Capítulo

3 PRODUCTOS NOTABLES

MULTIPLICACIÓN ALGEBRAICA

Es la operación que tiene como objetivo determinar una expresión algebraica llamada producto, dadas otras expresiones algebraicas llamadas multiplicando y multiplicador, la igualdad obtenida es una identidad.

Ejemplo :

$$\underbrace{(x+2)}_{\text{multiplicando}}\ \underbrace{(2x+1)}_{\text{multiplicador}} \equiv \underbrace{2x^2+5x+2}_{\text{producto}}$$

multiplicando y multiplicador — identidad — producto

PRODUCTOS NOTABLES O IDENTIDADES ALGEBRAICAS

1. ***Binomio al cuadrado***
   - $(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$
   - $(a-b)^2 = a^2-2ab+b^2$

   Nota : $(a-b)^2 = (b-a)^2$ en general : $(a-b)^{2m} = (b-a)^{2m}$; $(m \in Z)$

2. ***Identidades de Legendre***
   - $(a+b)^2+(a-b)^2 = 2(a^2+b^2)$
   - $(a+b)^2-(a-b)^2 = 4ab$

3. ***Diferencia de cuadrados***

   $(a+b)(a-b) = a^2-b^2$

4. ***Binomio al cubo***
   - $(a+b)^3 = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$ **ó** $\underbrace{(a+b)^3 = a^3+b^3+3ab(a+b)}_{\text{Identidad de Cauchy}}$
   - $(a-b)^3 = a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$ **ó** $\underbrace{(a+b)^3 = a^3-b^3-3ab(a-b)}_{\text{Identidad de Cauchy}}$

5. ***Identidades de Steven***
   - $(x+a)(x+b) = x^2+(a+b)x+ab$
   - $(x+a)(x+b)(x+c) = x^3+(a+b+c)x^2+(ab+ac+bc)x+abc$

6. ***Suma y diferencia de cubos***
   - $(a+b)(a^2-ab+b^2) = a^3+b^3$
   - $(a-b)(a^2+ab+b^2) = a^3-b^3$

7. ***Trinomio al cuadrado***

$$(a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc$$

8. ***Trinomio al cubo***

$$(a+b+c)^3 = a^3+b^3+c^3+3a^2b+3a^2c+3b^2c+3b^2a+3c^2a+3c^2b+6abc$$

ó

$$(a+b+c)^3 = a^3+b^3+c^3+3(a+b)(a+c)(b+c)$$

IDENTIDADES ADICIONALES

1. ***Identidad de Argan'd***

$$(a^{2n}+a^nb^m+b^{2m})(a^{2n}-a^nb^m+b^{2m}) = a^{4n}+a^{2n}b^{2m}+b^{4m}$$

* Caso particular : $(x^2+x+1)(x^2-x+1) = x^4+x^2+1$

2. ***Identidades de Lagrange***

- $(a^2+b^2)(x^2+y^2) = (ax+by)^2+(ay-bx)^2$
- $(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2) = (ax+by+cz)^2+(ay-bx)^2+(az-cx)^2+(bz-cy)^2$

3. ***Identidad de Gauss***

- $(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc) = a^3+b^3+c^3-3abc$

  de donde :
- $\frac{1}{2}(a+b+c)[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2] = a^3+b^3+c^3-3abc$

4. ***Otras identidades*** :

- $(a+b+c)(ab+ac+bc) = (a+b)(a+c)(b+c)+abc$
- $(a+b)^4-(a-b)^4 = 8ab(a^2+b^2)$
- $(ab+ac+bc)^2 = a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2+2abc(a+b+c)$

Algunas Relaciones Condicionadas :

I. Si : $a+b+c=0$

1. $a^2+b^2+c^2 = -2(ab+ac+bc)$
2. $a^3+b^3+c^3 = 3abc$
3. $a^4+b^4+c^4 = \frac{1}{2}(a^2+b^2+c^2)^2$
4. $a^5+b^5+c^5 = -5abc(ab+ac+bc)$

