un subconjunto de cualquier otro conjunto. (V A; ϕ A).

$R = \{x \in N / 5 < x < 6\}$ no hay valor para «x»

$R = \{\ \} = \phi$ $n(R) = 0$

3. ***CONJUNTO FINITO***. Es un conjunto con una limitada cantidad de elementos. Se puede determinar por extensión.

$F = \{x \in Z / 3 < x < 12\}$ ➡ $F = \{4; 5; 6; .....; 11\}$

4. ***CONJUNTO INFINITO***. Es aquel conjunto que tiene una cantidad ilimitada de elementos:

$A = \{x / x \in Z; x > 0\}$

$A = \{1, 2, 3, 4, ...\}$ ➡ $n(A) = \infty$

VIII. OTROS CONCEPTOS:

1. ***CONJUNTO UNIVERSAL*** (U). Es un conjunto de referencia; para el análisis de una situación particular, se elige en forma arbitraria.

Ejemplo:

A = {x / x es una gallina}

Puede tomar:

U = {x / x es un ave} o U = {x / x es un vertebrado}

2. ***CONJUNTO POTENCIA*** [P(A)]. Dado un conjunto A, el conjunto potencia de A [P(A)] es aquel que está formado por todos los subconjuntos de A.

Si: A= {a, b, c}

P(A) = {{a}, {b}, {c}, {a, b}, {a, c}, {b, c}, {a, b, c}, ϕ}

Luego: P(A) tiene 8 elementos

➡ $n[P(A)] = 2^{n(A)}$

Ejemplo:

¿Cuántos elementos tiene el conjunto potencia de C?

C = {2, 4, 6, 8, 10}

Resolución:

Como n(C) = 5 ➡ $n[P(C)] = 2^5 = 32$

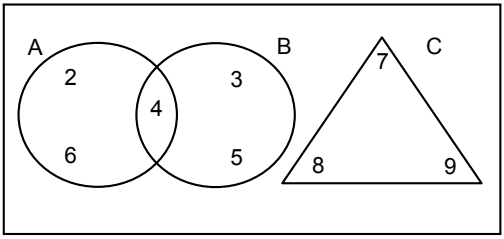
IX.DIAGRAMAS DE VENN–EULER

Son regiones planas cerradas, circulares, rectangulares, etc. Que nos permitirán representar gráficamente a los conjuntos.

Ejemplo:

Dados los conjuntos:

A = {2, 4, 6} ; B = {3, 4, 5} ; C = {7, 8, 9} ; U = {1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10}



X. DIAGRAMA DE CARROLL

Con mayor utilidad para conjuntos distintos.

APLICACIÓN:

En un salón de 90 alumnos, 35 son mujeres, 62 son deportistas, y 12 son mujeres no deportistas. ¿Cuántos hombres no son deportistas?

Resolución:

	M = 35	H = 55
Dep. = 62		
No Dep.= 28	12	X
		90

➡ No Deportistas:

$12 + X = 28$

$X = 16$

PROBLEMAS RESUELTOS

1. Dado: $C = \{m + 3/ m \in Z; m^2 < 9\}$

   Calcular la suma de elementos del conjunto C

Resolución

Si: $m \in z$ y $m^2 < 9$

↓	↓
-2	4
-1	1
0	0
1	1
2	4

Si: Elementos: $(m + 3)$ ➡ $C = \{1; 2; 3; 4; 5\}$

$\therefore$ Σ elementos: 15

2. Se tiene dos conjuntos donde uno está incluido en el otro; la diferencia de los cardinales de sus conjuntos potencias es 112. Indique el número de elementos que posee el conjunto que incluye al otro.

Resolución

Conjuntos A y B $(B \subset A)$

Si: $n(B) = x$ y $n(A) = x + n$

Dato: $\underbrace{n\,[P(a)]} - \underbrace{n\,[P\,(B)]} = 112$

$2^{x+n} - 2^x = 112 = 16.7$

$2^x \cdot (2^n - 1) = 2^4 \cdot (2^3 - 1)$

Luego: X = 4 y n = 3

$\therefore$ n(B) = 4 y n (A) = 4 + 3 = $\boxed{7}$

3. Si: $A = \{x/x \in Z \wedge 10 < x < 20\}$

$B = \{y+5 / y \in Z \ (\sqrt{y} + 15) \in A\}$

¿Cuál es la suma de los elementos de B?

Resolución

El Conjunto A, determinado por extensión, es:

$A = \{11; 12; 13; 14; 15; 16; 17; 18; 19\}$

En el conjunto B, como $(\sqrt{y} +15) \in A$

$10 < \sqrt{y} +15 < 20 \Rightarrow -5 < \sqrt{y} < 5$

$\Rightarrow \sqrt{y} = 0, 1, 2, 3, 4$ porque $y \in Z \Rightarrow y = 0, 1, 4, 9, 16$

Luego: B = {5; 6; 9; 14; 21}

$\therefore$ Suma de elementos de B = 55

PROBLEMAS PROPUESTOS

1. Dado el conjunto

   B = {14; {2};ϕ ; {7; 15}}
   {2} ⊂ B {14} ∈ P(B)
   {7; 15} ∈ B ϕ ∈ B
   ϕ ⊂ B {14; ϕ} ⊂ B
   14 ⊂ B 14 ∉ B
   {{2}; 14} ∈ P(B)
   ¿Cuántas proposiciones son falsas?
   A) 3 B) 1 C) 5
   D) 4 E) 6

2. Determinar por extensión el siguiente conjunto:
   A = {(3x – 3) / x ∈N ∧ 0 ≤ x ≤ 4}
   A) {0; 1; 2; 3} B) {1; 2; 3}
   C) {0; 3; 6} D) {0; 3; 6; 9}
   E) { -3; 0; 3; 6}

3. Si A = {(x^2 + 4) / x ∈Z ∧ -4 < x < 6}. Hallar n(A)
   A) 4 B) 5 C) 6
   D) 7 E) 8

4. Si B = {(x + 1) / x ∈N ∧ 3x < x + 14}. Dar como respuesta el cardinal de B.
   A) 4 B) 5 C) 6
   D) 7 E) 8

5. Calcular (b - a) si E es un conjunto unitario. E = {4a+1; 2b+a; 3a+4}
   A) 1 B) 2 C) 3
   D) 4 E) 5

6. Dados los conjuntos A = { 1; 2; 3; 4; 5; 6} y B = { 0; 1; 4; 6; 7; 8; 9}. Sea «m» el número de subconjuntos no vacios de A que son disjuntos con B y «n» lo análogo de B a A. Hallar «m + n»
   A) 7 B) 7 C) 22
   D) 24 E) 26

7. Una señora sale a pasear todos los días con dos o mas de sus perritos. Con mucho cuidado, procuró llevar cada día un grupo diferente. Si en total tiene 10 perritos. ¿Al cabo de cuantos días tendrá que llevar necesariamente a un grupo repetido?
   A) 10 B) 11 C) 12
   D) 13 E) 14

8. dados los conjuntos:

   $A = \{ \frac{2a+1}{3} / \frac{a}{2} \in N \wedge 1 \le a \le 9\}$

   $B = \{ \frac{2b-1}{3} / b \in N; 2 < b \le 6\}$

   Determinar: $E = [n(B)]^{n(A)} + n(A)$.
   A) 270 B) 120 C) 200
   D) 180 E) 260

9. Dado los conjuntos iguales:

   A = { a+2; a+1}, B = {b+1; c +1},

   C = {7 -a; 8-a} y D = {b+2; d+3}. Hallar «a+b+c+d» si además b ≠ d
   A) 10 B) 11 C) 12
   D) 13 E) 14

10. ¿Cual es la suma de los elementos del conjunto A? si:

    A = {2x / (3x+1) ∈ N y 4 < x < 8}
    A) 36 B) 165 C) 116
    D) 160 E) 132

11. Sean 2 conjuntos comparables cuyos cardinales se diferencian en 3. ademas la diferencia entre los cardinales de sus conjuntos potencia es 112. Indique el número

de términos que posee el conjunto que incluye al otro.

A) 5 B) 4 C) 7
D) 6 E) 9

12. ¿Cuántos subconjuntos ternarios tiene un conjunto cuyo cardinal es 12?

A) 220 B) 224 C) 218
D) 216 E) 200

13. Dados los conjuntos:
$A = \{x / x \in Z \wedge -3 \leq x \leq 10\}$
$B = x / x \in N \wedge y = 2x - 3 \wedge y \in A\}$
$C = \{x / x \in B \wedge 4 < x + 3 < 7\}$
hallar la suma de los elementos del conjunto C

A) 2 B) 3 C) 5
D) 8 E) 11

14. El conjunto A tiene 14 subconjuntos ternarios más que binarios. ¿Cuántos conjuntos unitarios tiene A?

A) 5 B) 6 C) 7
D) 8 E) 9

15. Hallar la suma de los elementos de

$M = \{a / \sqrt{\frac{a-1}{2}} \in N; a < 73\}$

A) 111 B) 113 C) 110
D) 115 E) 116

16. dado el conjunto:
$A = \{4; 8; \phi; \{4\}; \{2; 7\}; \{\phi\}\}$ Determinar cuántas de las siguientes proposiciones son verdaderas:

$\{2; 7\} \in A$ $\{\{4\}\} \in A$
$\{4; 8; \phi\} \subset A$ $\{4; 8\} \subset A$
$\{2; 7\} \subset A$ $\{\{\phi\}\} \subset A$
$\phi \in A$ $\{\{4\}; \{2;7\}\} \subset A$

A) 5 B) 4 C) 7
D) 3 E) 6

17. Dado el conjunto unitario:
$A = \{3a - 3b + 2; a + b; 14\}$;
Determinar el número de subconjuntos propios de
$B = \{a; 2a; b; 2b - 1\}$

A) 7 B) 15 C) 31
D) 63 E) 8

18. Dar la suma de los elementos de
$A = \{2x / x \in N; 10 < 3x + 2 < 18\}$

A) 19 B) 18 C) 24
D) 26 E) 23

19. Si $P = \{x^2 - 1 / -6 < \frac{5x+2}{5} < 6; x \in Z^+\}$

Determinar el número de subconjuntos.

A) 16 B) 64 C) 32
D) 8 E) 128

20. si: $Q = \{\frac{3x-1}{4} \in Z / 1 < \sqrt{x} < 3; x \in N\}$

hallar la suma de elementos de Q

A) 35 B) 15 C) 12
D) 11 E) 7

21. Sea A = {m + n; 4} un conjunto unitario y B = {2m-2n; m+n} tiene un cardinal igual a 1. Hallar el valor de m/n.

A) 3 B) 4 C) 6
D) 5 E) 0

22. Hallar la suma de elementos de:

$B = \{\frac{n^2 - 16}{n - 4} / n \in Z; 0 < n \leq 5\}$

A) 35 B) 36 C) 27
D) 0 E) 25

23. Sean los conjuntos:
$A = \{2x / x \in Z; 0 < x < 6\}$
$B = \{\frac{x+4}{2} / x \in A\}$
$C = \{\frac{2y+1}{3} \in Z / y \in B\}$
Hallar el cardinal de P(C)
A) 4 B) 8 C) 9
D) 16 E) 32

24. dado el conjunto:
$A = \{x + 4 / x \in N; x^2 < 16\}$
calcular la suma de los lementos de A.
A) 10 B) 16 C) 19
D) 27 E) 28

25. ¿Cuántos subconjuntos propios tiene aquel conjunto que tiene 35 subconjuntos ternarios?
A) 127 B) 63 C) 31
D) 1023 E) 511

26. Dado el conjunto:
$A = \{\frac{x}{x-1} / x \in Z; -3 < \frac{x^2-1}{x+1} \leq 1\}$
¿Cuál es la suma de los elementos de A?
A) 2 B) 3 C) 4
D) 5 E) 6

27. Un «gordito» ingresa a un restaurante en el cual sirven 6 platos distintos y piensa «me gustan todos pero debo llevar como mínimo 2 platos y 5 como máximo» ¿De cuántas maneras puede escoger el «gordito»?
A) 64 B) 56 C) 32
D) 26 E) 120

28. Si A y B son conjuntos unitarios ¿Cuántos elementos tiene C?
$A = \{a+2b; 17\}$ $B = \{3a+b; 16\}$
$C = \{x / x \in N; a \leq x \leq b\}$
A) 5 B) 6 C) 7
D) 4 E) 2

29. Considere los conjuntos:
$A = \{x / x \in Z; 0 \leq x < 10\}$ y
$B = \{2n \in A / (n/3) \in A\}$
¿Cuántos subconjuntos tiene el conjunto P(B)?
A) 16 B) 4 C) 8
D) 32 E) 64

30. Dados los conjuntos:
$A = \{x / x \in Z; 8 \leq x \leq 19\}$
$B = \{y+4 / y \in N; (2\sqrt{y} - 1) \in A\}$
Hallar la suma de elementos del conjunto B
A) 350 B) 379 C) 129
D) 252 E) 341

CLAVES

01. A	02. E	03. C	04. D	05. B	06. C	07. E	08. E	09. B	10. E
11. C	12. A	13. C	14. C	15. D	16. E	17. A	18. C	19. B	20. E
21. A	22. C	23. A	24. E	25. A	26. A	27. B	28. A	29. A	30. B

Operaciones con conjuntos

I. UNIÓN (A B)

Se llama unión de dos conjuntos «A» y «B» al conjunto formado por aquellos elementos que pertenecen por lo menos a uno de dichos conjuntos «A» o «B».

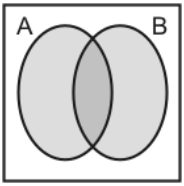
El conjunto unión de «A» y «B» lo denominaremos A∪B.

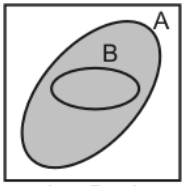
$$A \cup B = \{x/x \in A \vee x \in B\}$$

Ejemplo:

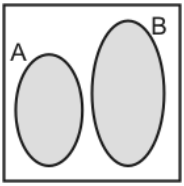
Dados los conjuntos: $A = \{4; 6; 8\}$, $B = \{8; 9; 11\}$ $\Rightarrow A \cup B = \{4; 6; 8; 9; 11\}$

DIAGRAMAS:





$A \cup B = A$



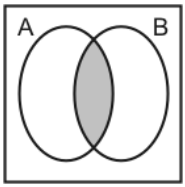
II. INTERSECCIÓN (A B)

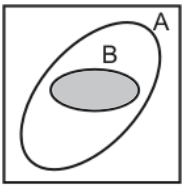
Se llama intersección de los conjuntos «A» y «B» al conjunto de todos los elementos que pertenecen a la vez a los conjuntos «A» y «B»..

En símbolos: $A \cap B = \{X / X \in A \wedge X \in B\}$

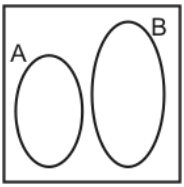
Ejemplo:

Dados: $A = \{3; 5; 8\}$, $B = \{1; 2; 3; 5; 6; 9\}$ $\Rightarrow A \cap B = \{3; 5\}$





A B=B



$A \cap B = \varnothing$

III.DIFERENCIA (A – B)

Se llama diferencia de dos conjuntos «A» y «B» (A – B) al conjunto formado por todos los elementos de «A» que no pertenecen a «B».

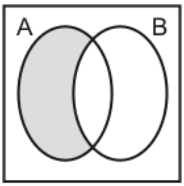
En símbolos:

$$A - B = \{X / X \in A \wedge X \notin B\}$$

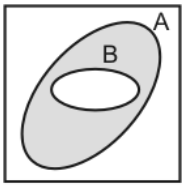
Ejemplo:

Dados: $A = \{6; 8; 10; 12; 15\}$, $B = \{5; 6; 12; 14\}$ $\Rightarrow A - B = \{8; 10; 15\}$

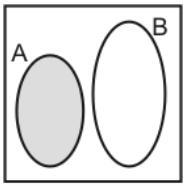
DIAGRAMAS:



A – B



A – B



A – B = A

IV. DIFERENCIA SIMÉTRICA (AΔB)

Se llama diferencia simétrica de los conjuntos «A» y «B» (AΔB) al conjunto formado por todos aquellos elementos que pertenecen solamente a uno de dichos conjuntos.

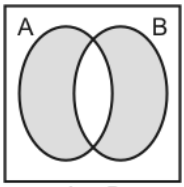
En símbolos:

$A \Delta B = (A - B) \cup (B - A)$ o también $A \Delta B = (A \cup B) - (A \cap B)$

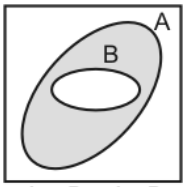
Ejemplo:

Dados: $A = \{6; 4; 2; 8\}$, $B = \{3; 4; 5; 6; 7\}$ $\Rightarrow A \Delta B = \{2; 8; 3; 5; 7\}$

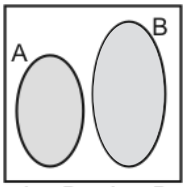
DIAGRAMAS:



A Δ B



A Δ B = A - B



A Δ B = A ∪ B

V. COMPLEMENTO (A'); (A^C); C(A)

Si U es un conjunto universal y $A \subset U$, llamaremos complemento de «A» al conjunto diferencia: U - A

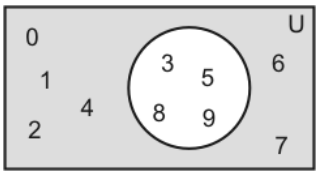
$$A' = \{x/x \in U \wedge X \notin A\}$$

Ejemplo:

Si: U = {0; 1; 2; 3; 4; ...; 9} y

A = {3; 5; 8; 9}

DIAGRAMAS:



➡ A' = {0; 1; 2; 4; 6; 7}

LEYES:

* $A \cup A' = U$
* $A \cap A' = \phi$
* $(A')' = A$

LEYES DE MORGAN:

* $(A \cup B)' = A' \cap B'$
* $(A \cap B)' = A' \cup B'$

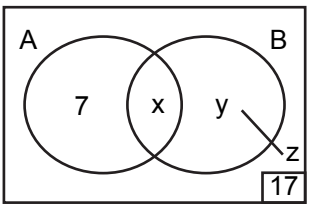
PROBLEMAS RESUELTOS

1. Para 2 conjuntos A y B se conoce: $n(A) - n(B) = 2$
   $n(A - B) = n(A')$
   $n([P(A')]) = 128$
   $n[U] = 17$

   Si: U: Conjunto Universal

   Hallar: n[P(B)]

Resolución



Si: $n[P(A')] = 128$

$2^{n(A')} = 2^7 \Rightarrow \begin{cases} n(A') = 7 \\ n(A - B) = 7 \end{cases}$ y

➡ $n(A')$: $y + z = 7$

Total: $7 + x + y + z = 17 \Rightarrow x = 3$

➡ $n(A) = 10$

Si: $n(A) - n(B) = 2 \Rightarrow n(B) = 8$

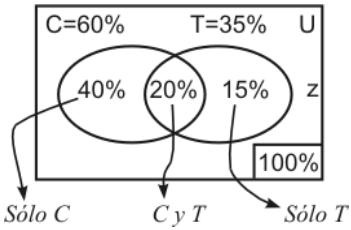
$\therefore$ $n[P(B)] = 2^8 = 256$

2. En una ciudad el 60% de la población va al cine y el 35% va al teatro. Si el 20% de la población va al cine y también al teatro, ¿Qué porcentaje no va al teatro ni al cine?

Resolución

U = población ⟨ ⟩ 100%
C = van al cine
T = van al teatro
X = (C ∪ T)' = No A o B

Graficando:



➡ x = 100% - (40%+20%+15%)

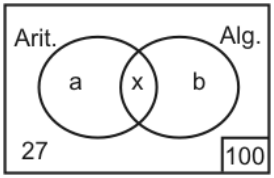
x = 100% - (75%)

x = 25%

3. De un grupo de 100 alumnos; 49 no llevan curso de Aritmética, 53 no llevan Álgebra y 27 no llevan Álgebra ni Aritmética. ¿Cuántos alumnos llevan un solo curso?