II. Si : $x;y;z \in R / x^2+y^2+z^2 = xy+yz+zx$,
entonces : $x = y = z$.

II. Si : $x;y;z \in R \wedge m;n;p \in Z^+ / x^{2m}+y^{2m}+z^{2p} = 0$,
entonces : $x = 0, y = 0, z = 0$.

EJERCICIOS PROPUESTOS

01. Si : $x^3+y^3=20;\ xy=5$

Calcular :

$$M=(x+y)^3-15(x+y)+15$$

a) 40 b) 35 c) 20
d) 30 e) 15

02. Efectuar :

$$(a+b)(a-b)(a^2+b^2)+(b^4+a^4)$$

a) $2a^2$ b) $2b^2$ c) $2a^4$
d) $2b^4$ e) 0

03. Si : $x+y=4$; calcular :

$$E=\frac{x^3+y^3-64}{x^2+y^2-16}$$

a) 6 b) -4 c) -3
d) -6 e) 2

04. Si : $a+b=\sqrt{5}$ y $a.b=3$.

Entonces $(a-b)^2$ es :

a) 6 b) -7 c) -9
d) 12 e) 10

05. Si : $x+\frac{1}{x}=4$

Hallar : $(x^2+x^{-2})(x^3+x^{-3})$

a) 243 b) 240 c) 728
d) 120 e) 3

06. Sabiendo que : $x+\frac{1}{x}=3$; determinar el valor de :

$$E=x^3+x^2+\frac{1}{x^3}+\frac{1}{x^2}$$

a) 49 b) 36 c) 25
d) 18 e) 23

07. Determine :

$$x^2+\frac{1}{x^2};\ \text{si : } x+\frac{1}{x}=a$$

a) (a-2)(a+2) b) $a^2-\sqrt{2}$
c) $(a-\sqrt{2})(a+\sqrt{2})$ d) $(a-\sqrt{2})(a+2)$
e) a^2+2

08. Si :

$\left(a+\frac{1}{a}\right)^2=3$, entonces $a^3+\frac{1}{a^3}$ es :

a) 27 b) 6 c) 12
d) 4,3758 e) 0

09. Hallar el V.N. de :

$$E=(m^{-3}+n^{-3})^{-1}$$

Si : $mn=2$ y $m+n=2\sqrt{2}$.

a) 2 b) 1 c) $\sqrt{2}$
d) 3 e) 4

10. Si :

$$\frac{x}{y}+\frac{y}{x}=167;\ x>0;\ y>0$$

Calcular :

$$E=\left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{1}{2}}+\left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{1}{2}}$$

a) 12 b) 13 c) $\sqrt{167}$
d) $\sqrt{3}$ e) 11

11. Si : $(x+y)^2=2(x^2+y^2)$, el valor de :

$$E=\frac{3x^3-y^3}{x^2y}+\frac{3x+2y}{5x}+\frac{6y}{2x+y}\ \text{es :}$$

a) 3 b) 4 c) 5
d) 6 e) 2

12. Calcular :

$$V=\frac{x^2+y^2}{xy}+\frac{x+2y}{2x}+\frac{2y}{x+3y}$$

si : $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{4}{x+y}$

a) 2 b) 3 c) 1
d) 4 e) 6

13. Calcular :

$$\sqrt[3]{x^2\sqrt{x}+\sqrt{x^5+27}}\ \sqrt[3]{x^2\sqrt{x}-\sqrt{x^5+27}}$$

a) x - 3 b) 3 c) x
d) -3 e) $\sqrt[3]{x^5}$

14. Calcular :

$$(a+b)(a^2-ab+b^2)+(a-b)(a^2+ab+b^2)+3a^3$$

a) $4a^3$ b) $4b^3$ c) $5a^3$
d) $2b^3$ e) b^3

15. La expresión simplificada de :

$$(a^b+a^{-b})(a^b-a^{-b})(a^{4b}+1+a^{-4b}) \text{ es :}$$

a) $(a^b-a^{-b})^6$ b) $(a^b-a^{-b})^6$
c) $a^{-6b}-a^{6b}$ d) $a^{6b}-a^{-6b}$
e) $a^{6b}+a^{-6b}$

16. Hallar el V.N. de :

$$E=(a+b)^2+(a+c)^2+(b+c)^2-(a+b+c)^2$$

para :