Resolución

Graficando:



X = Aritmética y Algebra

No Arit. = b + 27 = 49 ➡ b = 22

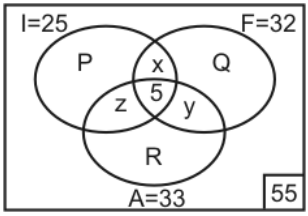
No Alg. = a + 27 = 53 ➡ a = 26

∴ Llevan sólo uno de los cursos: a + b = 48

4. En un grupo de 55 personas; 25 hablan Inglés; 32 Francés; 33 Alemán y 5 los tres idiomas. Si todos hablan por lo menos un idioma, ¿Cuántas personas del grupo hablan exactamente 2 de estos idiomas?

Resolución

Graficando:



I: P + X + Z = 20
F: Q + X + Y = 27
A: R + Y + Z = 28 } +

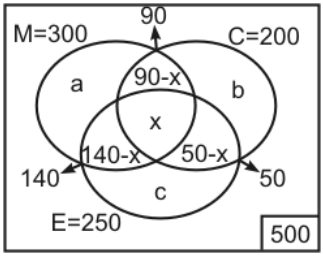
(P+Q+R)+2(X+Y+Z) = 75 1

TOTAL: (P+Q+R) + (X+Y+Z) = 50 2

Resta (1)-(2): (X+Y+Z) = 25

5. En cierta universidad se requiere que los estudiantes del primer ciclo de Economía cursen Matemática, Contabilidad y Economía. En un grupo de 500 de estos estudiantes, se conoce que 300 cursan Matemáticas, 200 Contabilidad y 250 Economía. Si 140 cursan Matemática y Economía, 90 Matemática y Contabilidad, 50 Contabilidad y Economía, ¿cuántos cursan las 3 materias?

Resolución



M: $\underbrace{(a+140-X)}_{210} + 90 = 300 \Rightarrow a = 70 + X$

C: $\underbrace{(b + 50- X)}_{110} + 90 = 200 \Rightarrow b = 60 + X$

E: $\underbrace{(c+140-X)}_{200} + 50 = 250 \Rightarrow c = 60 + X$

TOTAL:

$$\overbrace{300}^{M} + \overbrace{(60 + x)}^{b} + (50 - x) + \overbrace{(60 + x)}^{c} = 500$$

$$470 + X = 500$$

$$X = 30$$

PROBLEMAS PROPUESTOS

1. En una escuela de 600 alumnos, 100 no estudian ningun idioma extranjero, 450 estudian frances y 50 estudian frances e ingles. ¿Cuántos estudian solo ingles?
   A) 150 B) 100 C) 50
   D) 200 E) 60

2. En un grupo de 55 personas, 25 hablan ingles, 32 frances, 33 aleman y 5 los tres idiomas. Si todos hablan por lo menos un idioma ¿Cuántas personas del grupo hablan exactamente 2 de estos idiomas?
   A) 21 B) 22 C) 23
   D) 24 E) 25

3. Del total de damas de una oficina. 2/3 son morenas, 1/5 tienen ojos azules y 1/6 son morenas con ojos azules ¿Que fracción no son morenas ni tienen ojos azules?
   A) 1/3 B) 2/5 C) 3/10
   D) 7/10 E) 3/5

4. En un grupo de 35 personas, 24 hablan ingles, 21 frances y 21 aleman, y 8 hablan los 3 idiomas . ¿Cuántas personas hablan solo 2 de estos idiomas?
   A) 15 B) 13 C) 14
   D) 22 E) 23

5. En una encuesta realizada se obtuvieron los siguientes resultados:
   El 50% usa el producto A
   El 60% usa el producto B
   El 50% usa A ó B pero no ambos
   60 personas no usan estos productos. El núméo de personas encuestadas es.
   A) 200 B) 150 C) 350
   D) 300 E) 250

6. En un aula 40 alumnos tiene el libro de Aritmética, 30 el de Física, 30 el de Geometría. además:
   -A 12 de ellos les falta solo el libro de Física.
   -A 8 solo el de Geometría.
   -A 6 solo el de Aritmética.
   -5 alumnos tienen los tres libros y 6 no tiene ninguno. ¿Cuántos alumnos hay en el aula?
   A) 50 B) 70 C) 90
   D) 60 E) 80

7. En un salon de 40 alumnos el número de los que estudian Aritmética es el doble del número de los que estudian Aritmética y Algebra y el número de los que estudian Algebra es el quintuple de los que estudian Aritmética y Algebra. Si hay 10 que no estudian estos cursos ¿Cuántos estudian ambos?
   A) 25 B) 5 C) 35
   D) 20 E) 15

8. En un salon de clases el 60% de alumnos trabaja, el 32% son mayores de edad y la quinta parte de los que trabajan son mayores de edad. ¿Que porcentaje son menores de edad y no trabajan?
   A) 20% B) 30% C) 40%
   D) 50% E) 10%

9. Si: $A = \{x \in N / 9 \leq x^2 \leq 300\}$ y
   $B = \{x \in N / x \leq 3x - 2 \leq 20\}$
   hallar: $n[(A \cup B) - (A \cap B)]$
   A) 10 B) 12 C) 14
   D) 16 E) 17

10. dados los conjuntos A, B y C tales que $A \subset B$ y $C \cap A = \varnothing$ simplifique: $[A \cup (B - C)] \cap [B \cup (C - A)]$
A) $A \cap B$ B) A - B C) B - A
D) B - C E) C - B

11. De una muestra recogida a 200 secretarias, 40 eran rubias, 50 eran morenas y 90 tiene ojos azules; de estas últimas, 65 no son rubias y 60 no son morenas. ¿Cuántas de las secretarias no eran rubias, ni morenas, ni tienen ojos azules?
A) 35 B) 48 C) 75
D) 60 E) 56

12. De un grupo de 100 estudiantes se obtuvo la siguiente información: 72 no estudian inglés, 70 no estudian alemán, 58 no estudian francés, 18 estudian inglés pero no alemán, 37 estudian francés pero no alemán, 22 inglés pero no francés, 20 ninguno de los tres idiomas. Calcule cuántos estudiantes estudian uno de estos cursos solamente.
A) 61 B) 51 C) 41
D) 53 E) 59

13. En una reunión donde asistieron 200 personas, se observa que 75 no tienen hijos; 35 mujeres están casadas; 140 son hombres; 80 personas casadas tienen hijos; 15 madres solteras. ¿Cuántos son padres solteros?
A) 15 B) 25 C) 30
D) 45 E) 35

14. Los conjuntos A y B que tienen 3 elementos comunes se inscriben en un universo U, si:
$n(A \cup B) + n(A \cap B) = 33$
$n(A) - n(B) = 17$
$n(B\text{-}A) = n[(A \cup B)^C]$, entonces
n(U) es:
A) 33 B) 35 C) 37
D) 39 E) 40

15. Sabiendo que U es el conjunto universal respecto a los conjuntos A, B y C y además:
$n[(A \cup B) - C] = 30$
$n(A \cup B \cup C)^C = 25$
$n(A \cap B \cap C) = 20$
$n(C - A) = 45$
$n(U) = 150$
hallar: $n[(A \cap C) - B]$
A) 5 B) 10 C) 15
D) 20 E) 30

16. Dados los conjuntos A, B y C incluidos en U, donde se cumple:
$B - A = \varnothing$
$n(C - A) = 12$
$n[A - B) - C] = 2n(A \cap B \cap C)$
$n[C - B) \cap A] = 2n(B - C)$
$n[C^c \cap A^c] = n(A \cup C)$
Si n(U) = 48, halle n(B)
A) 8 B) 7 C) 6
D) 3 E) 4

17. Sean A, B y C tres conjuntos contenidos en un universo finito de 60 elementos, además se tiene:
$n(B \Delta C) = 40$
$n[A \cap (B^c \cap C^c)] = 10$
$n(A \cap B \cap C) = 5$
$B \cap C \cap A^c = \varnothing$
calcule: $n(A^c \cap B^c \cap C^c)$
A) 10 B) 0 C) 5
D) 4 E) 3

18. En una reunion de 500 personas las 3/4 partes de las mujeres presentes usan sombreros y tambien lo hacen la mitad de los hombres presentes. Por otro lado la mitad de las mujeres y la totalidad de los hombres usan pantalones. si 260 personas usan sombrero y 20 mujeres usan pantalones y sombrero. ¿ Cuántas mujeres no usan ni pantalon ni sombrero?
A) 20 B) 40 C) 25
D) 10 E) 15

19. A un evento asistieron 24 mujeres con falda; 28 varones con reloj, 49 portaban casaca, 9 mujeres tenian casaca pero no falda. ¿Cuántos varones con casaca no llevaban reloj?, si 16 mujeres no llevaban falda ni casaca y 28 mujeres no tenian casaca. El numero de varones con casaca y reloj son la tercera parte de los varones sin casaca y con reloj.
A) 21 B)82 C)1 2
D) 11 E) 10

20. En un censo se determinó que el 60% de los niños de una ciudad toman leche, el 70% no come carne; los que toman leche y comen carne sumados con los que no toman leche ni comen carne son el 40% y 9000 niños comen carne pero no toman leche. ¿Cuántos niños hay en la ciudad?
A) 24000 B) 12000 C) 30000
D) 18000 E) 60000

21. En un zoológico se observa que hay pumas leopardos y tigres, de los cuales se sabe que:
hay tantos felinos cachorros ebfermos como felinos adultos sanos.
hay tantos felinos adultos enfermos como pumas cachorros sanos.
hay 7 cachorros sanos y 13 felinos sanos.
Si en total hay 23 felinos, halle cuántos cachorros sanos que no son pumas hay en dicho zoológico.
A) 2 B) 8 C) 7
D) 4 E) 3

22. De un grupo de 100 personas, 40 son mujeres, 73 estudian matemática, 12 mujeres no estudian matemática. ¿Cuántos hombres no estudian matemática?
A) 10 B) 20 C) 18
D) 24 E) 15

23. A es un conjunto que tiene 8n elementos, B es un conjunto de 5n elementos y tienen (2n - 1) elementos comunes. Si n(A - B) - n(B - A) = 12. ¿Cuántos subconjuntos tiene $A \cap B$?
A) 8 B) 16 C) 32
D) 64 E) 128

24. Si $A \subset B$ y $A \cap D = \varnothing$; simplificar:
$[(A \cap D^c) \cap B^c] \cup [B \cup (A - D)]$
A) B - D B) A C) D
D) B E) D - B

25. En un club de 61 personas: 5 mujeres tienen 17 años, 16 mujeres no tienen 17 años, 14 mujeres no tienen 18 años, 10 hombres no tienen 17 ó 18 años. ¿Cuántos hombres tienen 17 ó 18 años?
A) 25 B) 30 C) 28
D) 31 E) 32

26. 80 alumnos rindieron una prueba que contiene los cursos A, B, C, donde: se anulo 8 pruebas y el resto aprobó por lo menos un curso. Los que aprobaron A, desaprobaron B y C. hay 15 alumnos que aprobaron B y C. ¿Cuántos aprobaron un solo curso?
A) 58 B) 53 C) 51
D) 57 E) 52

27. dados los conjuntos A, B, C contenidos en U tales que:
$n(A \cup B \cup C) = 93$
$n[A - (B \cup C)] = 18$
$n[(A \cap B) - C] = 7$
$n(A) = n(B) = 41$
$n(C) = 46$
$n[(B \cap C) - A] = 7$
calcule $n[(A^c \cup B^c \cup C^c)^c]$
A) 5 B) 9 C) 10
D) 2 E) 1

28. De un grupo de 70 estudiantes se sabe lo siguiente: 10 fuman pero no van a la academia, 25 van a la academia pero no tienen 17 años, 16 que no van a la academia no fuman y tienen 17 años, 5 van a la academia, tienen 17 años pero no fuman; 2 fuman van a la academia y tienen 17 años. ¿Cuántos alumnos no tienen 17 años, no fuman ni van a la academia?
A) 12 B) 13 C) 14
D) 15 E) 16

29. En una sección de 4to año formada por 42 alumnos entre hombres y mujeres se sabe que: 13 hombres aprobaron geometría; 8 hombres aprobaron trigonometría; 4 hombres y 6 mujeres no aprobaron ninguno de los dos cursos; 24 aprobaron geometría; hay 24 hombres en la sección, 7 aprobaron los dos cursos. El número de mujeres que aprobaron trigonometría es:
A) 1 B) 2 C) 5
D) 7 E) 4

30. Si: $A \cap B \neq \varnothing$; $n(A \cap D) = 0$; $D \subset B$
$n(A) = 17$; $n(B) = 22$; $n(D) = 6$
$n(A \cup B \cup D) = 30$
calcular: $n(B \Delta D) - n(A \cap B)$
A) 9 B) 8 C) 5
D) 6 E) 7

CLAVES

01. C	02. E	03. C	04. A	05. D	06. B	07. B	08. A	09. B	10. D
11. C	12. A	13. C	14. B	15. E	16. E	17. C	18. D	19. A	20.E
21. E	22. E	23. E	24. D	25. B	26. D	27. A	28. A	29. D	30. E

UNIDAD 9

Numeración

Denominamos Numeración al capítulo de la Aritmética que estudia la correcta formación, lectura y escritura de los números.

Número
Es la idea que tenemos sobre la cantidad de los elementos de la naturaleza.

Numeral
Es la representación figurativa del número mediante un conjunto de símbolos.

Cifra (Dígito)
Son los símbolos que convencionalmente utilizamos para escribir los numerales; es decir:

0; 1; 2; 3; 4; ...

SISTEMA DE NUMERACIÓN

Es el conjunto de normas, leyes, principios, reglas y convenios que nos permiten la correcta formación, lectura y escritura de los números.

Base de un Sistema de Numeración
Es un número natural mayor que la unidad e indica la cantidad de cifras que se emplean para escribir a todos los números en dicho sistema de numeración.

Observación

En un sistema de numeración de base «n»; con «n» unidades de cualquier orden, se puede formar una unidad de orden inmediato superior.

En los sistemas mayores que la base 10, convencionalmente se ha establecido lo siguiente:

La cifra 10 se denota por α o A
La cifra 11 se denota por β o B
La cifra 12 se denota por γ o C

Clasificación de los Principales Sistemas de Numeración

Base	Sistema de Numeración	Cifras o Dígitos
2	Binario	0; 1
3	Ternario	0; 1; 2
4	Cuaternario	0; 1; 2; 3
5	Quinario	0; 1; 2; 3; 4
6	Senario	0; 1; 2; 3; 4; 5
7	Heptanario	0; 1; 2; 3; 4; 5; 6
8	Octanario	0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7
9	Nonario	0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8
10	Decimal	0; 1; 2; 3; 4, 5; 6; 7; 8; 9
11	Undecimal	0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; α
12	Duodecimal	0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; α ; β
13	Trece-esimal	0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; α ; β ; γ
⋮	⋮	⋮
n	Enesimal	0; 1; 2; 3; .....; (n – 1)

Representación literal de un numeral

Consiste en representar a las cifras de un numeral por letras minúsculas, teniendo en cuenta que toda expresión entre paréntesis representa una cifra.

Números de dos cifras:

En base 10: $\overline{ab}$ = 10, 11, 12, ..., 99

En base 6: $\overline{ab}_{6} = 10_6, 11_6, 12_6, ..., 55_6$

Consecutivas: $\overline{(n)(n+1)}$: 12; 23; 34; .....

Números de tres cifras:

En base 10: $\overline{abc}$ = 100, 101, ..., 999

En base 9: $\overline{abc}_{9} = 100_9, 101_9, ..., 888_9$

$\overline{a(\frac{a}{2})(2a)}$: 214; 428; ....

Número Capicúa
Es aquel numeral cuyas cifras equidistantes son iguales.

$\overline{aba}$: 101; 323; 454; ...

$\overline{abba}$:1001; 5885; ...



Aplicación:

Hallar un número de 3 cifras tal que la 1ra. sea los 3/5 de la 3ra. cifra, y la 2da. cifra la semisuma de las otras 2.

Resolución

Nº: $\overline{abc}$

$a = \frac{3}{5}c \Rightarrow 5a = 3c$

$b = \frac{a+c}{2} \Rightarrow b = 4$

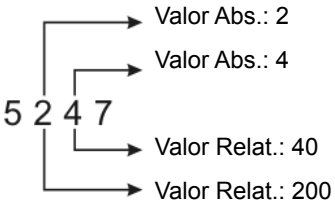
$\therefore \overline{abc} = 345 \quad \begin{cases} a = 3 \\ c = 5 \end{cases}$

Valor Absoluto y Valor Relativo de una cifra
Toda cifra en un numeral tiene dos valores: valor absoluto y valor relativo.

Descomposición Polinómica:
Es la suma de los valores relativos de un numeral.

VALOR ABSOLUTO. Es el valor que representa la cifra por su forma o símbolo.

VALOR RELATIVO. Es el que adopta la cifra por su orden dentro del numeral.



Ejemplo:

$5247 = 5000 + 200 + 40 + 7$

$= 5.10^3 + 2.10^2 + 4.10^1 + 7$

$324_6 = 3.6^2 + 2.6^1 + 4$

$1357_9 = 1.9^3 + 3.9^2 + 5.9^1 + 7$

En general:

$$\overline{abcde}_n = axn^4 + bxn^3 + cxn^2 + dxn^1 + e$$

$\overline{abc} = 100a + 10b + c$

$\overline{ab} = 10a + b$

APLICACIÓN

Hallar un número de 2 cifras que si es leído al revés, es el doble del número que sigue al original.

Resolución

$N = \overline{ab}$

$\overline{ba} = 2(\overline{ab} + 1)$

$10b + a = 2(10a + b + 1)$

$10b + a = 20a + 2b + 2$

$8b - 2 = 19a$

$2(4b - 1) = 19\ a \Rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 5 \end{cases}$

$\therefore \quad \overline{ab} = 25$

DESCOMPOSICIÓN POLINÓMICA EN BLOQUE:

Ejemplo:

$$\overline{abab} = \overline{ab}x10^2 + \overline{ab} = 101\overline{ab}$$

$$\overline{abab}_n = 101_n.\overline{ab}_n = (n^2+1)\overline{ab}_n$$

$$\overline{abcabc}_n = 1001_n\overline{abc}_n = (n^3+1).\overline{abc}_n$$

APLICACIÓN:

Si: $\overline{abcd} = 2.\overline{ab}.\overline{cd}$

Hallar: a + b + c + d.

Resolución

Descomponiendo en bloque: $\overline{ab}.10^2 + \overline{cd} = 2.\overline{ab}.\overline{cd}$

$$100\,\overline{ab} = 2.\overline{ab}.\overline{cd} - \overline{cd}$$

$$25 \;.\; 4 \;.\; \overline{ab} = \overline{cd}\,(2\,\overline{ab} - 1)$$

➡ $2 \times \overline{ab} - 1 = 25$ ➡ $\overline{ab} = 13$

y $4\underbrace{\overline{ab}}_{13} = \overline{cd}$ ➡ $\overline{cd} = 52$

$$\therefore a + b + c + d = \mathbf{1}$$

CONVERSIÓN DE SISTEMAS DE NUMERACIÓN:

1er CASO: De base «n» a base 10

Método: Descomposición Polinómica

Ejemplo:

Convertir $3421_{(5)}$ a base 10

$$3421_{(5)} = \underbrace{3.5^3}_{375} + \underbrace{4.5^2}_{100} + \underbrace{2.5^1}_{11} + 1$$

➡ $3421_{(5)} = 486$

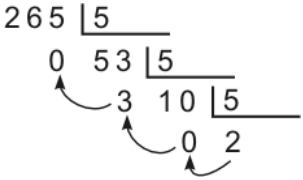
2^do CASO: De base 10 a base «n»

Método: Divisiones Sucesivas

Ejemplo:

Convertir 265 a base 5.

Se divide sucesivamente entre 5 formando el último cociente y los residuos hallados.



$\therefore 265 = 2030_5$

3^er Caso: De base «m» a base «n» (n y m ≠ 10)

Método: Indirecto

I. El numeral en base «m» se convierte a base decimal.

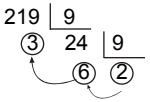
II. Seguidamente el resultado se convierte a base «n».

Ejemplo:

Convertir 432_7 a base 9.

I. $432_7 = 4.7^2 + 3.7 + 2 = 196 + 21 + 2 = (219)$

II. 219 a base 9.



$432_7 = 263_9$

OBSERVACIONES:

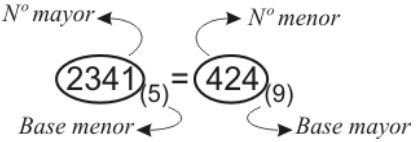
Las cifras empleadas en un sistema de numeración son siempre menores que la base.

Ejemplo:

$\overline{3a2b}_{(8)}$ Siendo a y b < 8

$\overline{2c08}_{(n)}$ Siendo c < n

Si un número se expresa en dos Sistemas distintos; en la representación:



APLICACIÓN:

Si: $203_{(n)} = 104_{(m)}$; n < m

$\overline{aob}_{(8)} = \overline{boa}$; a > b

Bases Sucesivas

Condición: Que sean numerales de 2 cifras y que su primera cifra sea 1:

$\overline{1a}\ \overline{1b}\ \overline{1c}\ \ddots\ \overline{1z}_n = n + a + b + c + \ldots\ldots\ldots + z$

APLICACIÓN:

Si los siguientes numerales están correctamente escritos:

$\overline{31m}_{(4)}\ ;\ \overline{21n}_{(m)}\ ;\ \overline{pp0}_{(n)}$; Hallar: m + n + p

Resolución

$\overline{31m}_{(4)}\ ;\ \overline{21n}_{(m)}\ ;\ \overline{pp0}_{(n)}$; m < 4 ; n < m ; p < n ; p > 0

Ordenando: $0 < p < n < m < 4$

$\downarrow\ \downarrow\ \downarrow$

$1\quad 2\quad 3$

Luego: m + n + p = 6

APLICACIÓN (2):

Hallar: a×b×n; si: $\overline{a2b}_{(9)} = \overline{a72}_{(n)}$

Resolución

7 < n ; (Nº mayor ➡ base menor): n < 9

7 < n < 9 ➡ n = 8

Reemplazando: $\overline{a2b}_9 = \overline{a72}_8$

$a \cdot 9^2 + 2 \cdot 9^1 + b = a \cdot 8^2 + 7.8^1 + 2$

$81a + 18 + b = 64a + 58$

$17a + b = 40$

$\downarrow\ \downarrow$

$②\ ⑥$ $\begin{cases} a = 2 \\ b = 6 \end{cases}$

Luego: a x b x n = 96

PROBLEMAS PROPUESTOS

1. Al convertir el número 247_8 al sistema decimal se obtiene un número cuyo producto de cifras es:
   A) 40 B) 35 C) 46
   D) 42 E) 50

2. Hallar «n» si: $443_{(n)} = 245_{(11)}$
   A) 5 B) 6 C) 7
   D) 8 E) 9

3. Si: $\overline{a55}_{(b)} = \overline{(a-1)aa}_{(7)}$ hallar «a.b»
   A) 20 B) 16 C) 15
   D) 32 E) 24

4. El mayor número de 3 cifras de la base «n» se escribe en el sistema senario como 2211. hallar «n»
   A) 9 B) 8 C) 7
   D) 6 E) 16

5. Si $1050_{(n)} = \overline{24n}$ hallar n^2
   A) 4 B) 9 C) 16
   D) 36 E) 49

6. Sabiendo que $1331_{(n)} = 260_{(9)}$. convertir $43_{(n)}$ al sistema decimal y dar como respuesta la suma de sus cifras.
   A) 4 B) 5 C) 6
   D) 7 E) 8

7. Si $\overline{n0n} = 12110_n$ hallar «n^2»
   A) 9 B) 16 C) 25
   D) 36 E) 49

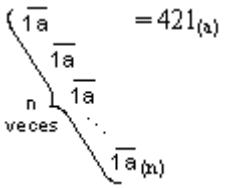
8. Si $\overline{aba}_n = \overline{m1n}_9$ determinar el valor de «b» sabiendo que m > 5
   a) 3 b) 5 c) 6
   d) 7 e) 8

9. Convertir el número: $\overline{1(n+2)3}_{n+3}$ a base «n + 2». dar como respuesta la cifra de primer orden.
   A) 1 B) 2 C) 3
   D) 4 E) 5

10. Si $\overline{aaa}_{14} = \overline{(n^2)n10}_{(a)}$ determinar el valor de «a + n»
    A) 6 B) 7 C) 8
    D) 9 E) 10

11. Si $\underbrace{111\cdots111}_{\text{"k" cifras}}{}_{(2)} = 255$ hallar «k^2»
    A) 49 B) 64 C) 81
    D) 100 E) 121

12. Si



    hallar «n - a»
    A) 6 B) 10 C) 13
    D) 15 E) 19

13. Si $\overline{mnmnmn}_{(3)} = \overline{mnn0}_{(7)}$. hallar $(m + n)^2$.
    A) 4 B) 9 C) 16
    D) 25 E) 36

14. Si: $280 = \overline{aa0}_{(b)}$ hallar «a + b»
    A) 10 B) 12 C) 13
    D) 14 E) 15

15. Si $\overbrace{777...7}^{\text{"k"cifras}}{}_{(8)} = 512^{16} - 1$
Determinar el valor de «k»
A) 37 B) 39 C) 47
D) 48 E) 53

16. determine «a + b + n»
si: $\overline{ab0ab}_{(n)} = 715$
A) 8 B) 9 C) 10
D) 11 E) 12

17. Si: $\overline{a00a}_{(6)} = \overline{bcl}$ determinar: «a + b + c»
A) 14 B) 15 C) 16
D) 17 E) 18

18. Expresar E en base 11 y determine la suma de sus cifras.
$E=7x11^4+12x11^5+15x11^3+8x11+49$
A) 18 B) 21 C) 30
D) 25 E) 14

19. Si $33221_{(7)}$ se expresa en otro sistema de numeración, se escribe con 6 cifras diferentes, siendo una de estas la cifra 5 ¿Cuál es la suma de las cifras restantes?
A) 9 B) 10 C) 11
D) 12 E) 13

20. Si $226_{(9)} = 272_{(n)}$ representar 107 en base «n»
A) $143_{(n)}$ B) $121_{(n)}$ C) $153_{(n)}$
D) $165_{(n)}$ E) $163_{(n)}$

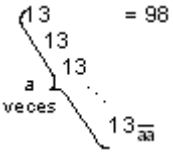
21. El número $201_{(8)}$ se convierte a base «n» y se obtiene un número de tres cifras iguales. hallar «n»
A) 5 B) 6 C) 7
D) 9 E) 11

22. Si $2345_{(n)} = 1442_{(n+1)}$. hallar «n»
A) 25 B) 36 C) 49
D) 16 E) 64

23. Sabiendo que:
$2541 = 3^a + 3^b + 3^c + 3^d + 3^e$
hallar «a + b + c + d + e»
a) 16 b) 17 c) 18
D) 19 E) 20

24. Al convertir 7161 del sistema decimal a base «n» se obtiene $\overline{abababab}$, determinar «a + b + n»
A) 5 B) 7 C) 8
D) 9 E) 10

25. calcular «a» si



A) 4 B) 5 C) 6
D) 7 E) 8

26. Si: $\overline{abc}_{(6)} = \overline{1abc}_{(5)}$ escribir el mayor número $\overline{abd}_{(6)}$ en base 5.
A) $131_{(5)}$ B) $213_{(5)}$ C) $414_{(5)}$
D) $313_{(5)}$ E) $210_{(5)}$

27. Convertir el mayor número de la forma $\overline{a(a+b)b}_{(8)}$ a la base 6. Dar como respuesta la suma de sus cifras.
A) 4 B) 5 C) 6
D)7 E) 3

28. Se convierte el número 15015 a base «n» y resulta escrito como $\overline{3xy\,27}$. Hallar «x + y + z».
A) 11 B) 10 C) 12
D) 13 E) 14

29. Jorge tenía $\overline{cab}$ soles y durante «c» días gastó $\overline{ab}$ soles por día, entonces le quedó $\overline{abc}$ soles. ¿Cuánto tenía al inicio?

A) 218 B) 316 C) 214
D) 812 E) 324

30. Hallar «a + b + n»; si:

$$\overline{1\,1ab}_{(n)} = 79_{(n^2)}$$

A) 10 B) 11 C) 12
D) 13 E) 9

CLAVES

01. D	02. D	03. E	04. B	05. D	06. B	07. B	08. C	09. C	10. D
11. B	12. E	13. B	14. B	15. D	16. B	17. A	18. B	19. B	20. C
21. B	22. B	23. E	24. C	25. D	26. A	27. A	28. A	29. A	30. A

Conteo de números

PROGRESIÓN ARITMÉTICA (P.A.)

Es un conjunto de números ordenados, de tal manera que cada uno de ellos (a excepción del primero) se obtiene incrementando a su inmediato anterior en una cantidad constante llamada ***razón*** de la progresión aritmética.

Ejemplos:

I. 15 ; 19 ; 23 ; 27 ; ..... ➡ Razón = 4
(4 4 4)

II. 274 ; 271 ; 268 ; 265 ; ..... ➡ Razón = - 3
(-3 -3 -3)

NOTA:

Si la razón es positiva, la progresión es CRECIENTE.

Si la razón es negativa, la progresión es DECRECIENTE.

CÁLCULO DEL NÚMERO DE TÉRMINOS

Dada una progresión aritmética finita, el número de términos se puede calcular:

$$\text{Nº de términos} = \frac{(\text{último Nº}) - (\text{Anterior al 1º})}{\text{Razón}}$$

o también:

$$\text{Nº de términos} = \frac{\text{último} - \text{primero}}{\text{Razón}} + 1$$

APLICACIÓN:

Cuantos términos tiene la siguiente progresión:

34; 38; 42; ...; 162

Resolución

Último término: 162 Razón: 4

Anterior al 1º: 34 – 4 = 30

Aplicando la 1ra. fórmula:

$$N^o\ t. = \frac{162 - 30}{4} = 33 \text{ términos}$$

CÁLCULO DE UN TÉRMINO CUALQUIERA

Toda progresión aritmética, se podría representar por:

$$t_1 \underset{r}{;} t_2 \underset{r}{;} t_3 \underset{r}{;} t_4 \; ; \ldots\ldots\ldots\ldots ; t_k \; ; t_n$$

FÓRMULA PARA CALCULAR EL TÉRMINO DE LUGAR «N»

$$t_n = t_1 + (n - 1) \cdot r$$

APLICACIÓN:

Hallar el término de lugar 40 en la progresión aritmética:

17; 20; 23; 26; ...

Resolución

Reconociendo términos observamos que:

$t_1 = 17$

$r = 20 - 17 = 3$

$n = 40$ (lugar 40)

➡ $t_{40} = t_1 + (40 - 1)r$

$t_{40} = 17 + (39)(3) = 134$

MÉTODO COMBINATORIO

Principio Fundamental

La cantidad de números o combinaciones que pueden formarse con varios órdenes o variables independientes entre sí, es numéricamente igual al producto de las cantidades de valores que pueden tomar dichas órdenes o variables.

Ejemplo 1:

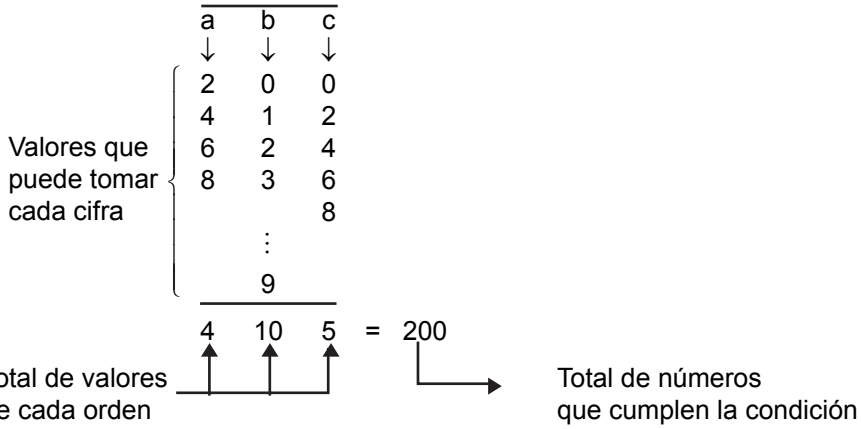
¿Cuántos números de 3 cifras que siempre empiecen y terminen en cifra par existen?

Resolución

Algunos números que cumplen la condición son: 202; 212; 214; 270; 694; etc.

Para calcular cuántos números son, se plantea:

Forma General:

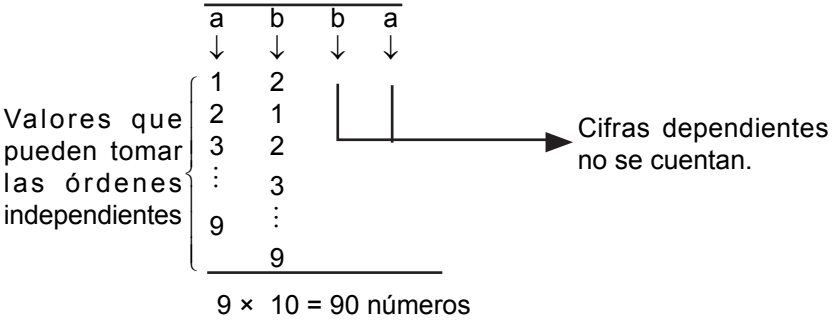


Ejemplo 2:

¿Cuántos números de la forma $\overline{abba}$ existen en el sistema decimal?

Resolución

Forma General:



PROBLEMAS RESUELTOS

1. ¿Cuántos números de 4 cifras mayores de 4650 terminan en 25 ó 75?

Resolución

Los números son:

4675; 4725; 4775; 4825; ...; 9975

y forman una P.A. de razón 50; por fórmula:

➡ Nº términos $= \frac{9975 - 4625}{50} = \frac{5350}{50} = 107$ números

2. En una P.A. desde el número 29 al 120 hay la mitad de los términos que desde el siguiente al 120 hasta 316. Hallar el término vigésimo.

Resolución

$$\underbrace{29; \overset{r}{\ldots\ldots} \overset{r}{\ldots\ldots}; 120}_{\text{"n" términos}}; \underbrace{(120+r); \ldots\ldots\ldots\ldots; 316}_{\text{"2n" términos}}$$

$$n = \frac{120 - (29 - r)}{r} \qquad 2n = \frac{316 - 120}{r}$$

Reemplazando: $2\left(\frac{91+r}{r}\right) = \frac{196}{r}$

$$182 + 2r = 196$$

$$2r = 14 \quad \Rightarrow \quad r = 7$$

Luego: $T_{(20)} = 29 + (20-1)7 = 162$

3. Dada la siguiente P. A. que tiene $\overline{3b}$ términos y «r» como razón; hallar (b+r)

111; ...; 514

Resolución

Nº términos: $\overline{3b} = \frac{514 - (111 - r)}{r}$

$\overline{3b} \cdot r = 403 + r$

$\overline{3b} \cdot r - r = 403$

$r(\overline{3b} - 1) = 13 \cdot 31$

$r = 13$

$\overline{3b} = 32 \Rightarrow \quad b = 2$

$\therefore \quad b + r = 15$

4. ¿Cuántos números de la forma $\overline{ab(b+2)c(c-3)}_{(6)}$ existen?

Resolución

a	b	$(b+2)$	c	$(c-3)_{(6)}$
↓	↓		↓	
1	0		3	
2	1		4	
3	2		5	
4	3			
5				

$5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$ números

5. ¿En qué sistema de numeración existe 180 números capicúas de 5 cifras? Dar la base.

Resolución

a	b	c	b	$a_{(n)}$
↓	↓	↓		
1	0	0		
2	1	1		
3	2	2		
⋮	⋮	⋮		
$(n-1)$	$(n-1)$	$(n-1)$		

$\underbrace{(n-1) \cdot n \cdot n}_{n^2(n-1)} = \underbrace{180}$

$n^2(n-1) = 6^2(6-1)$

$\therefore \quad n = 6$

PROBLEMAS PROPUESTOS

1. ¿Cuántos numeros de tres cifras existen, tales que empiecen en cifra par?
   A) 200 B) 215 C) 220
   D) 205 E) 210

2. ¿Cuántos numeros de la forma $\overline{abba}$ existen en el sistema decimal?.
   A) 50 B) 80 C) 70
   D) 60 E) 90

3. ¿Cuántos números capicúas de 6 cifras existen en base 7?
   A) 297 B) 294 C) 295 D) 293 E) 296

4. hallar el término vigésimo:
   $\overline{1x}_7 ; \overline{1(2x)}_7 ; \overline{(x-1)(x-1)}_7 ; \ldots$
   A) 68 B) 69 C) 67
   D) 66 E) 65

5. ¿Cuál es el número de términos en la siguiente progresión aritmética?
   4, 6, 11, 19, 30, ..., 555
   A) 10 B) 30 C) 40
   D) 20 E) 50

6. ¿Cuántos números de la siguiente forma: $\overline{(a+5)\left(\frac{b}{5}\right)(2b)(5-a)}$
   existen en el sistema de base 20
   A) 35 B) 38 C) 36
   D) 39 E) 40

7. Hallar el vigésimo término de una P.A. de 53 términos, sabiendo que su primer y último término son 21 y 437 respectivamente.
   A) 215 B) 217 C) 213
   D) 219 E) 173

8. ¿Cuántos números impares de la forma: $\overline{a(b+2)(a-3)\left(\frac{b}{2}\right)c}$
   existen en el sistema decimal?
   A) 140 B) 150 C) 180
   D) 200 E) 240

9. ¿En que sistema de numeración existen 648 números de 3 cifras diferentes entre sí? dar la base del sistema.
   A) 9 B) 10 C) 11
   D) 12 E) 13

10. ¿Cuántas cifras se ha empleado para escribir la siguiente sucesión:
    13, 17, 21, 25, ..., $\overline{1ab}$ se sabe además que a + b = 16.
    A) 117 B) 116 C) 115
    D) 118 E) 119

11. ¿Cuántos números se pude escribir de tal manera que se use las cifras: 0, 1, 3, 5, 8 y 9, que sean mayores de 3000 pero menores que 9000?
    A) 221 B) 300 C) 647
    D) 625 E) 453

12. Determinar cuántos números de 3 cifras utilizan la cifra 4 en el sistema octanario?
    A) 154 B) 140 C) 170
    D) 160 E) 180

13. determinar la suma de los términos vigésimo cuarto y trigésimo segundo de la siguiente P.A: 81, 85, 89, ...
    A) 378 B) 240 C) 702
    D) 165 E) 980

14. ¿Cuántos números de la forma: $\overline{a(a+4)b(b-3)}_{(12)}$ existen, tales que $a \neq b$.
A) 58 B) 84 C) 70
D) 56 E) 80

15. ¿Cuántos números de 4 cifras menores que 600 existen tales que acaben en las cifras 1, 5, 9 y ademas el producto de las tres cifras restantes sea impar?
A) 425 B) 225 C) 125
D) 525 E) 325

16. ¿Cuántos términos de la secuencia en P.A.: 25, 42, 59, 76, ... tiene tres cifras?
A) 56 B) 54 C) 57
D) 53 E) 55

17. ¿Cuántos números capicuas del sistema octanario tiene una sola cifra 4 en su escritura?
A) 140 B) 168 C) 42
D) 56 E) 84

18.- ¿Cuántos números de la forma; $\overline{(a-c)\left(\frac{c}{b}\right)(c+9)b}_{(14)}$ existen?
A) 273 B) 215 C) 231
D) 233 E) 220

19. ¿Cuántos numerales de 3 cifras existen en el sistema decimal, tales que la suma de sus cifras siempre sea par?
A) 470 B) 450 C) 415
D) 430 E) 460

20. ¿Cuántos numerales de 6 cifras consecutivas crecientes existen en base 12?
A) 12 B) 15 C) 14
D) 13 E) 16

21. En que sistema de numeración cuya base es par, existen 72 numerales de la forma: $\overline{xy\left(\frac{y}{2}\right)\left(\frac{x}{2}\right)}_{(n)}$
A) 10 B) 14 C) 16
D) 12 E) 18

22. Si $25_{(n)}$, $40_{(n)}$, $53_{(n)}$ estan en P.A. hallar: $100_{(n)}$.
A) 65 B) 68 C) 64
D) 69 E) 67

23. La siguiente P.A. tiene $\overline{3m}$ términos. Hallar: m + r.
111, (111+r), (111+2r), ...
A) 15 B) 18 C) 16
D) 19 E) 17

24. Cuántos números que terminan en 1 ó 6 se escriben con tres cifras en el sistema heptanario.
A) 56 B) 59 C) 61
D) 63 E) 65