$$a=\sqrt{\sqrt{5}+3};\ b=\sqrt{\sqrt{5}+7};\ c=\sqrt{40-2\sqrt{5}}$$

a) 0 b) 10 c) 47
d) 50 e) 40

17. Sabiendo que : $x+y+z=1$
Calcular :

$$M=\frac{x^3+y^3+z^3-1}{xy+yz+zx-xyz}$$

a) 1 b) -1 c) -3
d) 3 e) 2

18. Si : $x+y+z=3$
$xy+yz+xz=0$
Calcular :

$$\sqrt[3]{x^3+y^3+z^3-3xyz}$$

a) 3 b) 2 c) -2
d) -1 e) 1

19. Calcular el producto abc, sabiendo que :

$a+b+c=15$; $a^2+b^2+c^2=93$

$a^3+b^3+c^3=645$

a) No se puede determinar.
b) 80 c) 70
d) 60 e) 75

20. Sabiendo que : $F_{(x)}=a^x+b^x+c^x$.

Calcular : abc, además : $F_{(n)}=n$; $n\varepsilon\{1, 2, 3\}$

a) 4^{-1} b) 2^{-1} c) 3^{-1}
d) 6^{-1} e) 5^{-1}

21. Sabiendo que :

$a^3+b^3+c^3=3$

$a^2+b^2+c^2=2$

Calcular :

$$E=\frac{(a+b+c)(2-ab-ac-bc)}{1-abc}$$

a) 1/3 b) 3 c) 2
d) 1/2 e) 1

22. Evaluar :

$$\sqrt[16]{3.5.17.257+1}$$

a) 2 b) 4 c) 8
d) 16 e) 32

23. Si :

$a=\sqrt[4]{8}+\sqrt[4]{2}$

$b=\sqrt[4]{8}-\sqrt[4]{2}$

Calcular : $\frac{a}{b}-\frac{b}{a}$

a) 4 b) $\sqrt{2}$ c) 2
d) $2\sqrt{2}$ e) $4\sqrt{2}$

24. Si : $\sqrt{m^2+n^2}+\sqrt{m^2-n^2}=n^2$
Calcular :

$$R=\sqrt{m^2+n^2}-\sqrt{m^2-n^2}$$

a) 2 b) n^2 c) 1
d) m^2 e) 0

25. Si :

$$\frac{mn+n^2}{3n-m}=\sqrt[n]{\sqrt{n^n}+\sqrt{n^n-m^n}}\ \sqrt[n]{\sqrt{n^n}-\sqrt{n^n-m^n}}$$

Calcular el valor de :

$$\frac{mn+m^2}{mn+n^2}+\frac{m^5-n^5}{m^2+m^3}$$

a) 1 b) 0 c) m + n
c) n^2 e) n - 1

26. Reducir :

$$K = (m+4)^3 - (m+3)(m+4)(m+5)$$

a) m^2 b) m c) $m+3$
d) $m+4$ e) $m+8$

27. Determinar el valor numérico de :

$$(\frac{y}{x})(\frac{x-1}{y-1}) + (\frac{y+1}{x+1})(\frac{x}{y})$$

Siendo : $x = \sqrt[4]{9} + \sqrt{2}$; $y = \sqrt{3} - \sqrt[4]{4}$

a) 1 b) -1 c) 2
d) -2 e) $2\sqrt{2}$

28. Si : $a + b + c = 0$, reducir :

$$M = \frac{a^2+b^2-c^2}{a} + \frac{b^2+c^2-a^2}{b} + \frac{c^2+a^2-b^2}{c}$$

a) 1 b) 0 c) 3
d) -1 e) 2

29. Si se tiene como suma "s" y producto "p" de dos cantidades x, y, entonces :

$$\left(\frac{x^2+y^2}{2}\right)^2 \text{ es igual a :}$$

a) $(s+p)^2 - (s+p)^2$

b) $s^4 + 2ps^2 - 3p^2s + p^4$

c) $s^4 + ps(1-s) + \frac{3}{2}p^2$

d) $s^4 - ps + \frac{3}{2}p^2$

e) $0,25s^4 - ps^2 + p^2$

30. Sabiendo que :

$$x = \frac{2}{n}(a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n)$$

$$n = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + ... + a_n^2$$

Calcular :

$$(x-a_1)^2 + (x-a_2)^2 + (x-a_3)^2 + ... + (x-a_n)^2$$

a) 0 b) n c) n^2
d) n - 1 e) $(n-1)^2$

31. Sean "a" y "b" números reales positivos, tales que :

$a^2 + b^2 = 13$ y $b.a = 13(\pi)^{-1}$

Simplificar la expresión :

$$13\left[\frac{a^{x+1} + ba^x}{a^{3+x} + b^3a^x}\right]$$

a) $\frac{\pi}{\pi+5}$ b) π c) $\frac{\pi}{\pi-1}$

d) $\frac{\pi}{\pi+2}$ e) $\frac{\pi}{2(\pi-1)}$

32. Si :

$$(a+b+c)^2 = 3(ab+bc+ac);\ a,b,c \varepsilon \boldsymbol{R}$$

Calcular :