25. ¿Cuántos numeros capicúas de cinco cifras hay en base 8, tales que contengan al menos un 7 en su escritura?
A) 153 B) 152 C) 151
D) 154 E) 155

26. ¿Cuántos números de 3 cifras pertenecen a la siguiente P.A.
$a^2 + 1$; $7a$; $9a - 1$; ...
A) 227 B) 226 C) 100
D) 228 E) 229

27. ¿Cuántos números de 3 cifras existen, que tengan una sola cifra impar?
A) 322 B) 323 C) 326
D) 324 E) 325

28. hallar el número de términos de la siguiente serie aritmética, sabiendo que es descendente.
$\overline{xxy}\,;\,\overline{xy8}\,;\,\overline{xz9}\,;\,\ldots;\,\overline{z2z}$
A) 50 B) 40 C) 30
D) 45 E) 35

29. En una P.A. de 35 términos, el último término es $\overline{22(a+3)}$ y el primero $\overline{2(a-1)}$. hallar el decimo tercer término si la razón es «a».
a) 53 y 62 b) 54 y 82
A) 89 B) 93 C) 95
D) 97 E) 101

30. En la siguiente P.A. existen 15 términos que acaban en 5. ¿cuántos terminos como máximo puede tener?
11; 15; 19; 23; 27; ...
A) 70 B) 72 C) 74
D) 76 E) 77

CLAVES

01. A	02. E	03. B	04. C	05. D	06. E	07.E	08. A	09. B	10. E
11. C	12. A	13. A	14. A	15. B	16. D	17. C	18. A	19. B	20. D
21. E	22. C	23. A	24. B	25. D	26. C	27. E	28. C	29. D	30. D

Adición y sustracción

ADICIÓN

Es la operación aritmética que asocia cantidades de la misma especie (homogéneas) en una sola, llamada ***suma***.

$$\underbrace{a_1 + a_2 + a_3 + \ldots\ldots\ldots + a_n}_{\text{sumandos}} = \underbrace{s}_{\text{suma}}$$

SUMAS NOTABLES

Suma de términos de una sucesión aritmética:

$$t_1 ; t_2 ; t_3 ; \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots ; t_n$$

(r entre t_1 y t_2; r entre t_2 y t_3)

$$\text{Suma} = S = \frac{n(t_1 + t_n)}{2}$$

Ejemplo (1):

Calcular R en:

$$R = 24 + 27 + 30 + \ldots\ldots\ldots\ldots + 366$$

Resolución

Calculamos el número de términos:

$$\#\,\text{Térm.} = \frac{366 - 21}{3} = \frac{345}{3} = 315$$

Luego:

$$R = \frac{115(24 + 366)}{2} = \frac{115 \times 390}{2}$$

$$R = 22\,425$$

CASOS PARTICULARES:

S_1: suma de los «n» primeros números naturales.

$$S_1 = 1+2+3+4+.....+n = \frac{n(n+1)}{2}$$

S_2: suma de los «n» primeros números pares.

$$S_2 = 2+4+6+8+.....+2n = n(n+1)$$

S_3: suma de los «n» primeros números impares

$$S_3 = 1 + 3 + 5 + 7 + ... + (2n-1) = n^2$$

Ejemplo (2):

La suma de los «n» primeros números pares es un número de forma $\overline{a00}$.
Hallar: a×n

Resolución

$$\underbrace{2 + 4 + 6 + ... + 2n} = \overline{a00}$$

$$n\,(n+1) = 100a$$

$$n\,(n+1) = 25 \cdot 4a \quad \Rightarrow \quad 4a = 24$$

Luego: n = 24 y a = 6

$\therefore$ a . n = 144

Otros casos:

S_4: suma de los «n» primeros cuadrados perfectos.

$$S_4 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

S_5: suma de los «n» primeros cubos perfectos.

$$S_5 = 1^3+2^3+3^3+ ..... +n^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$$

S_6: suma de los «n» primeros números oblongos.

$$S_6 = 1.2 + 2.3 + 3.4 + ... + n(n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$$

S_7: Si A ∈ Z+, y A > 1, entonces:

$$A^O + A^1 + A^2 + A^3 + ... A^n = \frac{A^{n+1} - 1}{A - 1}$$

Ejemplo (3):

Calcular:

$$Y = 27 + 297 + 2997 + ... + \underbrace{299.....997}_{"n+1"\text{cifras}}$$

Resolución

Dividiendo entre 3 ambos lados:

$$\frac{y}{3} = 9 + 99 + 999 + ... + \underbrace{99.....99}_{"n"\text{términos}}$$

$$\frac{y}{3} = (10^1 - 1) + (10^2 - 1) + (10^3 - 1) + ... + (10^n - 1)$$

$$\frac{y}{3} = (10^o + 10^1 + 10^2 + ... + 10^n) - n - 1$$

$$\frac{Y}{3} = \frac{10^{n+1} - 9n - 10}{9}$$

$$Y = \frac{10^{n+1} - 9n - 10}{3}$$

Ejemplo (4):

La suma de 500 números consecutivos es igual a 999 veces el menor de dichos sumandos. Entonces, el mayor de dichos números es:

Resolución

$$\underbrace{a; a+1; a+2; .....; a+499}_{500\ \#s}$$

$$S = \frac{(a_1 + a_n)n}{2}$$

$$999a = \frac{(a + a + 499)500}{2}$$

$$999a = (2a + 499) \cdot 250$$

$$999a = 500a + 499 \cdot 250$$

$$499a = 499 \cdot 250$$

$$a = 250$$

$\therefore$ Nº mayor: a + 499 = 749

SUSTRACCIÓN

Es la operación aritmética inversa a la adición, en la que dados el «minuendo (M)» y el «sustraendo (S)», se busca un tercero llamado «diferencia (D)»; de tal modo que al adicionar la diferencia al sustraendo nos reproduce el minuendo.

Es decir:

$$M - S = D$$

Propiedades

1. En toda sustracción:

$$M + S + D = 2M$$

2. En todo número de tres cifras $\overline{abc}$ donde a > b; si se tiene:

$$\begin{array}{r} \overline{abc} \\ -\ \overline{cba} \\ \hline \overline{mnp} \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} n = 9 \\ m + p = 9 \end{cases}$$

También:

a - c = m + 1

Ejemplo (1):

¿Cuántos numerales $\overline{abc}$, cumplen que: $\overline{abc} - \overline{cba} = \overline{m\ (2m)}$?

Resolución

$$\begin{array}{r} \overline{a\,b\,c} - \\ \overline{c\,b\,a} \\ \hline \overline{mn(2m)} \end{array} \Rightarrow \begin{cases} n = 9 \\ m + 2m = 9 \\ 3m = 9 \\ m = 3 \end{cases}$$

Entonces: $a - c = 4$

5	1
6	2
7	3
8	4
9	5

} 5 casos

Luego:

a	b	c
↓	↓	↓
5	0	1
6	1	2
7	2	3
8	3	4
9	⋮	5
	9	

$5 \times 10 = 50$ Nros.

COMPLEMENTO ARIMÉTICO (C.A.)

C.A.(7) = 10 – 7 = 3

C.A.(38) = 100 – 38 = 62

C.A.(547) = 1000 – 547 = 453

⇒ C.A.($\overline{abcd}$) = 10 000 – $\overline{abcd}$

Si N es un número entero de «K» cifras:

⇒ C. A. (N) = $10^k - N$

MÉTODO PRÁCTICO:

C.A.(35082) = 64918

9 10

C.A.(4607300) = 5392700

9 10

C.A.($\overline{abcd}$) = $\overline{(9-a)(9-b)(9-c)(10-d)}$

9 10

Donde d ≠ cero

Ejemplo (2):

Hallar el valor de a + b, si el complemento aritmético de $\overline{a7b}$ es igual al producto de sus cifras de mayor y menor orden.

Resolución

Por dato: C.A.($\overline{a7b}$)=a.b (como máximo es 81)

O sea, a.b es un número de 2 cifras, por tanto a = 9

Luego: C.A.($\overline{97b}$) = 9b

$$1000 - \overline{97b} = 9b$$

$$1000 - 970 - b = 9b \Rightarrow 30 = 10b$$

$$b = 3$$

$$\therefore \quad a + b = 12$$

Ejemplo (3):

Se tiene un número de 4 cifras significativas que sumadas dan 32, entonces la suma de cifras de su C.A. es:

Resolución

Dado: $\overline{abcd} \Rightarrow a + b + c + d = 32$

C.A. $\overline{abcd} = \overline{(9-a)(9-b)(9-c)(10-d)}$

$\sum$cifras = 9 – a + 9 – b + 9 – c + 10 – d

$\sum$cifras = 37 – a – b – c – d

$\sum$cifras = 37 – (a+ b + c + d)

$\sum$cifras = 37 – 32

$\sum$cifras = 5

Ejemplo (4):

La suma de los tres términos de una resta es 1480. Si el sustraendo es el C.A. del minuendo, calcular el cuádruplo de la tercera parte de la diferencia.

Resolución

$$\underbrace{M + S + D}_{2M} = 1480$$

Propiedad: $2M = 1480$

$M = 740$

Luego:

$S = C.A.(\underbrace{M}) \Rightarrow S = C.A.(740)$

$S = 260$

$$\begin{cases} M - S = D \\ 740 - 260 = D \\ D = 480 \end{cases}$$

Piden: $4\left(\frac{480}{3}\right) = 640$

PROBLEMAS PROPUESTOS

1. Si:
$\overline{3xy} + \overline{z4x} = \overline{ppp4}$
hallar : «x + y + z - p»
A) 24 B) 15 C) 31
D) 33 E) 20

2. Si el C.A de:
$\overline{pua}$ es $\overline{(p+3)(2u)(a-2)}$
hallar: «p + u + a»
A) 17 B) 12 C) 15
D) 13 E) 14

3. Si el C.A. de
$\overline{xyz} = \overline{bbb}$
b < 3. hallar: «z.b + x.y»
A) 67 B) 65 C) 68
D) 69 E) 66

4. $\overline{x0y} - \overline{yzx} = \overline{abc}$ y
$\overline{abc} - \overline{cba} = 99$ hallar: «x - y»
A) 3 B) 6 C) 5
D) 4 E) 7

5. Si $\overline{xyy}$ < 400 y además
$\overline{xyy} = \overline{y} + \overline{xy} + \overline{zx0} + \overline{z0y}$ hallar «x + y + z»
A) 10 B) 8 C) 6
D) 9 E) 7

6. hallar las tres últimas cifras de «S»:
S =6+64+643+6436+...+$\underbrace{643643\cdots}_{63\text{cifras}}$
A) 573 B) 474 C) 578
D) 564 E) 473

7. La suma de los números de dos cifras diferentes que se puede formar con tres cifras consecutivas es igual a 396. Hallar el mayor de los números.
A) 86 B) 65 C) 87
D) 98 E) 76

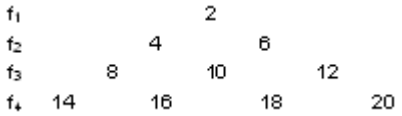
8. Hallar: «x.y.z» en la siguiente adición:
$\overline{zxzx} + \overline{8zyy} + \overline{y7xz} + \overline{xyz8} = \overline{24y22}$
A) 90 B) 105 C) 120
D) 84 E) 72

9. hallar 2 números de 3 cifras cada una sabiendo que suman 1019 si se sabe que el C.A. de uno de ellos es el doble del C.A. del otro. Dar la suma de cifras del mayor.
A) 15 B) 16 C) 17
D) 18 E) 19

10. Si: $\overline{abc} + \overline{bca} + \overline{cab} = 2109$ y
$\overline{abc} - \overline{bca}$ = 261 hallar: a.b.c
A) 172 B) 180 C) 224
D) 220 E) 195

11. La suma de los 3 términos de una resta es 6 veces el sustraendo. si la diferencia es 42, hallar el minuendo.
A) 57 B) 48 C) 72
D) 60 E) 63

12. En el triángulo numérico. hallar la suma de términos de la fila 30.



A) 27050 B) 27060 C) 27030
D) 27010 E) 27090

13. La suma de dos números excede a la diferencia de los mismos en 256. Si los números están en relación de 45 a 20. hallar el mayor
A) 270 B) 260 C) 273
D) 288 E) 279

14. Calcular:
S=1x7+2x8+3x9+4x10+...+20x26
A) 4145 B) 4135 C) 4150
D) 4140 E) 4130

15. El último campeonato de la copa américa duró 39 semanas, si en cada semana se jugó 4 partidos. ¿Cuántos equipos participaron, sabiendo que han jugado de visita y de local?
A) 13 B) 1270 C) 14
D) 15 E) 16

16. Si ambas sumas tienen la misma cantidad de sumandos:
$s_1 = 40 + 41 + 42 + ... + n$
$s_2 = 10 + 12 + 14 + ... + m$
y además $s_1 = s_2$. hallar «m + n»
A) 230 B) 240 C) 250
D) 260 E) 270

17. Hallar: a + b + x + y; si:
$\overline{a1b} + \overline{a2b} + \overline{a3b} + \cdots \overline{a7b} = \overline{x8yi}$
A) 11 B) 12 C) 13
D) 14 E) 15

18. Calcular el valor de «S» si tiene 30 sumandos:
S = 3+100+6+98+9+96+12+94+...
A) 1575 B) 1600 C) 1625
D) 1650 E) 1675

19. Si la suma de los elementos de una sustracción es igual a 840, en donde el minuendo es el triple del sustraendo. Hallar la suma de cifras de la diferencia.
A) 9 B) 8 C) 6
D) 10 E) 7

20. Si: $\overline{xy} - \overline{yx} = \overline{a(b-2)}$
hallar: «$\overline{ab} + \overline{ba}$»
A) 81 B) 100 C) 64
D) 144 E) 121

21. Si: $\overline{xxx} + \overline{yyy} + \overline{zzz} = 2664$ además:
$x \neq y \neq z$. Calcular: x.y.z
A) 503 B) 506 C) 505
D) 504 E) 507

22. Hallar el valor de «x» si:
2+14+16+38+...+x = 816
A) 134 B) 138 C) 136
D) 130 E) 150

23. ¿Cuántos números de 4 cifras tales que su C.A. de su C.A. tienen 2 cifras?
A) 60 B) 81 C) 50
D) 30 E) 97

24. Hallar a.b.c; si:
$\overline{abc} - \overline{def} = \overline{cba}$
$\overline{def} - \overline{nm(n+5)} = \overline{fed}$
b = a + c
A) 56 B) 63 C) 72
D) 48 E) 81

25. Calcular el máximo valor que puede asumir: m + n + p.
$\overline{nmp} + \overline{pnm} = \ldots 8$
$\overline{nmp} - \overline{pnm} = \ldots 8$
A) 17 B) 27 C) 7
D) 37 E) 47

26. La diferencia de dos números es 158. Si el minuendo disminuye en 33 unidades, entonces la diferencia aumenta en 17. ¿Cómo varió el sustraendo?
A) aumento 41
B) disminuyó 50
C) aumento 39
D) disminuyó 40 E) no varió

27. El C.A. de un número escrito en base 10 es el mismo número pero escrito en base 8. ¿Cuál es la suma de cifras de dicho número sabiendo que son dos?
A) 14 B) 15 C) 10
D) 12 E) 13

28. Se tiene un número de 4 cifras significativas que sumadas dan 32; entonces la suma de cifras del C.A. es:
A) 3 B) 2 C) 4
D) 5 E) 6

29. Hallar «a + b + c»; si el C.A. de: $\overline{abc}$ mas el C.A. de $\overline{cba}$ resulta 1031.
A) 10 B) 11 C) 12
D) 13 E) 14

30. La suma de los C.A. de los números: $\overline{1a1}; \overline{2a2}, \overline{3a3}; \cdots \overline{9a9}$ es 3915. Hallar el valor de «a»
A) 4 B) 5 C) 6
D) 7 E) 8

CLAVES

01. E	02. B	03. B	04. B	05. B	06. A	07. E	08. A	09. B	10. C
11. E	12. C	13. D	14. E	15. A	16. A	17. A	18. D	19. D	20. E
21. D	22. A	23. B	24. C	25. A	26. B	27. C	28. D	29. C	30. C

UNIDAD 12

Multiplicación y División

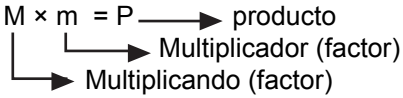
MULTIPLICACIÓN

Es la operación aritmética donde una cantidad llamada multiplicando (M) se repite tantas veces como indica el multiplicador (m), para obtener a un tercero llamado producto (P).

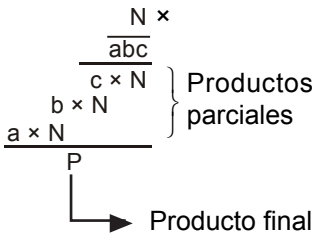
Origen: Una adición del tipo:

$$\underbrace{a + a + a + \ldots\ldots\ldots\ldots + a}_{\text{"n" veces}} = a \times n$$

Es decir:



OBSERVACIÓN:



1) (# par) (# entero) =(# par)
2) (# impar) (# impar) = (# impar)
3) (# impar) (.....5) = (.....5)
4) (# par) (.....5) = (.....0)
5) n x (n + 1) = ...0 / .....2 / 6

DIVISIÓN

Es la operación inversa a la multiplicación, donde dados dos cantidades llamadas dividendo (D) y divisor (d) ($d \neq 0$), se busca un tercero llamado cociente (q); de tal modo que al multiplicarlo por el divisor nos reproduce el dividendo.

Dividendo → D | d ← Divisor

q ← Cociente

$D = d \cdot q$

$d \neq 0$

División Entera

En este caso todos los términos son números enteros; es decir, por lo que puede ser de 2 clases.

1. D.E.Exacta

Resulta cuando el residuo de la división entera es cero.

D | d

0 q

➡ $D = d \cdot q$

2. D.E.Inexacta:

El residuo es diferente de cero.

Por defecto

D | d

r_d q

$0 < r_d < d$

$D = dq + r_d$ ..... (1)

Ejemplo:

37 | 5

2 7

➡ $35 = 5 \cdot 7 + 2$

Por exceso

D | d

r_e q +1

$0 < r_e < d$

$D = (q+1) - r_e$ ..... (2)

Ejemplo:

37 | 5

3 8

➡ $37 = 5 \cdot 8 - 3$

Propiedades:

1. Si una división inexacta se realiza por defecto y por exceso, cumple:

$$r_d + r_e = \text{divisor}$$

2. $$r_{máximo} = \text{divisor} - 1$$

3. $$r_{mínimo} = 1$$

4. Si: $D = dq + r$ ➡ $D \times n = d \times n(q) + r \times n$

PROBLEMAS DE APLICACIÓN

1. Aumentando en 9 los 2 factores de una multiplicación, el producto aumenta en 549. Hallar uno de los factores si la diferencia de ellos es 18.

Resolución

Sea: $a \cdot b = P$

y $(a + 9)(b + 9) = P + 549$

$ab + 9a + 9b + 81 = P + 549$

$P + 9(a + b) = P + 468$

Luego: $a + b = 52$ y:

$a - b = 18$

Resolviendo: $a = 35$ y $b = 17$

2. En cierto producto, si al multiplicando se le disminuye 4 unidades, entonces el producto disminuye en 640; pero si al multiplicador se le aumenta 4 unidades, entonces el producto aumenta en 120. ¿Cuál es el producto?

Resolución

Producto: $a \times b = P$

$(a - 4) \times b = P - 640$

$a \times b - 4b = P - 640$

$P + 640 = P + 4b$ ➡ $b = 160$

$$a \times (b + 4) = P + 120$$

$$a \times b + 4a = P + 120$$

$$P + 4a = P + 120 \quad \Rightarrow \quad a = 30$$

Producto: $a \times b = 4800$

3. Hallar: A+B+C+D
   Si: $\overline{ABCD} \times 7 = \overline{1CDDD}$

Resolución

$$\begin{array}{cccc} 2 & 4 & 3 & \\ \hline A & B & C & D \times \\ & & & 7 \\ \hline 1 & C & D & D & D \\ & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ & 6 & 5 & 5 & 5 \end{array}$$

Unidad: $7 \times D = \ldots\ldots\ldots\ldots D$

Sólo: $D = 5 \ (D \neq 0)$

Decena: $7 \times C + 3 = \ldots\ldots\ldots 5$
$C = 6$

Centena: $7 \times 8 + 4 = \ldots\ldots\ldots 5$
$B = 3$

Millar: $7 \times A + 2 = 16$
$A = 2$

Luego: $A + B + C + D = 16$

4. Si: $\overline{abc} \times 873 = \ldots\ldots\ldots 241$
   Dar como respuesta la suma de las cifras del producto.

Resolución

$$\begin{array}{cccc} & 8 & 7 & 3 \times \\ & a & b & c \\ \hline & 6 & 1 & 1 & 1 \\ & 8 & 7 & 3 & \\ 6 & 9 & 8 & 4 & \\ \hline \end{array}$$

$P = 7\ 1\ 3\ 2\ 4\ 7$

Unidades: $C \cdot 3 = \ldots\ldots 1 \Rightarrow C = 7$

Decenas: $b \cdot 3 = \ldots\ldots 3 \Rightarrow b = 1$

Centenas: $a \cdot 3 = \ldots\ldots 4 \Rightarrow a = 8$

$\therefore$ Suma de cifras del producto = 24

5. Hallar la suma de las cifras de un número de 4 cifras, sabiendo que al ser multiplicado por 43, se obtiene como suma de sus productos parciales un número que termina en 5543.

Resolución

$$\begin{array}{r} \overline{abcd} \times \\ 43 \\ \hline \end{array}$$

1er. Producto parcial: $3(\overline{abcd})$

2do. Producto parcial: $4(\overline{abcd})$

Sumando los productos parciales: $7(\overline{abcd}) = \ldots\ldots 5543$

Luego:
$$\begin{array}{r} \overline{abcd} \times \\ 7 \\ \hline \ldots\ldots 5543 \end{array}$$

Multiplicando en forma ordenada: $d = 9$; $c = 4$

$b = 6$; $a = 3$

Suma de cifras de $\overline{abcd}$: 22

6. La suma de 2 números es 341, su cociente es 16 y el residuo el más grande posible. Hallar la diferencia de los números.

Resolución

$A + B = 341$ ..... (1)

$A = 16B + B - 1$

$A = 17B - 1$ .... (2)

A	B
(B-1)	16

Reemplazando (2) en (1): $(17B - 1) + B = 341$

$18B - 342 \Rightarrow B = 19$

Reemplazando en (1): $A = 322$ $\therefore$ $A - B = 303$

7. En una división inexacta el cociente y el residuo son, respectivamente, 58 y 15. Si se quita 376 unidades al dividiendo, el cociente disminuye en 16 y el residuo se hace máximo. Hallar el dividiendo

Resolución

D	d
15	58

D-376	d
d-1	42

$D = 58d + 15$ ..... (1)

$D - 376 = 42d + d - 1$

$D = 43d + 375$ ..... (2)

Haciendo (1) = (2): $D: 58d + 15 = 43d + 375$

$15d = 360$

$d = 24$

En (1): $D = 1407$

8. Al dividir dos números por defecto y por exceso se obtuvo como residuo: 31 y 21, respectivamente. Si la suma del dividendo, divisor y cociente es 984. Hallar el dividendo.

Resolución

$r + r_e = d$

Como: $r = 31$ y $r_e = 21$ ➡ $d = 52$

$D = 52q + 31$ ..... (1)

Dato: $D + d + q = 984$

$D + q = 932$ ..... (2)

Reemplazando (1) en (2):

$52q + 31 + q = 932$

$53q = 901$

$q = 17$

En (1): $D = 52 \times 17 + 31$

$D = 915$

9. La suma de los 4 términos de una división es 425. Si se multiplica por 5 el dividiendo y el divisor, y se vuelve a efectuar la operación, la suma de los términos sería 2073; hallar el cociente respectivo.

Resolución

$$D + d + q + r = 425 \quad \text{... (I) (dato)}$$

se sabe que: $D = dq + r \Rightarrow 5D = 5dq + 5r$ (Dato)

$$5D + 5d + q + 5r = 1073 \quad \text{..... (II)}$$

Multiplicando (1)×5:

$$5D + 5d + 5q + 5r = 2125 \quad \text{..... (III)}$$

Restando (III) – (II):

$$4q = 52 \Rightarrow q = 13$$

10. El cociente de una división entera es 11 y el resto es 39. Hallar el dividendo si es menor que 500. Dar como respuesta el número de soluciones posibles.

Resolución

D	d
39	11

$D = 11d + 39$

Donde: $D < 500$

$11d + 39 < 500$

$11d < 461$

$d < 41{,}9$

Si: $r < d$ $\quad 39 < d$

Luego: $39 < d < 41{,}9$

Entonces: $d \Rightarrow 40$ y 41

Existen 2 números: $D = 11 \times 40 + 39 \Rightarrow D = 479$

$D = 11 \times 41 + 39 \Rightarrow D = 480$

PROBLEMAS PROPUESTOS

1. Se dan para multiplicar los numeros 32 y 14, (en este orden) pero la cifra de las decenas en el multiplicando la confunden con 8. ¿Cuál es la diferencia del producto obtenido con el producto verdaero?
   A) 650 B) 700 C) 750
   D) 600 E) 800

2. En que cifra termina :
   $E = (2x7x11x13x18)^{4681}$
   A) 2 B) 4 C) 6
   D) 8 E) 9

3. La suma de los términos de una división entera exacta es 404. Si el dividendo es el cuadruplo del divisor. ¿Cuál es el dividendo?
   A) 320 B) 340 C) 360
   D) 220 E) 280

4. Se ha efectuado la división de un par de números por defecto y por exceso resultando 12 y 23 los residuos respectivos. Si el cociente por exceso fué 21. ¿Cuál es el valor del dividendo?
   A) 711 B) 714 C) 712
   D) 812 E) 716

5. Determinar el valor de «a + m» si:
   $762x999 = \overline{\cdots abc}$
   $483x999 = \overline{\cdots mnp}$
   A) 6 B) 7 C) 8
   D) 9 E) 5

6. Si $\overline{abx}\overline{ba} = 736$ $(a < b)$ calcular el valor de:
   $\overline{(a-1)(b-1)}x\overline{(a+1)(b+1)}$
   A) 406 B) 407 C) 410
   D) 412 E) 408

7. ¿Cuántos enteros positivos existen, tales que divididos entre 64 dejan un residuo que es el triple del cociente?
   A) 12 B) 14 C) 23
   D) 21 E) 27

8. En una división entera inexacta de residuo máximo el divisor es 37. Si el cociente es el C.A. de 88. ¿Cuál es el valor del dividendo?
   A) 440 B) 480 C) 450
   D) 410 E) 540

9. En una multiplicación, si al multiplicando se le aumenta 5 unidades el producto aumenta en 200. Si al multiplicador se le aumenta 7 unidades el producto aumenta en 91. Calcule la suma de las cifras del producto inicial.
   A) 12 B) 13 C) 7
   D) 6 E) 8

10. La suma de los tres términos de una multiplicación es 47. Si se multiplica por 6 al multiplicando, la nueva suma de términos es 207. Calcular el multiplicador.
    A) 5 B) 6 C) 7
    D) 8 E) 15

11. En una división entera inexacta, al resto le falta 8 para ser máximoy le sobran 3 para ser mínimo.Si el cociente es numéricamente igual al axceso de divisor sobre 3. ¿Cuál es el dividendo?
    a) 132 b) 131 c) 133
    d) 135 e) 134

12. El cociente y el residuo de una división inexacta son respectivamente 43 y 27. Si se la aumenta al dividendo 108 unidades y se efectua nuevamente la división el cociente aumenta en 3 y el residuo disminuye en 12. ¿Cuál es el divisor respectivo?
A) 28 B) 32 C) 40
D) 45 E) 50

13. Si:
$$N \times \overline{ab} = 17472$$
$$N \times \overline{cb} = 53872$$
Además: c - a = 5. Calcular el valor de N.
A) 886 B) 416 C) 728
D) 736 E) 816

14. Calcular E = (b + c) - (a + d) dado el producto $\overline{abcd} \times 95$ donde la diferencia de sus productos parciales es 15372
A) 3 B) 6 C) 8
D) 10 E) 12

15. En una división inexacta el cociente por defecto es 9, los residuos por defecto y por exceso son iguales y la suma del dividendo y el divisor es 210. Hallar el dividendo
A) 210 B) 270 C) 180
D) 190 E) 250

16. En cierta división se cumple que el residuo por exceso es igual al cociente por defecto y el residuo por defecto es igual al cociente por exceso. si el divisor es 37, hallar el dividendo.
A) 625 B) 685 C) 705
D) 715 E) 745

17. Si Nx17 t.ermina en 2581. ¿como término Nx8?
A) 4477 B) 4744 C) 4747
D) 4774 E) 4474

18. Si letras diferentes representan cifras diferentes y 0 = cero hallar la suma de las cifras de $\overline{RETEN}$; SI:
$$\overline{TOC} \times \overline{TOC} = \overline{ENTRE}$$
A) 16 B) 17 C) 18
D) 19 E) 20

19. Hallar el cociente que se obtiene de dividir el C.A. de $\overline{abc}$ entre $\overline{abc}$; si el residuo obtenido es máximo.
A) 5 B) 6 C) 7
D) 8 E) 9

20. Se divide $\overline{a8b}$ entre $\overline{ab}$, el cociente es $\overline{xx}$ y el residuo es (10+b). calcular el valor de (a + b + x)
A) 7 B) 12 C) 9
D) 8 E) 10

21. Un numeral de 3 cifras se divide entre 27 y su doble un número de 4 cifras entre el cociente anterior dando 55 de cociente y 3 de residuo. ¿Cuántos de estos números existen?
A) 3 B) 4 C) 5
D) 6 E) 9

22. Al resto de una cierta división le faltan 8 unidades para ser máximo. si se le suma 6416 unidades al dividendo, el cociente aumenta en 89 y el residuo se vuelve máximo. ¿Cuál es el divisor?
A) 54 B) 65 C) 72
D) 84 E) 90

23. Si: $\overline{abc2x9} = \overline{1nmmm}$ calcular: $a + b + c + m + n$.
A) 13 B) 14 C) 16
D) 17 E) 18

24. Al multiplicar un entero positivo por 137 se obtuvo productos parciales que adicionados exactamente uno debajo del otro resulta 528. Calcule la suma de las cifras que componen dicho numeral.
A) 11 B) 12 C) 13
D) 10 E) 14

25. hallar el mayor número de tres cifras tal que al dividirlo entre el número formado por sus dos primeras cifras el resto es 5 y al dividirlo entre el número formado por sus dos últimas cifras la división resulta exacta. Dar como respuesta la suma de sus cifras.
A) 24 B) 21 C) 20
D) 18 E) 17

26. La división de dos números da 254 de cociente y 2713 de resto. ¿En cuántas unidades como máximo puede aumentar tanto el dividendo como el divisor sin que varíe el cociente?.
A) 4 B) 6 C) 8
D)10 E) 12

27. Si: $7x\overline{abcdef} = \overline{gabcde}$ Hallar: $a + b + c + d + e + f$
A) 20 B) 21 C) 22
D) 23 E) 24

28. Se multiplica $\overline{axe}$ por 124 obteniendose 3 productos parciales que al multiplicarlos entre si resultó $64x129^3$. Determine el producto que se obtiene al multiplicar $\overline{exa}$ por 5.
A) 1290 B) 4260 C) 4280
D) 1140 E) 2380

29. La suma de los términos de una división inexacta es 427. Se multiplica el dividendo y el divisor por 5 y se realiza nuevamente la operación, la suma de términos es ahora 2043. Calcular la suma de cifras del cociente.
A)3 B) 4 C) 5
D) 6 E) 7

30. Al dividir $\overline{abcd}$ entre $\overline{ba}$ se obtiene por cociente 175 y por residuo $\overline{cd}$. Calcular el menor valor de $\overline{abcd}$. dar como respuesta la suma de cifras.
A)3 B) 4 C) 5
D) 6 E) 7

CLAVES

01. B	02. C	03. A	04. C	05. B	06. E	07. D	08. B	09. C	10. E
11. E	12. C	13. C	14. B	15. D	16. B	17. B	18. D	19. B	20. D
21. E	22. C	23. E	24. B	25. B	26. D	27. C	28. B	29. C	30. B

Teoría de la Divisibilidad

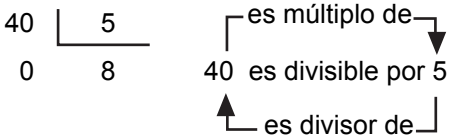
DIVISIBILIDAD

Es aquella parte de la aritmética, que estudia las condiciones que debe reunir un número, para ser considerado divisible entre otro, así como también las consecuencias que de este hecho se derivan.

Se dice que un número entero «A» es divisible por otro entero positivo «B» (módulo), cuando al dividir «A» entre «B», la división resulta entera y exacta.

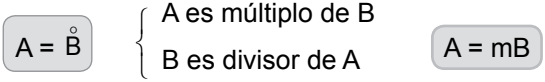


Ejemplo:



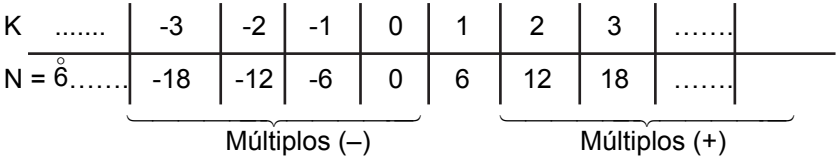
NOTACIÓN

Para denotar que «A» es divisible por «B», escribiremos:



Ejemplo: $A = B \times q$; $q \in Z$

Números múltiplos de 6: $N = \overset{\circ}{6} = 6K$ $(K \in Z)$



PRINCIPIOS DE LA DIVISIBILIDAD

1. La adición o sustracción de números múltiplos de n, da por resultado un $\overset{\circ}{n}$.

$\overset{\circ}{n} + \overset{\circ}{n} + \overset{\circ}{n} = \overset{\circ}{n}$ Ejemplo: $30 + 18 = 48$

$\overset{\circ}{6} + \overset{\circ}{6} = \overset{\circ}{6}$

$\overset{\circ}{n} - \overset{\circ}{n} = \overset{\circ}{n}$ Ejemplo: $48 - 16 = 32$

$\overset{\circ}{6} + \overset{\circ}{6} = \overset{\circ}{6}$

2. Si multiplicamos un $\overset{\circ}{n}$ por una constante entera (K), el producto sigue siendo un $\overset{\circ}{n}$.

$\overset{\circ}{n} \times k = \overset{\circ}{n}$ Ejemplo: $20 \times 3 = 60$

$\overset{\circ}{4} \times k = \overset{\circ}{4}$

$\overset{\circ}{n} \times \overset{\circ}{n} = \overset{\circ}{n}$ Ejemplo: $15 \times 10 = 150$

$\overset{\circ}{5} \times \overset{\circ}{5} = \overset{\circ}{5}$

3. Si un múltiplo de «n» se eleva a un número entero positivo (K), el resultado es $\overset{\circ}{n}$.

$(\overset{\circ}{n})^k = \overset{\circ}{n}$ Ejemplo: $(4)^3 = 64$

$(\overset{\circ}{2})^3 = \overset{\circ}{2}$

4. Si el producto de dos números es $\overset{\circ}{n}$ y uno de ellos no admite divisores comunes con «n», entonces el otro es $\overset{\circ}{n}$. (Principio de Arquímides)

Ejemplos:

- ✳ $4 \times A = \overset{\circ}{3}$ ➡ $A = \overset{\circ}{3}$
- ✳ $3 \times B = \overset{\circ}{7}$ ➡ $B = \overset{\circ}{7}$
- ✳ $6N = \overset{\circ}{10}$ $(\div 2)$
- → $3N = \overset{\circ}{5}$ ➡ $N = \overset{\circ}{5}$

5. Todo número es múltiplo de sus factores o de cualquier combinación de estos.

Ejemplos:

30 = 2 x 3 x 5

$$30 = \overset{0}{1};\overset{0}{2};\overset{0}{3};\overset{0}{5};\underbrace{\overset{0}{(2x3)}}_{\overset{0}{6}};\underbrace{\overset{0}{(2x5)}}_{\overset{0}{10}};\underbrace{\overset{0}{(3x5)}}_{\overset{0}{15}};\underbrace{\overset{0}{(2x3x5)}}_{\overset{0}{30}}$$

APLICACIÓN

Un número de 2 cifras donde la primera es el doble de la segunda cifra, es siempre divisible entre:

a) 2 y 3 b) 3 y 5 c) 3 y 7 d) 5 y 7 e) 3 y 4

Resolución

Sea el Nº: $\overline{(2a)a}$

$\overline{(2a)a} = 10\,(2a) + a$

$\overline{(2a)a} = 21a$

$\overline{(2a)a} = 3 \times 7 \times a$ (Factores 3 y 7)

➡ $\overline{(2a)a} = \overset{\circ}{3};\ \overset{\circ}{7};\ \overset{\circ}{21}$

NÚMEROS NO DIVISIBLES

Expresar A en función de $\overset{0}{B}$

a) D.I. por defecto:

A	B
r	q

$A = Bq + r$

➡ $A = \overset{\circ}{B} + r$

b) D.I. por exceso:

A	B
	r_e

q+1

$A = B\,(q+1) - r_e$

➡ $A = \overset{\circ}{B} - r_e$

Ejemplo:

Expresar 31 en función de $\overset{\circ}{7}$.

$$\begin{array}{r|l} 31 & 7 \\ \hline 3 & 4 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 31 & 7 \\ \hline 4 & 5 \end{array}$$

$31 = 7 \times 4 + 3$ $\quad\Rightarrow\quad$ $31 = \overset{\circ}{7} + 3$

$31 = 7 \times 5 - 4$ $\quad\Rightarrow\quad$ $31 = \overset{\circ}{7} - 4$

1) Si un número «N»:

$$N \begin{cases} \overset{\circ}{a} \\ \overset{\circ}{b} \end{cases} \qquad N = \overset{\circ}{\overline{mcm(a,b)}}$$

Ejemplo:

Si: $N = \overset{\circ}{8}$ y $N = \overset{\circ}{12}$ $\quad\Rightarrow\quad$ $N = \overset{0}{\overline{mcm(8;12)}}$ $\quad\Rightarrow\quad$ $N = \overset{0}{24}$

2) Si un número «N»:

Si: $N = \overset{\circ}{20} + 5$ y $N = \overset{\circ}{30} + 5$ $\Big\}$ $N = \overset{0}{\overline{mcm(20;30)}} + 5$ $\quad\Rightarrow\quad$ $N = \overset{0}{60} + 5$

APLICACIÓN

La edad en años que tiene un individuo es múltiplo de 2 años más 1, múltiplo 7 más 6 y múltiplo de 10 menos 1. ¿Cuál es dicha edad?

Resolución

Sea la edad «N»:

$$N \begin{cases} \overset{0}{2} + 1 \Rightarrow \overset{0}{2} - 1 \\ \overset{0}{7} + 6 \Rightarrow \overset{0}{7} - 1 \\ \overset{0}{10} - 1 \Rightarrow \overset{0}{10} - 1 \end{cases}$$

$N = \overset{0\ 0\ 0}{(2;7;10)} - 1$

$N = \overset{0}{\overline{mcm(2;7;10)}} - 1$

$N = \overset{0}{70} - 1$

$N = 69$

PROBLEMAS RESUELTOS

1. Al naufragar un barco en el que viajaban 180 personas, se observa que, de los sobrevivientes: 2/5 fuman, 3/7 son casados y los 2/3 son ingenieros. Determinar cuántas personas murieron en dicho accidente.

Resolución

S + M = 180…….. (1)

Fuman $= \frac{2S}{5}$ ➡ $S = \overset{\circ}{5}$

Casados $= \frac{3S}{7}$ ➡ $S = \overset{\circ}{7}$ ⟶ $S = \overset{0}{105}$

Ingenieros $= \frac{2S}{3}$ ➡ $S = \overset{\circ}{3}$

➡ S: 105; 210; 315; .....

Sólo: S = 105

Reemplazando en (1): M = 75

2. ¿Cuántos números de 4 cifras son múltiplos de 7 y terminan en 1?