$$A = \frac{bc}{ab+ac} - \frac{ac}{ab+bc} + \frac{ab}{ac+bc}$$

a) 2 b) 1/2 c) 3
d) 1 e) 0

33. Si : $x + y + z = 6$, calcular :

$$\frac{(x-1)^3 + (y-2)^3 + (z-3)^3}{(x-1)(y-2)(z-3)}$$

a) 1 b) 2 c) 3
d) 4 e) 6

34. Hallar el valor numérico de :

$$(a+b)[(a+b)^2 - 2ba + (a-b)^2] - 2b^3$$

para : $a = \sqrt[3]{3}$; $b = 2\sqrt[3]{3} - \sqrt{2} + 1$

a) 4 b) 5 c) 6
d) 7 e) 8

35. Dado :

$$M^3 = 2(a+b)[(a+b)^2 - 2ab + (a-b)^2] + (a-b)$$

$$[(a+b)^2 + 4(a^2+b^2) - (a-b)^2]$$

Hallar el valor de "M".

a) 2a b) 2b c) -2ab
d) $8a^3$ e) $8b^3$

36. Dado el polinomio :

$$P_{(x)} = (x^2-1)(x^2-x+1)(x^2+x+1)$$

obtener :

$$P(\sqrt{4+\sqrt{15}} - \sqrt{4-\sqrt{15}})$$

a) 0 b) 217 c) 216
d) 215 e) 218

37. El valor numérico de :

$$\sqrt[3]{(x^3+3x)^2-(3x^2+1)^2};$$

para : x = 999es:

a) 19 990 b) 991 000 c) 100 000
d) 999 000 e) 998 000

38. Si : $n=\sqrt[3]{\sqrt{2}-1}-\sqrt[3]{\frac{1}{\sqrt{2}-1}}$

Calcular : $R = n^3+3n+2$

a) $\sqrt{3}$ b) $\sqrt{2}$ c) 0
d) 2 e) 1

39. Si : $x=\sqrt[3]{a(a+2b)+b^2}-\sqrt[3]{a(a-2b)+b^2}$

Donde : $a^2-b^2=1$

Calcular : $\frac{(x-1)(x^2+x+4)}{ab-1}$

a) 1 b) 2 c) 3
d) 4 e) 5

40. Sabiendo que : $x+2=23\sqrt{2x}$, calcular el valor de :

$$E=\frac{\sqrt{\sqrt{x}+\sqrt{2}}}{\sqrt[8]{2x}}$$

a) 3 b) 4 c) $\sqrt{8}$
d) $\sqrt{5}$ e) 5

41. Si : $ab(a+b)=1$

$a^2b^2(a^2+b^2)=2$

Hallar : $a^3b^3(a^3+b^3)$.

a) 3 b) 2,5 c) 5
d) 4 e) 4,5

42. Si : $b^3-1=0;\quad b\neq 1$

Obtener : $\frac{1+b^5}{b^4}$.

a) 0 b) 1 c) -1
d) 2 e) -2

43. Si se cumple : $x^2+x+1=0$, hallar :

$$x^{31}+x^{-10}$$

a) 2 b) 1 c) -1
d) 3 e) -10

44. Sabiendo que :

$$(x+y)^2+1=(x+1)(y+1)$$

Calcular :

$$K=\frac{x^2(x-1)}{y^2(y-1)}$$

a) 2 b) 1 c) 1/2
d) -1 e) -1/2

45. Si : $a^{-1}+b^{-1}+c^{-1}=C$, calcular :

$$R=\frac{(ab)^4+(ac)^4+(bc)^4}{a^2b^2c^2(a^2+b^2+c^2)}$$

a) 2 b) 6 c) 18
d) 4 e) 3

46. Siendo : x, y, z ε R, tales que :

$$x^2+y^2+z^2=2(x+2y+3z)-14$$

Calcular :

$$M=\frac{(x+y+z)(xyz)}{x^3+y^3+z^3}$$

a) 3 b) 4 c) 1
d) -1 e) 2

47. Si : a+b+c = 0, hallar el valor de "x".

$$a^2\left(\frac{x}{bc}-1\right)+b^2\left(\frac{x}{ac}-1\right)+c^2\left(\frac{x}{ab}-1\right)=5abc(a^{-1}+b^{-1}+c^{-1})$$

a) a+b+c b) ab+bc+ca
c) $a^2+b^2+c^2$ d) 3abc
e) $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$