Resolución

Números $\overset{\circ}{7}$ = 7K (K ∈ Z)

$1000 \leq 7K < 10000$ (÷ 7)

$142.8 \leq K < 1428.5$

$K \rightarrow 143; 144; 145; ...; 1428$

Pero: 7K = termina en 1

K = termina en 3

Sólo: $K \rightarrow 143; 153; 163; ...; 1423$

Número térm.$= \frac{1423 - 133}{10} = 129$ #s

3. ¿Cuántos de los números de 1 a 720 son múltiplos de 4 pero no de 5?

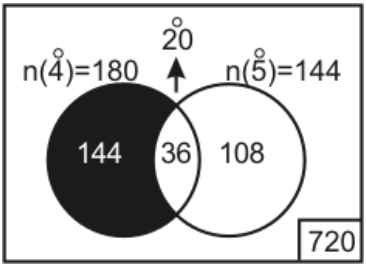
Resolución

$$n(\overset{0}{4}) = \frac{720}{4} = 180$$

$$n(\overset{0}{5}) = \frac{720}{5} = 144$$

$$n(\overset{0}{20}) = \frac{720}{20} = 36$$

$$\therefore n(\overset{0}{4} \neq \overset{0}{5}) = 144$$



PROBLEMAS PROPUESTOS

1. En la siguiente secuencia:
   1, 2, 3, 4, ... , 760
   I Cuántos son divisibles entre 4.
   II Cuántos son divisibles entre 6 y 4.
   III Cuántos son divisibles entre 4 pero no entre 6.
   Dar como respuesta la suma de los resultados que se obtienen.
   A) 320 B) 350 C) 360
   D) 380 E) 400

2. ¿Cuántos numerales de 3 cifras son divisibles entre 19
   A) 46 B) 47 C) 48
   D) 49 E) 50

3. ¿Cuántos numerales de 4 cifras son multiplos de 23 y terminan en 8?
   A) 48 B) 72 C) 28
   D) 36 E) 39

4. Si: N = $\overline{abcd(3a)(3b)(3c)}$ entonces N siempre será divisible por:
   A) 7 B) 11 y 7 C) 19
   D) 31 E) 59

5. Calcular (a + b + c + d) si:
   $\overline{abcd} = \overset{0}{17}$ y $\overline{cd} = 3x\overline{ab} + 1$
   A) 16 B) 18 C) 20
   D) 21 E) 24

6. halle la suma de los posibles valores de «n» si: $\overline{34nn} = \overset{0}{n}$
   A) 16 B) 18 C) 19
   D) 20 E) 21

7. $\overline{mcdu} = \overset{0}{19} + 5$ y m+c+d+u = 18
   $\overline{mc} + \overline{cd} + \overline{du} = 161$ calcular $\overline{cd}$
   A) 21 B) 36 C) 26
   D) 56 E) 66

8. En la secuencia:
   21x89; 21x90; 21x91; ...; 21x2008
   ¿Cuántos términos no son $\overset{0}{77}$?
   A) 1746 B) 1763 C) 1740
   D) 1780 E) 1450

9. A una fiesta de carnaval asistieron 105 personas entre niños, mujeres y hombres. La cantidad de niños era la septima parte de las mujeres que asistieron y los hombres que no bailaban era la octava parte de las mujeres que asistieron ¿Cuántas mujeres no bailaban?
   A) 20 B) 21 C) 22
   D) 24 E) 32

10. Al multiplicar por 120 a un número de dos cifras iguales se obtiene un $\overset{0}{7}$ -1. halle el valor de la cifra empleada
    A) 1 B) 2 C) 3
    D) 5 E) 7

11. ¿Cuántos números de 5 cifras que terminan en 28 son (m19 + 12)?
    A) 45 B) 46 C) 47
    D) 48 E) 49

12. ¿Cuántos de los números de 1 al 720 son múltiplos de 4 pero no de 3 ni de 5?
    A) 48 B) 84 C) 96
    D) 180 E) 108

13. Si: $\overline{wxyz} = \overset{0}{11}$; $\overline{wx}$ = C.A.$(2.\overline{yz})$ calcular (x + y + z + w) para el mayor número que cumple dicha condición.
A) 14 B) 16 C) 18
D) 20 E) 22

14. En la siguiente serie: 8; 15; 22; 29; ...;351. Determinar la suma de todos los (m8 + 6).
A) 972 B) 980 C) 988
D) 996 E) 1004

15. hale la suma de cifras del menor número, mayor que 1200, tal que al restarle su C.A. se obtenga un «m23».
A) 5 B) 6 C) 7
D) 8 E) 9

16. ¿existen números de la forma $\overline{nn76n}$ que sean divisibles por 19?, ¿Cuántos cumplen dicha condición?
A) 11 B) 9 C) 6
D) 7 E) 4

17. ¿que día de la semana fué 30 de mayo de 1960, sabiendo que en el año 1988, 30 de mayo fué sabado?
A) lunes B) Martes C) jueves
D) Viernes E) Sabado

18. Entre los 1512 primeros números naturales. ¿Cuántos son múltiplos de 3 pero no de 9.
A) 108 B) 336 C) 504
D) 520 E) 1072

19. Al expresar el menor número de 3 cifras en base 3, las cifras de menor orden fueron 2 y 1 respectivamente. hallar el número.
A) 95 B) 105 C) 205
D) 305 E) 405

20. - Halle el menor númerode 4 cifras tal que al expresarlo en bases 2, 3 y 7 terminan en 101, 12 y 5; dar como respuesta la suma de cifras.
A) 4 B) 5 C) 6
D) 7 E) 8

21. Sabiendo que:
N= $\overline{abc3}_{(8)} \times \overline{aa101}_{(2)} \times \overline{bb31}_{(4)}$
Calcule el residuo al dividir N entre 8.
A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 5

22. En una reunión se cuenta entre 400 y 450 personas de las cuales los 3/7 son varones; los 2/5 usan lente y los 2/3 son profesionales. ¿Cuántas mujeres habia en la reunión?
A) 180 B) 200 C) 240
D) 105 E) 315

23. Halle el mayor número de 3 cifras tal que al dividirlo entre 5, 6 y 8 se obtiene residuos máximos.
A) 939 B) 949 C) 959
D) 969 E) 979

24 ¿Cuántos números de la sucesión: 7; 15; 23, ..., 399 son m11.
A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 5

25. Si: $\overline{abab}$ = m13 + 5. calcule la suma de los posibles valores de $\overline{ab}$

A) 131 B) 413 C) 513
D) 613 E) 713

26. Calcule el residuo al dividir:
$N = 3^0 + 3^1 + 3^2 + ... + 3^{401}$ entre 5

A) 2 B) 9 C) 1
D) 3 E) 0

27. Si $\overline{mnp}$ es divisible entre 37 y $\overline{npm}$ es divisible entre 14 ¿cuál es el valor de «m + n + p»?

A) 13 B) 14 C) 15
D) 16 E) 17

28. Si: $\overline{abc}$ = 66(a + c - b); calcular el valor de: $(a^2 + b^2 + c^2)$

A) 74 B) 136 C) 125
D) 89 E) 182

29. Un número de la forma: $\overline{(2a)(2b)(2\ c)abc}$ es siempre divisible entre:

A) 7 B) 13 C) 19
D) 17 E) 23

30. ¿Cuántos números de la forma $\overline{abba}_{(8)}$ son múltiplos de 17

A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 5

CLAVES

01. D	02. B	03. C	04. E	05. C	06. D	07. C	08. A	09. C	10. D
11. C	12. D	13. C	14. A	15. D	16. B	17. A	18. B	19. B	20. B
21. C	22. C	23. C	24. E	25. B	26. E	27. B	28. D	29. E	30. D

Criterios de Divisibilidad

Concepto

Son condiciones que consisten en analizar las cifras de un número, para determinar si es divisible o no respecto a cierto módulo. En caso de no serlo, nos dará a conocer el residuo.

Divisibilidad por 2

Un número es divisible por 2 cuando termina en cero o cifra par.

Si: $\overline{\ldots abc} = \overset{\circ}{2}$ $\quad c \to 0, 2, 4, 6$ u 8

Ejemplo: 999998 = m2

Divisibilidad por 5

Un número es divisible por 5 cuando la cifra de sus unidades es cero o cinco.

Si: $\overline{\ldots abc} = \overset{\circ}{5}$ $\quad c \to 0$ ó 5

Ejemplo: 12345 0 = m5

Divisibilidad por 4

Un número es divisible por 4 cuando sus 2 últimas cifras son ceros o forman un número múltiplo de 4; también si el doble de la penúltima más la última resulta un $\overset{0}{4}$.

Si: $\overline{\ldots abc} = \overset{\circ}{4}$ ➡ $\overline{bc}$ = 00, 04, 08,…, 96

o también: $2b + c = \overset{\circ}{4}$

Ejemplo: 14 352 = $\overset{\circ}{4}$ ya que: 2(5) + 2 = 12 = m4

Divisibilidad por 25

Un número es divisible por 25 cuando sus 2 últimas cifras son ceros o forman un número $\overset{\circ}{25}$.

Si: $\overline{\ldots abcd} = \overset{\circ}{25}$ ➡ $\overline{cd} = 00$ ó $\overset{\circ}{25}$

Ejemplo: 36975 = m25 ya que 75 = m25

Divisibilidad por 8
Cuando sus 3 últimas cifras son ceros o múltiplo de 8.

Si: $\overline{\ldots abcd} = \overset{\circ}{8}$ ➡ $\overline{bcd} = 000$ ó $\overset{\circ}{8}$

o también: $4b + 2c + d = \overset{\circ}{8}$

Ejemplo: $15\underline{432} = \overset{\circ}{8}$; ya que: $4(4) + 2(3) + 2 = 24 = \overset{\circ}{8}$

Divisibilidad por 125
Cuando sus 3 últimas cifras son ceros o múltiplo de 125.

Si: $\overline{abcd} = \overset{\circ}{125}$ ➡ $\overline{bcd} = 000$ ó $\overset{\circ}{125}$

Ejemplo: 87375; ya que: $375 = \overset{\circ}{125}$

Divisibilidad por 2^n ó 5^n
Un número es divisible por 2^n ó 5^n si sus últimas «n» cifras son ceros, o forman un número que sea divisible por 2^n ó 5^n, respectivamente.

Divisible por 3
Un número es divisible por 3 si la suma de sus cifras es un múltiplo de 3.

Si: $\overline{abcdef} = \overset{\circ}{3}$ ➡ $a + b + c + d + e + f = \overset{\circ}{3}$

Ejemplo: 123450 = m3 ya que $\sum cfs = 15 = \overset{\circ}{3}$

Divisible por 9
Un número es divisible por 9 cuando la suma de sus cifras es múltiplo de 9.

Si: $\overline{abcdef} = \overset{\circ}{9}$ ➡ $a + b + c + d + e + f = \overset{\circ}{9}$

Ejemplo: 12345067890 = m9 ya que $\sum cfs = 45 = \overset{\circ}{9}$

Divisibilidad por 11

Un número es divisible por 11 cuando la suma de sus cifras de orden impar menos la suma de las cifras de orden par resulte cero ó $\overset{\circ}{11}$.

Si: $\overset{8^o\ 7^o\ 6^o\ 5^o\ 4^o\ 3^o\ 2^o\ 1^o}{\overrightarrow{\quad}}$ ordenes

$$\overset{\leftarrow}{a\ b\ c\ d\ e\ f\ g\ h} = \overset{\circ}{11}$$

$$\overset{-\ +\ -\ +\ -\ +\ -\ +}{}$$

➡ $(h+f+d+b)-(g+e+c+a) = 0$ ó $\overset{0}{11}$

$(\sum$ de cifras orden impar$) - (\sum$de cifras orden par$)$

Ejemplo: 1836547295

Donde: $(5+2+4+6+8) - (9+7+5+3+1) = 0$ ➡ el Nº es $\overset{0}{11}$

Divisibilidad por 7

Un número será divisible por 7 cuando se le aplique la siguiente regla:

De derecha a izquierda y cifra por cifra, se multiplique por los siguientes factores: 1, 3, 2, -1, -3, -2, 1, 3, 2, -1, ...; después de realizar estos productos, se efectúa la suma algebraica, y si este resultado es 0 ó $\overset{\circ}{7}$, el número será efectivamente múltiplo de 7.

Si: $\overleftarrow{a\ b\ c\ d\ e\ f\ g\ h} = \overset{\circ}{7}$ ➡ $h+3g+2f-(2e+3d+2c)+2b+3a = \overset{\circ}{7}$

$$\begin{array}{cccccccc} \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 3 & 1 & 2 & 3 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ + & & - & & + & & & \end{array}$$

Ejemplo: 760493636 es múltiplo de 7.

Comprobación:

$$\begin{array}{cccccccccc} 7 & 6 & 0 & 4 & 9 & 3 & 6 & 3 & 6 \\ 2 & 3 & 1 & 2 & 3 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ & + & & & - & & & + & \end{array}$$

➡ $\underbrace{6+9+12}_{27} - \underbrace{(3+27+8)}_{38} + \underbrace{0+18+14}_{32} = 21 = \overset{\circ}{7}$

Divisibilidad por 13

Regla práctica:

Si: $\overline{a\,b\,c\,d\,e\,f\,g\,h} = \overset{\circ}{13}$

$\underbrace{3}_{-}\ \underbrace{1\ 4\ 3}_{+}\ \underbrace{1\ 4\ 3}_{-}\ \underbrace{1}_{+}$

$\Rightarrow \quad h - (3g + 4f + e) + (3d + 4c + b) - 3a = \overset{\circ}{13}$

Ejemplo:

283756174 es $\overset{\circ}{13}$

$\underbrace{4\ 3}_{-}\ \underbrace{1\ 4\ 3}_{+}\ \underbrace{1\ 4\ 3}_{-}\ \underbrace{1}_{+}$

$\Rightarrow \quad 4 - (\underbrace{21 + 4 + 6}) + (\underbrace{15 + 28 + 3}) - (\underbrace{24 + 8})$

$4 - \quad 31 \quad + \quad 46 \quad - \quad 32 \quad = -13 = \overset{\circ}{13}$

APLICACIÓN:

¿Qué valor debe tomar «b» en el numeral $\overline{128b306}$ si es divisible entre 13?

Resolución

$\overline{1\,2\,8\,b\,3\,0\,6} = \overset{\circ}{13}$

$\underbrace{1\ 4\ 3}_{+}\ \underbrace{1\ 4\ 3}_{-}\ \underbrace{1}_{+}$

$\Rightarrow \quad 1 + 8 + 24 - b - 12 - 0 + 6 = \overset{\circ}{13}$

$27 - b = \overset{\circ}{13}$

$\therefore \quad b = 1$

Divisibilidad por 33

Si: $\overline{\underbrace{a\ b}\ \underbrace{c\ d}\ \underbrace{e\ f}} = \overset{\circ}{33}$

$\Rightarrow \quad \overline{ef} + \overline{cd} + \overline{ab} = \overset{\circ}{33}$

Divisibilidad por 99

Si: $\overline{a\ b\ c\ d\ e\ f\ g} = \overset{\circ}{99} \Rightarrow \overline{fg} + \overline{de} + \overline{bc} + a = \overset{0}{99}$

Ejemplo:

¿Es: $2935647 = \overset{0}{99}$?

Resolución

Separando grupos de 2 cifras de derecha a izquierda:

$47 + 56 + 93 + 2 = 198 = \overset{0}{99}$

$\Rightarrow$ El Nº es $\overset{0}{99}$

APLICACIÓN:

Hallar: a x b; si: $\overline{6a74b14} = \overset{\circ}{99}$

Resolución

Separando grupos de 2 cifras de derecha a izquierda:

$14 + \overline{4b} + \overline{a7} + 6 = \overset{\circ}{99}$

$14 +$ Unidad: b = 2

$\overline{4b}$ Decena: a = 3

$\overline{a7}$ $\therefore$ axb = 6

6

99

PROBLEMAS RESUELTOS

1. Hallar: a + b – c; si: $\overline{abc} = 45$ y $\overline{ca} = 8$

Resolución

$$\overline{abc} = \overset{\circ}{45} \begin{cases} \overset{\circ}{5} \\ \overset{\circ}{9} \end{cases}$$

Si: $\overline{abc} = \overset{\circ}{5} \Rightarrow$ c $\begin{cases} 0 \\ 5 \end{cases}$

Si: $\overline{ca} = \overset{\circ}{8} \Rightarrow c \neq 0 \Rightarrow c = 5$

Luego: $\overline{5a} = \overset{\circ}{8} \Rightarrow a = 6$

Si: $\overline{abc} = \overset{\circ}{9}$

$a + b + c = \overset{\circ}{9}$

$6 \quad 7 \quad 5$

$\therefore a + b - c = 8$

2. ¿Cuántos números capicúas de cuatro cifras son divisibles por 63?

Resolución

$$\overline{abba} = \overset{\circ}{63} \begin{cases} \overset{\circ}{7} \\ \overset{\circ}{9} \end{cases}$$

Si: $\overline{abba} = \overset{\circ}{7}$

1231

$- \quad +$

$a + 3b + 2b - a = \overset{\circ}{7}$

$5b = \overset{\circ}{7} \Rightarrow b \begin{cases} 0 \\ 7 \end{cases}$

$\overline{abba} = \overset{0}{9}$

$a + b + b + a = \overset{0}{9}$

$2(a + b) = \overset{0}{9}$

$a + b = \overset{0}{9}$

9	0
2	7

$\Rightarrow \overline{abba} \begin{cases} 9009 \\ 2772 \end{cases}$

$\therefore$ Hay 2 números.

3. ¿Cuál es la suma de las cifras que deben sustituir al 2 y al 3 en el número 52 103 para que sea divisible por 72?

Resolución

$$\overline{5a10b} = \overset{\circ}{72} \begin{cases} \overset{\circ}{8} \\ \overset{\circ}{9} \end{cases}$$

$$\overline{5a10b} = \overset{\circ}{8}$$

$$\underbrace{421}\ 4(1) + 2(0) + b = \overset{\circ}{8} \quad \Rightarrow \quad b = 4$$

Reemplazando:

$$\overline{5a10b} = \overset{\circ}{9}$$

$$5 + a + 1 + 0 + 4 = \overset{\circ}{9}$$

$$10 + a = \overset{\circ}{9} \quad \Rightarrow \quad a = 8$$

$$a + b = 12$$

4. ¿Cuántos valores puede tomar «a» si N es múltiplo de 9?

$$N = \overline{\underbrace{a23a23a23...}_{179\ \text{cifras}}}$$

Resolución

Agrupando: 179 cifras en grupos de 3.

179 cifras	3
2 cifras	59 grupos

Número $N = \overline{a23a23...a23a2}$

Aplicando divisibilidad por 9.

$$(a + 2 + 3)\,59 + a + 2 = \overset{\circ}{9} \quad \Rightarrow \quad 60a + 297 = \overset{\circ}{9}$$

$$(9 \times 6 + 6)\,a + 297 = \overset{\circ}{9}$$

$$\overset{\circ}{9} + 6a + \overset{\circ}{9} = \overset{\circ}{9} \quad \Rightarrow \quad 6a = \overset{\circ}{9}$$

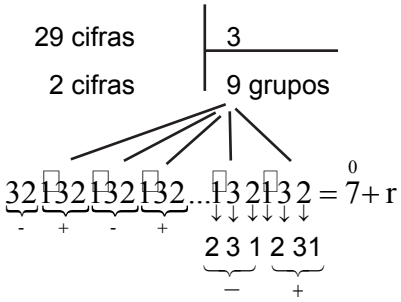
$$2a = \overset{\circ}{3} \quad \Rightarrow \quad a = \overset{\circ}{3}$$

$$\Rightarrow \quad a = 3, 6, 9$$

5. Hallar el resto de dividir:

$$\underbrace{312321321...}_{29\text{ cifras}} \div 7$$

Resolución



Hay 9 grupos completos (iguales). 5 positivos y 4 negativos. Se cancelan 4(+) con 4(-) quedando 1 grupo positivo y 2 cifras con (-).

Queda:

$$\begin{array}{l} 3\,2\,1\,3\,2 = \overset{\circ}{7} + r \\ \downarrow\downarrow\downarrow\downarrow\downarrow \\ \underbrace{3\,1}_{-}\ \underbrace{2\,3\,1}_{+} \end{array}$$

$$\Rightarrow \quad 2 + 9 + 2 - 2 - 9 = \overset{\circ}{7} + r$$

$$2 = \overset{\circ}{7} + r \quad \Rightarrow \quad r = 2$$

PROBLEMAS PROPUESTOS

1. ¿Cúal es la suma de las cifras que deben sustituir a 2 y 3 del número 52103 para que sea divisible por 72
   A) 12 B) 13 C) 14
   D) 15 E) 16
2. ¿En cuánto excede N = 4758 al mayor múltiplo de 9 contenido en N?
   A) 15 B) 33
   C) 6
   D) 8 E) 7
3. Se divide $\underbrace{888\cdots88}_{\text{"1994" cifras}}$ entre 7. hallar el residuo.
   A) 2 B) 1 C) 3
   D) 6 E) 4
4. Si: $\overline{4ab32} = \overset{\circ}{13} + 8$ hallar la suma de todos los valores de «b»
   A) 27 B) 30 C) 36
   D) 42 E) 33
5. Si: $\overline{abc3} = \overset{\circ}{7}$; $\overline{abc4} = \overset{\circ}{8}$ $\overline{abc5} = \overset{\circ}{9}$
   Hallar el mayor valor de (a+b+c)
   A) 21 B) 22 C) 20
   D) 19 E) 18
6. El número de la forma $\overline{ab1ba}$ es divisible entre 44. Hallar «a + b»
   A) 7 B) 10 C) 9
   D) 8 E) 6
7. Si: $\overline{abc} = \overset{\circ}{13}$; $\overline{acb} = \overset{\circ}{11}$ $\overline{bac} = \overset{\circ}{5}$
   Calcule: a.b + c
   A) 65 B) 68 C) 11
   D) 21 E) 2 ó 3
8. Cual es el valor de (x + y + z) si: $\overline{20x28yz} = \overset{\circ}{875}$
   A) 17 B) 18 C) 19
   D) 20 E) 21
9. Si: $\overline{xy6yz} = \overset{\circ}{1375}$ entonces $\overline{xyz}$ es divisible entre.
   A) 11 B) 13 C) 17
   D) 37 E) 39
10. Indicar el valor de «a», si $\overline{a3n2n}$ es divisible entre 104.
    A) 3 B) 6 C) 5
    D) 8 E) 7
11. Encontrar un número de cuatro cifras divisible por 5, 9 y 11, donde la primera y la última cifra son iguales. Indicar la suma de las cifras del número.
    A) 18 B) 20 C) 32
    D) 9 E) 37
12. Al dividir $\overline{abba}$ entre 77, el residuo fué 11. Hallar «b»
    A) 2 B) 4 C) 5
    D) 7 E) 3
13. Si $\overline{(a-2)(b+1)a(b-2)} = m28$
    Hallar el menor valor posible de (a + b)
    A) 8 B) 9 C) 10
    D) 11 E) 12
14. Si se cumple que:
    $\overline{(2a+3)a(b+3)8b} = m325 + 9$
    Calcular: «a + b»
    A) 2 B) 4 C) 6
    D) 8 E) 10

15. Si: C.A.($\overline{a(a-2)b(b+1)}$) = m36 calcular: el valor de (3a + 2b).
A) 29 B) 30 C) 31
D) 32 E) 33

16. Si: $\overline{aba}$ = m7 y $a^2 - b^2 = 56$ calcular $(a^3 - b^3)$
A) 560 B) 497 C) 427
D) 604 E) 357

17. ¿Cuántos numerales de 5 cifras que terminan en 44 son divisibles entre 9?
A) 98 B) 99 C) 100
D) 110 E) 120

18. Calcule el residuo por exceso de dividir $\overline{a4b7c}$ entre 7. Si: $\overline{2a3b8c2} = \overset{\circ}{7}+3$
A) 7 B) 5 C) 9
D) 8 E) 4

19. Encontrar el mayor número de la forma $\overline{a3b5c}$ tal que sea múltiplo de 396. dar como respuesta «a + b + c»
A) 120 B) 210 C) 180
D) 144 E) 128

20. Si el numeral: $\overline{abccba}$ es divisible por 7 y las cifra a, b y c son diferentes; halle el residuo que se obtiene al dividir:
$\overline{acacac\cdots}$ (70 cifras) entre 11.
A) 10 B) 9 C) 8
D) 7 E) 5

21. Hallar axbxcxd si:
$\overline{abcd}$ = 72(a + b + c + d)
A) 18 B) 128 C) 144
D) 168 E) 180

22. Hallar un número de 5 cifras que sea igual a 45 veces el producto de sus cifras. dar como respuesta la suma de sus dos primeras cifras.
A) 10 B) 12 C) 14
D) 16 E) 9

23. Sabiendo que: $\overline{4aa32n} = \overset{\circ}{99}$
Hallar: «a»
A) 2 B) 3 C) 4
D) 5 E) 6

24. Hallar (a - b); si: $\overline{abc} = \overset{\circ}{11}$, a + b + c = 17 y $\overline{ab}$ es el menor posible.
A) 2 B) 3 C) 4
D) 5 E) 6

25. Si: $\overline{1ababaha} = \overset{\circ}{143}$; el número de la forma $\overline{a0b}$ es siempre divisible por:
A) 12 B) 25 y 18 C) 12, 25 y 40
D) 18 E) 12 y 25

26. Sabiendo que: $\overline{aaabcabc} = \overset{\circ}{7}+6$; $\overline{2a4b} = \overset{\circ}{8}+7$; $\overline{abc4} = \overset{\circ}{9}+5$ calcular «a.b.c»
A) 60 B) 70 C) 30
D) 90 E) 10

27. Si se cumple que:
C.A($\overline{abc}$) = m25 y $\overline{bc} + \overline{cb} = \overset{\circ}{7}$
determinar la cifra de menor orden al expresar el numeral $\overline{abcabc}$ en el sistema heptal.
A) 2 B) 3 C) 4
D) 5 E) 0

28. hallar (a + b + c + d); si:

$\overline{abcd} = \overset{o}{9}+6$

$\overline{ab} + \overline{cd} = \overset{o}{8}+6$ y $\overline{ab} - \overline{cd} = \overset{o}{39}$

A) 25 B) 23 C) 24
D) 22 E) 21

29. hallar el numeral $\overline{cbecde}$ que es impar y múltiplo de 2475, sabiendo que (b > 5). Indicar la suma:
(b + c + d + e)

A) 22 B) 23 C) 24
D) 25 E) 26

30. ¿Cuántos números capícuas de 3 cifras son múltiplos de 11 de tal manera que su C.A. sea múltiplo de 7.

A) 0 B) 2 C) 1
D)4 E) 3

CLAVES

01. A	02. C	03. E	04. C	05. B	06. A	07. E	08. C	09. C	10. B
11. A	12. C	13. C	14. C	15. A	16. D	17. C	18. B	19. D	20. E
21. A	22. C	23. B	24. A	25. E	26. C	27. E	28. C	29. D	30. C

Números Primos y Compuestos

NÚMERO PRIMO ABSOLUTO
Es aquel número entero positivo, mayor que 1, que se divide sin resto sólo por la unidad y por sí mismo.

Ejemplos:

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, ...

NÚMERO COMPUESTO
Es aquel número entero positivo que admite divisores distintos de la unidad y de sí mismo.

Ejemplo:

		Divisores
4	➡	1, 2, 4
10	➡	1, 2, 5, 10

Observación
La unidad es el único número entero positivo que no es primo ni compuesto, pues tiene 1 solo divisor.

NÚMEROS PRIMOS ENTRE SÍ (PESI)
Son aquellos que admiten como único divisor común a la unidad.

Ejemplo:

		Divisores
6	➡	1, 2, 3, 6
15	➡	1, 3, 5, 15
20	➡	1, 2, 4, 5, 10, 20

* 6. 15 y 20 son números PESI, ya que su único divisor común es la unidad.
* 6 y 20 no son PESI, ya que tienen dos divisores comunes, la unidad y el dos.
* 15 y 20 no son PESI.

DESCOMPOSICIÓN CANÓNICA

Es la representación de un número mediante el producto indicado de potencias de exponente entero positivo, de los divisores primos del número.

La descomposición canónica de un número es única.

Ejemplo:

540	2
270	2
135	3
45	3
15	3
5	5
1	

$540 = 2^2 \times 3^3 \times 5$

En general, todo número compuesto «N» se puede expresar:

$$N = A^n \cdot B^m \cdot C^p \ldots$$

Donde:

A, B, C, ... son números primos absolutos y diferentes.

m, n, p, ... son números enteros positivos.

PRINCIPALES FÓMULAS

Dado el número «N» descompuesto canónicamente:

$$N = A^n \cdot B^m \cdot C^p \ldots\ldots\ldots\ldots M^k$$

Cantidad de divisores (C.D.)

$$C.D._N = (n+1)\,(m+1)\,(p+1) \ldots\ldots\ldots\ldots (K+1)$$

Ejemplo: $180 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5$

$$C.D._{180} = (2+1)\,(2+1)\,(1+1) = 18 \text{ divisores}$$

Suma de divisores (S.D.)

$$S.D._N = \frac{A^{n+1}-1}{A-1} \cdot \frac{B^{m+1}-1}{B-1} \cdot \frac{C^{p+1}-1}{C-1} \ldots\ldots\ldots \frac{M^{k+1}-1}{M-1}$$

Ejemplo: $180 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5$

$$S.D._{180} = \frac{2^3-1}{2-1} \cdot \frac{3^3-1}{3-1} \cdot \frac{5^2-1}{5-1} = 546$$

NOTA:

Total Divisores de un Número	=	Total Divisores Primos	+	Total Divisores Compuestos	+	Unidad

PROBLEMAS RESUELTOS

1. ¿Cuántos divisores tiene el número: $N = 12^4 . 15^3$?

Resolución

Descomponiendo canónicamente el número:

$$N = (2^2 . 3)^4 . (3 . 5)^3$$
$$= 2^8 . 3^4 . 3^3 . 5^3$$
$$= \underbrace{2^8.3^4.5^3}_{\text{Descomposición Canónica}}$$

Luego, la cantidad de divisores de N será:

$$CD(N) = (8 + 1)(7 + 1)(3 + 1)$$

$\therefore$ $D(N) = 288$

2. ¿Cuántos divisores primos tiene: $N = 1\,965\,600$

Resolución

Descomprimiendo canónicamente:

$$1\,965\,600 = 2^5 . 3^3 . 5^2 . 7^1 . 13^1$$

Entonces los divisores primos serán: 2; 3; 5; 7 y 13

$\therefore$ CD (Primos) = 5

3. Determinar la cantidad de divisores compuestos de: $N = 24^3 . 21^2$

Resolución

Todo número entero positivo tiene como divisor a la unidad, tiene divisores primos y también divisores compuestos, luego:

$$D(N) = 1 + D(\text{Primos}) + (\text{Compuestos}) \quad \ldots\ldots (I)$$

Descomponiendo canónicamente:

$$N = (2^3 . 3)^3 . (3 . 7)^2$$
$$= 2^9 . 3^3 . 3^2 . 7^2$$
$$= 2^9 . 3^5 . 7^2 \quad \leftarrow \text{Descomposición Canónica}$$

Luego: CD (N) = (9 + 1) (5 + 1) (2 + 1)

CD (N) = 180

Tiene como divisores primos a 2, 3 y 7

D (Primos) = 3

En (I): 180 = 1 + 3 + CD (Compuestos)

$\therefore$ CD (compuestos) = 176

4. Para el número 2160, determinar:
   (I) ¿Cuántos de sus divisores son múltiplos de 2?
   (II) ¿Cuántos de sus divisores son múltiplos de 3?
   (III) ¿Cuántos de sus divisores son múltiplos de 12?
   (IV) ¿Cuántos de sus divisores son múltiplos de 15?

Resolución

La descomposición canónica de 2160 es:

$2160 = 2^4 \cdot 3^3 \cdot 5^1$

Su cantidad total de divisores será:

CD (2160) = 5 . 4 . 2 = 60

(I) Para calcular la cantidad de divisores múltiplos de 2, se separa en la descomposición canónica de un factor 2:

$2160 = 2\,(2^3 \cdot 3^3 \cdot 5^1)$

De este modo los divisores múltiplos de 2 serán:

$CD\,(\overset{\circ}{2}) = 4 \cdot 4 \cdot 2 = 32$

(II) Si se desea calcular la cantidad de divisores múltiplos de 3, se separa en la descomposición canónica un factor 3:

$2160 = 2\,(\underbrace{2^4 \cdot 3^2 \cdot 5^1})$

$CD\,(\overset{\circ}{3}) = 5 \cdot 3 \cdot 2 = 30$

(III) La cantidad de divisores múltiplos de $12(2^2 \cdot 3)$ se calcula:

$2160 = 2^2 \cdot 3\ (\underbrace{2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^1})$

$CD\,(\overset{\circ}{12}) = 3 \cdot 3 \cdot 2 = 18$

(VI) Análogamente, la cantidad de divisores múltiplos de 15(3x5) será:

$2160 = 3 \cdot 5\ (\underbrace{2^4 \cdot 3^2})$

$CD\,(\overset{\circ}{15}) = 5 \cdot 3 = 15$

5. Determinar el valor de «n»; si el numero: $N = 15 \cdot 18^n$, tiene 144 divisores.

Resolución

Descomponiendo polinómicamente:

$$N = (3 \cdot 5) \cdot (2 \cdot 3^2)^n$$

$$= 3 \cdot 5 \cdot 2^n \cdot 3^{2n}$$

$$= \underbrace{2^n \cdot 3^{2n+1} \cdot 5^1}_{\text{Descomposición Canónica}}$$

Por dato sabemos que:

$$CD(N) = 144$$

Luego:

$$(n + 1)(2n + 2)(1 + 1) = 144$$

$$(n + 1)\, 2(n + 1)\, (2) = 144$$

$$(n + 1)^2 = 36$$

$$\therefore \quad n = 5$$

6. ¿Cuántos ceros hay que agregar a la derecha de 275 para que el número resultante tenga 70 divisores?

Resolución

Sea «n» el número de ceros agregados:

$$N = 275\underbrace{000....00}_{\text{“n”}}$$

Descomponiendo canónicamente:

$$N = 275 \cdot 10^n$$

$$N = 5^2 \cdot 11 \cdot (2 \cdot 5)^n$$

$$N = \underbrace{2^n \cdot 5^{n+2} \cdot 11}_{\text{Descomposición Canónica}}$$

Por dato se sabe que:

$$CD(N) = 70$$

$$(n + 1)(n + 3)(2) = 70$$

$$(n + 1)\,(n + 3) = \underbrace{35}_{5.7} \quad \Rightarrow \quad n = 4$$

PROBLEMAS PROPUESTOS

1. ¿Cuántos divisores tiene 103488?
   A) 24 B) 36 C) 48
   D) 72 E) 84

2. ¿Cuántos divisores tiene $E = 8X8^2X8^3X...X8^{32}$?
   A) 1580 B) 1581 C) 1583
   D) 1584 E) 1585

3. ¿Cuántos divisores impares tiene 42^3x99^2?
   A) 90 B) 92 C) 96
   D) 98 E) 99

4. Si 16^n tiene «m» divisores ¿Cuántos divisores tendrá 256^n?
   A) 4m + 1 B) 4m-1 C) 2m-1
   D) 2m+1 E) 4m

5. Sean $A = 2x15^k$ y $B = 30^k$; si la cantidad de divisores de B es 3 veces mas que la cantidad de divisores de A. ¿Cuantos divisores no primos tiene 10^{k+1}?
   A) 77 B) 78 C) 79
   D) 81 E) 87

6. Halle b si 12^bx18 tiene 126 divisores
   A) 8 B) 6 C) 11
   D) 5 E) 7

7. Calcule la suma de todos los números primos de la forma $\overline{nmn}_{(3)}$
   A) 32 B) 34 C) 36
   D) 38 E) 40

8. ¿Cuántos números menores que 180 son primos terminados en 9?
   A) 6 B) 7 C) 8
   D) 9 E) 10

9. Calcule P si $10^{P+3} + 10^p$ tiene 194 divisores compuestos.
   A) 1 B) 3 C) 4
   D) 5 E) 6

10. ¿Cuál es el menor número que multiplicado por si mismo tiene 75 divisores?
    A) 300 B) 450 C) 120
    D) 150 E) 180

11. Halle la suma de cifras del menor número que tenga 20 divisores.
    A) 9 B) 6 C) 11
    D) 12 E) 15

12. ¿Cuántos divisores m15 admite N = $54x45^3$?
    A) 50 B) 51 C) 52
    D) 54 E) 56

13. Si $a^{\alpha}xb^{\alpha+2}$ es la descomposición canonica de un numeral que tiene 15 divisores cuya suma es 403. halle «a + b»
    A) 5 B) 7 C) 8
    D) 9 E) 10

14. Indique por cuantas veces 60 hay que multiplicar 280 para que el resultado tenga 2592 divisores..
    A) 11 B) 9 C) 7
    D) 13 E) 17

15. Si $\overline{abc}$ es primo absoluto ¿Cuántos divisores tendrá N = $\overline{abcabc}$?
    A) 8 B) 16 C) 20
    D) 24 E) 30

16. ¿Cuántos números de 4 cifras, divisibles por 11 y que tengan 14 divisores existen?
A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 5

17. ¿Cuántos divisores tiene el menor número, cuya suma de cifras es 54?
A) 16 B) 24 C) 32
D) 48 E) 64

18. Halle «n» si la suma de los números de los divisores de $14x30^n$ y $21x15^n$ es 96.
A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 5

19. Si $M = 3x45^n$ tiene 207 divisores múltiplos de 3 mas que $P = 45x3^n$. Halle la suma de los divisores de «n»
A) 15 B) 16 C) 17
D) 18 E) 19

20. Si $M = 2x3^nx7^m$ tiene 40 divisores divisibles por 9 y 30 divisores pares. halle el producto «mxn»
A) 20 B) 21 C) 24
D) 26 E) 30

21. Si el número 455^a tiene 182 divisores m5 pero PESI con 7. ¿Cuántos divisores son m91?
A) 2366 B) 2484 C) 2532
D) 2664 E) 2748

22. Calcule «n» sabiendo que $N = 360x28^n$ tiene 252 divisores m105.
A) 6 B) 7 C) 8
D) 9 E) 10

23. ¿Cuántos números primos de la forma $\overline{n5n}$ existen si son menores que 500?
A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 5

24. Si $\overline{abc} - \overline{cba}$ tiene 24 divisores. halle «a + c»
A) 10 B) 21 C) 37
D) 27 E) 18

25. Si $N = \overline{1a}x\overline{1b}x\overline{1c}x\overline{1d}$ (descomposición canonica). ¿Cuántos divisores tiene (a+b+c+d)?
A) 7 B) 8 C) 9
D) 10 E) 11

26. la suma de 3 números primos absolutos es 66. Si la diferencia de los mayores es 18. Calcule el producto de los 3 números.
A) 1236 B) 1886 C) 1648
D) 1998 E) 1676

27. Halle la cantidad de divisores de n^n si se sabe que 15^nx35^n tiene 225 divisores.
A) 6 B) 7 C) 8
D) 9 E) 10

28. Sea $N = P(P-5)^3(P-4)$ una descomposición canonica. ¿Cuántos divisores tiene $2P^2$?
A) 4 B) 5 C) 6
D) 8 E) 9

29. Halle «a+b» en el número $N = 2^a x 7^b$ sabiendo que el cuadrado de N tiene 30 divisores mas, mientras que su raíz cuadrada tiene 9 divisores menos de lo que tiene N.
A) 3 B) 4 C) 5
D) 6 E) 7

30. Si los números $\overline{4a}$; 16 y 18 son PESI. halle la suma de valores de «a»
A) 18 B) 21 C) 23
D) 24 E) 25

CLAVES

01. E	02. E	03. C	04. C	05. B	06. B	07. C	08. D	09. C	10. E
11. B	12. D	13. A	14. C	15. B	16. A	17. E	18. B	19. D	20. A
21. A	22. B	23. B	24. A	25. B	26. B	27. D	28. C	29. D	30. E

UNIDAD 16

MCD y MCM

MÁXIMO COMÚN DIVISOR (MCD)
Es el mayor de los divisores comunes de varios números. Tambien se le conoce con el nombre de *prodivisor*.

Ejemplo:

Hallar el MCD de 18 y 30.

18 ➡ 1, 2, 3, 6, 9, 18

30 ➡ 1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30

Divisores comunes: 1, 2, 3, 6

El mayor es el MCD

Así: MCD(18, 30) = 6

MÍNIMO COMÚN MÚLTIPLO (MCM)
Es el menor de los múltiplos comunes de varios números; también se le conoce con el nombre de *promúltiplo*.

Ejemplo:

Hallar el MCM de 12 y 8.

12 ➡ 12, 24, 36, 48, 60, 72, ...

8 ➡ 8, 16, 24, 32, 40, 48, 56, ...

Múltiplos comunes: 24, 48, ...

El menor es el MCM

Así: MCM(12, 8) = 24

DETRMINACIÓN DEL MCD Y MCM

1. POR DESCOMPOSICIÓN CANÓNICA

Ejemplo:

Dados: $A = 2^4 . 3^5 . 5^2 . 7 . 13$
$B = 2^2 . 3 . 7^2 . 13 . 17$

MCD: Factores comunes al menor exponente.

MCM: Factores comunes y no comunes al mayor exponente.

Así: MCD(A, B) = $2^2 . 3 . 7 . 13$

MCM(A, B) = $2^4 . 3^5 . 5^2 . 7^2 . 13 . 17$

2. POR DESCOMPOSICIÓN SIMULTÁNEA

Ejemplo:

Hallar el MCD y mcm de 360 y 480

MCD: Factores comunes

MCM: Total de factores

Así:

360	– 480	2	} Factores comunes
180	– 240	2	
90	– 120	2	
45	– 60	3	
15	– 20	5	
3	– 4		

MCD = $2^3 . 3 . 5$

MCD = 60

Para MCM seguimos descomponiendo:

360	– 480	2	} Todos los factores:
.	– .	2	
.	– .	2	
.	– .	3	
.	– .	5	
3	– 4	3	
1	– 4	2	
1	– 2	2	
1	– 1		

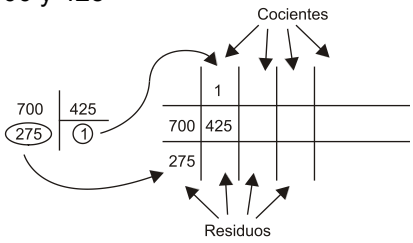
MCM = $2^5 . 3^2 . 5$

MCM = 1440

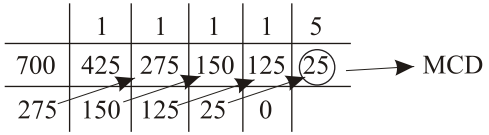
3. ALGORITMO DE EUCLIDES O DIVISIONES SUCESIVAS

Ejemplo:

Hallar el MCD de 700 y 425



Completando:



$\therefore$ MCD (700; 425) = 25

PROPIEDADES

1. Si: «A» y «B» son PESI: MCD(A, B) = 1
   MCM(A, B) = A.B

2. Dado: MCD (A, B, C) = d
   ➡ MCD(A.n, B.n, C.n) = d.n
   Así mismo: mcm (A, B, C) = m
   ➡ MCM(A.n, B.n, C.n) = m.n

3. Si: MCD (A, B, C) = d
   $\frac{A}{d} = p$; $\frac{B}{d} = q$; $\frac{C}{d} = r$ Siendo: «p», «q» y «r» PESI
   Entonces despejando: A = d . p
   B = d . q
   C = d . r

   Ejemplo: MCD(12, 16, 20) = 4

   Si: $\frac{12}{4} = 3$ $\frac{16}{4} = 4$ $\frac{20}{4} = 5$; 3, 4 y 5 son PESI.

   Tambien: 12 = 4(3)
   16 = 4(4)
   20 = 4(5)

4. Sólo para dos números: MCD(A, B) = d
   MCM(A, B) = m
   ➡ A.B =MCD . MCM = d.m

   Ejemplo:
   Dados los números: 12 y 15 ➡ { MCD = 3, MCM = 60
   ➡ 12 x 15 = 3 x 60

PROBLEMAS DE APLICACIÓN

1. Al dividir 1020 y 665 entre «n» los residuos respectivos fueron 12 y 17. ¿Cuál es el mayor valor de «n»?

Resolución

Según los datos:

$$\begin{array}{r|l} 1020 & n \\ \hline 12 & q_1 \end{array} \Rightarrow \quad 1020 = \overset{\circ}{n} + 12 \quad ; \quad 1008 = \overset{\circ}{n} \qquad .....(\alpha)$$

$$\begin{array}{r|l} 665 & n \\ \hline 17 & q_2 \end{array} \Rightarrow \quad 665 = \overset{\circ}{n} + 17 \quad ; \quad 648 = \overset{\circ}{n} \qquad .....(\beta)$$

De (α) y (β), «n» es divisor común de 1008 y 648. Si queremos que «n» sea el mayor posible, entonces:

n = MCD (1008; 648)

Calculando el MCD se obtiene:

MCD (1008; 648) = 72

$\therefore$ n = 72

2. El cociente de 2 números es 15. Si su MCD es 18, hallar el número mayor.

Resolución

$$\frac{A}{B} = 15 \; ; \qquad A > B$$

Se observa que A contiene exactamente a B, entonces A es múltiplo de B.

Propiedad: si: A es $\overset{\circ}{B} \rightarrow$ MCD es el número menor.

Luego: MCD = B y como:

MCD (A y B) = 18

Se deduce: B = 18; entonces:

A = 15.B $\Rightarrow$ A = 240

3. ¿Cuántas parejas de números cumplen que su MCD sea 9 y su suma sea 126?

Resolución

A + B = 126 .....(I) y MCD = d

Propiedad: $\begin{cases} A = d.p \\ B = d.q \end{cases}$ (p y q: son PESÍ)

Reemplazando y factorizando en (I):

d(p+q) = 126; reemplazando d = 9

9(p+q) = 126

➡ p + q = 14 (p y q: son PESÍ)

	↓	↓
1ra sol.	11	3
2da sol.	13	1
3ra sol.	9	5

Reemplazando:

1ra solución: A = 9.11 = 99

B = 9.3 = 27

2da solución: A = 9.13 = 117

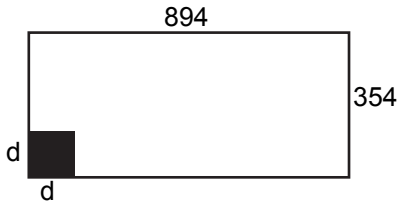
B = 9.1 = 9

3ra solución: A = 9.9 = 81

B = 9.5 = 45

4. Las dimensiones de un terreno rectangular son 894 y 354m. Se desea parcelarlo en terrenos cuadrados, de tal modo que no sobre nada y se obtenga el menor número de parcelas. ¿Cuántas parcelas cuadradas resultarán?

Resolución



«d» lado del terreno cuadrado que debe estar contenido en 894 y 354 (d es divisor) y para que haya el menor número de cuadrados, entonces el área del cuadrado debe ser la mayor posible; por lo tanto, «d» es lo mayor posible.

d = MCD (894 y 354)

d = 6 m ; entonces:

$$(\text{Nº de terrenos cuadrados}) = \frac{\text{Área del terreno}}{\text{área de parcela}}$$

$$\therefore \quad \text{Nº terrenos} = \frac{894.354}{6.6} = 8791$$

5. Si el MCD de 45A y 63B es 36, ¿cuál es el MCD de 25A y 35B?

Resolución

Por dato: MCD (45A; 63B) = 36

Dividiendo entre 9:

$$\text{MCD}\left(\frac{45A}{9};\frac{63B}{9}\right) = \frac{36}{9}$$

➡ MCD (5A; 7B) = 4

Multiplicando por 5:

MCD (5x5A; 5x7B) = 5x4

➡ MCD (25A; 35B) = 20

6. Hallar el menor número entero positivo que dividido entre 4, 5, 6, 7, y 8 deja siempre de resto 3.

Resolución

Llamando «N» al número pedido:

$N = \overset{\circ}{4} + 3 \quad \Rightarrow \quad N - 3 = \overset{\circ}{4}$

$N = \overset{\circ}{5} + 3 \quad \Rightarrow \quad N - 3 = \overset{\circ}{5}$

$N = \overset{\circ}{6} + 3 \quad \Rightarrow \quad N - 3 = \overset{\circ}{6}$

$N = \overset{\circ}{7} + 3 \quad \Rightarrow \quad N - 3 = \overset{\circ}{7}$

$N = \overset{\circ}{8} + 3 \quad \Rightarrow \quad N - 3 = \overset{\circ}{8}$

Luego, (N – 3) es un múltiplo común de 4, 5, 6, 7 y 8.

También (N – 3) debe ser lo menor posible, entonces:

$$N - 3 = \underbrace{MCM(4, 5, 6, 7, 8)}$$

$$\Rightarrow \quad N - 3 = 840 \qquad \therefore \quad N = 843$$

7. El número de páginas de un libro es mayor que 500 y menor que 600. Si se cuentan de 3 en 3, sobra 2; de 5 en 5, sobran 4; y de 7 en 7, sobran 6. ¿Cuántas páginas tiene el libro?

Resolución

$500 < N < 600$; N: # páginas.

$$N \begin{cases} \overset{\circ}{3} + 2 = \overset{\circ}{3} - 1 \\ \overset{\circ}{5} + 4 = \overset{\circ}{5} - 1 \\ \overset{\circ}{7} + 6 = \overset{\circ}{7} - 1 \end{cases}$$

$$N = \left(\overline{3;5;7}\right)^{\circ} - 1$$

$$N = \overset{\circ}{\overline{105}} - 1 \Rightarrow N = 105k - 1$$

N en el intervalo sólo: k = 5

$$N = 105(k) - 1 \Rightarrow N = 524$$

8. El producto y el cociente del MCM y MCD de 2 números son 1620 y 45, respectivamente. ¿Cuántos pares de números cumplen?

Resolución

$$\frac{MCM}{MCD} = 45 \Rightarrow MCM = 45\,MCD$$

$$MCM \times MCD = 1620 \quad .....(I)$$

$$45MCD \times MCD = 1620$$

$$MCD^2 = 36$$

$$MCD = 6$$

En (I):

$$MCM \times 6 = 1620 \Rightarrow MCM = 270$$

PROPIEDAD:

$$MCM = MCD \times p \times q$$

$$270 = 6 \times p \times q$$

$$45 = p \times q$$

$$\text{prop.} \begin{cases} A = MCD\ p \\ B = MCD\ q \end{cases}$$

(p y q: PESÍ)

	↓	↓
1º sol.:	9	5
2º sol.:	45	1

1ra SOLUCIÓN:

A = 6 x 9 = 54

B = 6 x 5 = 30

2da SOLUCIÓN:

A = 6 x 45 = 270

B = 6 x 1 = 6

Hay dos pares de números.

9. Tres ciclistas partieron al mismo tiempo y de la misma línea de una pista circular. En cada vuelta tardaron, respectivamente: 8, 10 y 12 segundos. ¿Cuántas vueltas habrán dado cada uno de los ciclistas cuando hayan pasado nuevamente, y a la vez, por la línea de partida?

Resolución

El 1ro pasa por el punto de partida cada 8 seg.
El 2do pasa por el punto de partida cada 10 seg.
El 3ro pasa por el punto de partida cada 12 seg.

Para que los 3 ciclistas pasen juntos por la línea de partida debe transcurrir un tiempo que contenga a 8; 10 y 12 seg.

Tiempo a transcurrir = MCM (8, 10, 12)

Tiempo a transcurrir = 120 seg

Luego cada ciclista da:

1ro ciclista: 120: 8 = 15 vueltas
2do ciclista: 120: 10 = 12 vueltas
3ro ciclista: 120: 12 = 10 vueltas

10. Hallar el valor de «n» en los números: $A = 12 \times 45^n$, y $B = 12^n \times 45$ para que el MCM tenga 90 divisores.

Resolución

Expresando A y B en sus factores primos:

$$A = 2^2 \cdot 3^{2n+1} \cdot 5^n$$

$$B = 2^{2n} \cdot 3^{n+2} \cdot 5$$

Recordar que el MCM se obtiene de los factores comunes y no comunes al mayor exponente.

➡ $MCM = 2^{2n} \cdot 3^{2n+1} \cdot 5^n$

$$Cd_{(MCM)} = (2n+1)(2n+2)(n+1)$$

$$= (2n+1)\,2(n+1)(n+1)$$

$$= (2n+1)(n+1)^2 = 45$$

$$= \underline{(2n+1)}\ \underline{(n+1)^2} = \underline{5} \cdot \underline{3^2}$$

$$(n+1)^2 = 9 \quad \Rightarrow \quad n = 2$$

$$2n + 1 = 5$$

PROBLEMAS PROPUESTOS

1. ¿Cuántos múltiplos comunes de 3 cifras tienen 36, 42 y 63?
   A) 8 B) 3 C) 5
   D) 7 E) 6

2. ¿Cuántos divisores comunes tienen $A = 12^3.15^2$ $B = 18^2.9^3.7$ $C = 3^6.4^2.5^3$
   A) 18 B) 32 C) 25
   D) 23 E) 24

3. Se tienen dos cortes de tela de 520cm de largo y 440m de ancho y de 280m de largo por 200m de ancho ¿Cuántos pañuelos cuadrados se podrán obtener en total sin que sobre tela?
   A) 178 B) 143 C) 184
   D)153 E) 136

4. Las edades de dos hermanos suman 84 años si el máximo común divisor de tales edades es 12 ¿Cuántos años tiene el mayor si ninguno de ellos tiene mas de 50 años?
   A) 19 B) 27 C) 36
   D) 48 E) 46

5. Al calcular el MCD de dos números primos por divisiones sucesivas se obtuvieron los siguientes cocientes: 2, 1, 2, 3 y 7, indicar el mayor de ellos.
   A) 283 B) 197 C) 211
   D) 120 E) 156

6. ¿Cuántos divisores comunes tienen A, B y C;
   si: $A = 10^3.4^2.5.7^2$ $B = 12^2.15^3.7^4$ y $C = 18^4.30^2.28^3$
   A) 45 B) 34 C) 29
   D) 17 E) 79

7. ¿Cuántos múltiplos comunes de tres cifras tienen 3, 6, y 8?
   A) 11 B) 37 C) 29
   D) 53 E) 41

8. Hallar la suma «a + b» si:
   $MCD(\overline{a4}, \overline{b(a+1)}) = 18$
   A) 9 B) 8 C) 7
   D) 2 E) 3

9. ¿Cuántas botellas cuya contenido de vino es el mayor posible? se necesitaran para envasar exactamente cuatro pipas de 72, 24, 56, 96 litros de vino.
   A) 16 B) 28 C) 31
   D) 46 E) 50

10. Hallar la suma dos números primos, sabiendo que los cocientes obtenidos para calcular su MCD por divisiones sucesivas fueron: 2, 3, 1, 2, 1 y 5.
    A) 192 B) 139 C) 475
    D) 281 E) 291

11. Si MCD(12A; 21B) = 120; MCD(21A; 12B) = 480 calcular el MCD(A, B)
    A) 12 B) 27 C) 18
    D) 9 E) 10

12. Si N < 900 y MCD(N, 1200) = 80. ¿Cuántos valores puede tener N?
    A) 10 B) 13 C) 14
    D) 16 E) 18

13. Si $A = 15.8^n$ y $B = 15^n.8$; Para que valor de «n>1» se cumple que el MCM(A, B) sea 40 veces el MCD (A, B)
    A) 2 B) 4 C) 6
    D) 8 E) 7

14. Al calcular el MCD de dos números A y B por divisiones sucesivas los cocientes obtenidos fueron 2, 1, 1, 3. Indicar el valor del mayor de ellos si MCD(A, B) = 8
A) 112 B) 204 C) 144
D) 228 E) 124

15. El MCD de dos números es 12 cual es el mínimo común múltiplo de tales números si su producto es 2160.
A) 112 B) 180 C) 225
D) 298 E) 362

16. ¿Cuántos divisores comunes múltiplos de 15 tienen A y B si MCD(A, B) = $12^2.5^3.7^4$
A) 120 B) 150 C) 180
D) 220 E) 110

17. Hallar la suma de dos números enteros A y B de tres cifras cada uno para los que se cumple:
MCD(A, B) = C.A.(A) y
MCM(A, B) = C.A. (B).
A) 1200 B) 1040 C) 1970
D) 1990 E) 1000

18. Si MCD(24A, 4B) = 12 y MCD(12B, 4C) = 12 calcular el MCD(18A,3B,C)
A) 7 B) 4 C) 8
D) 3 E) 5

19. Se vende dos lotes de zapatos por 7250 y 9750 soles respectivamente. Si los zapatos tienen el mismo precio y es el mayor posible ¿Cuántos zapatos se vendieron?
A) 28 B) 38 C) 48
D) 68 E) 58

20. Tres depósitos contienen la misma cantidad de vino y es la menor posible ¿Cuántos botellas de 18, 28 y 20 c.c. se necesitaran para envasarlos sin desperdiciar nada?
A) 160 B) 180 C) 178
D) 200 E) 300

21. La suma de dos números es 2080; determinar al mayor de ellos sabiendo que los cocientes obtenidos al calcular el MCD por el algoritmo euclidiano fueron: 3, 2, 1, 1 y 4.
A) 288 B) 966 C) 2184
D) 644 E) 1983

22. Determinar el menor número N de chocolates, que se puede repartir entre un grupo de niños sabiendo que: al darles 3, 4 ó 5 a cada uno siempre sobra un chocolate pero si les damos 7 no sobra nada.
A) 301 B) 271 C) 318
D) 229 E) 681

23. Tres automóviles compiten sobre una pista circular empleando 24, 40 y 56 minutos respectivamente en dar una vuelta. ¿Cuánto tiempo debe transcurrir? para que, partiendo juntos vuelvan a estar nuevamente en la línea de partida por primera vez.
A) 712 B) 650 C) 648
D) 722 E) 840

24. Estela tomo 4 pastillas el domingo 12 de octubre del 2008. se sabe que una pastilla debe tomarla cada 6 días, los otros cada 8, 10 y 12 días respectivamente. ¿Cuál será el próximo día que volverá a tomar las cuatro pastillas nuevamente?
A) Lunes 9/02/2009
B) Martes 14/01/2009
C) Jueves 18/03/2009
D) Sabado 9/02/2009
E) Viernes 9/01/2009

25. El MCM(A, B) = $\overline{a3n2n}$. Al calcular el MCD de A y B por divisiones sucesivas se obtuvieron los siguientes cocientes sucesivos: 3, 2, 5 y 3. hallar la suma de las cifras del mayor de ellos.
A) 15 B) 8 C) 90
D) 22 E) 11

26. Lupe trabaja 5 días y descansa el sexto, anita trabaja 4 días y descansa el quinto. Ambas comienzan a trabajar este lunes ¿Cuántos días trabajara cada uno para que descansen un domingo simultáneamente?
A) 175; 168 B) 168; 149
C) 104; 184 D) 149; 196
E) 185; 125

27. El producto de dos números enteros y positivos es 360. la suma de los cocientes obtenidos al dividir cada uno de ellos entre su MCD es 7. el producto de estos cocientes es 10. entonces ¿Cuál será el valor de la diferencia de estos números?
A) 13 B) 18 C) 15
D) 17 E) 21

28. La longitud de las ruedas posteriores de un triciclo es 12cm y de la rueda delantera es 18 cm. ¿Qué distancia habrá recorrido el triciclo para que las ruedas posteriores den 120 vueltas mas que las delanteras?
A) 2180cm B) 1985cm
C) 8640cm D) 7812cm
E) 8913cm

29. El MCD de dos números es 248 y el menor de ellos es 2976, sabiendo que el MCM(A,B) esta comprendido entre 59520 y 89500 ¿Cuántas soluciones hay para el mayor de dichos números?
A) 2 B) 4 C) 6
D) 3 E) 1

30. Si el MCD(A, B)=7; además :
$A^2 - B^2 = 5635$, hallar el valor de la suma «A + B»
A) 23 B) 5 C) 21
D) 32 E) 12

CLAVES

01. B	02. A	03. A	04. D	05. B	06. A	07. E	08. B	09. C	10. D
11. E	12. B	13. A	14. C	15. B	16. B	17. E	18. D	19. D	20. C
21. C	22. A	23. E	24. A	25. A	26. A	27. B	28. C	29. D	30. A