48. Si :

$$a+b+c=a^{-1}bc+b^{-1}ca+c^{-1}ab$$

Calcular :

$$\frac{a^3+b^3+c^3-3abc}{a+b+c}$$

a) 0 b) 1/3 c) 2/3
d) 1 e) -1

49. Si : $a^4+b^4=47 \wedge ab=1$, reducir :

$$N=\sqrt{a^6+b^6+2}$$

a) 3 b) 14 c) 20
d) 10 e) 18

50. Hallar el valor de "E":

$$E = (x+y+z)^3 - 3z\cdot(x+y+z)(x+y) - (x+y)^3$$

a) x^3 b) y^3 c) $3z$
d) 0 e) z^3

51. Si: $H = \sqrt{(x-5)(x+6)(x-1)(x+2)+196}$

Hallar: $R = \sqrt{H+16,25}$

a) $2x+1$ b) $\frac{x+1}{2}$ c) $x+2$
d) $\frac{2x+1}{2}$ e) $2x-1$

52. Si: $(xy^{-1}+1)(yz^{-1}+1)(zx^{-1}+1) = 8$

Calcular: $R = \sqrt{(x+y+z)(x^{-1}+y^{-1}+z^{-1})}$

a) $\sqrt{2}$ b) 3 c) 2
d) 4 e) 1

53. Si: $P_{(x)} = a^x + b^x$, $a^6 + b^6 = 1$, entonces:

$$\left[\frac{P_{(4)} - P_{(10)}}{P_{(2)}}\right]^{\frac{1}{2}}$$

es equivalente a:

a) a^4b^4 b) ab c) $4a^2b^2$
d) $2a^4b^4$ e) a^2b^2

54. Evaluar:

$$E = 4ab\,(3a^2+b^2)(a^2+3b^2)$$

Para:

$$a = \frac{\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{2}}{2};\quad b = \frac{\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{2}}{2}$$

a) 2 b) 3 c) -3
d) -4 e) 5

55. Calcular el V.N. de:

$$R = \frac{x+y}{z} + \frac{y+z}{x} + \frac{x+z}{y} - xy - xz - yz$$

Donde:

$x^3+y^3+z^3 = 4xyz$

$x^2+y^2+z^2 = xy+xz+yz+1$

a) 0 b) 1 c) -1
d) 3 e) -3

56. Siendo:

$a+b+c = m$

$a^2+b^2+c^2 = 3m^2$

$a^3+b^3+c^3 = 7m^3$

Calcular:

$$S = (a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)$$

a) $-13m^3$ b) $6m^3$ c) $2m^3$
d) $-m^3$ e) $7m^3$

57. Si: $\sqrt{\frac{a}{b}} + \sqrt{\frac{a}{b}}^{-1} = 7$

Calcular: $R = \sqrt[8]{\frac{a}{b}} - \sqrt[8]{\frac{a}{b}}^{-1}$

a) 2 b) 3 c) 5
d) 4 e) 1

58. Si se cumple:

$$\left(\frac{x}{y}\right)^n + \left(\frac{y}{x}\right)^n = 62$$

Entonces el valor numérico de:

$$\sqrt[3]{\frac{x^n+y^n}{\sqrt{x^ny^n}}}$$

a) 4 b) 8 c) 16
d) 2 e) 1

59. Sabiendo que: $x^2 = 5x+1$
Obtener:

$$A = \frac{(x^3-140)\sqrt[3]{x^{11}}}{\sqrt[3]{x^4+1}}$$

a) 1 b) 2 c) 1/2
d) 3 e) 1/3

60. Si:

$a+b+c = \sqrt{5}+\sqrt{2}$

$a^{-1}+b^{-1}+c^{-1} = \sqrt{5}-\sqrt{2}$

$a^2+b^2+c^2 = \sqrt{2}+\sqrt{5}$

Calcular: $a^3+b^3+c^3$.

a) $4+\sqrt{10}$ b) $7+2\sqrt{10}$
c) $5-\sqrt{10}$ d) $\sqrt{5}-\sqrt{2}$
e) $\sqrt{5}+\sqrt{2}$

Claves

01.	b
02.	c
03.	a
04.	b
05.	c
06.	c
07.	c
08.	e
09.	c
10.	b
11.	c
12.	d
13.	d
14.	c
15.	d
16.	d
17.	d
18.	a
19.	b
20.	d
21.	b
22.	a
23.	e
24.	a
25.	a
26.	d
27.	e
28.	b
29.	e
30.	b

31.	c
32.	b
33.	c
34.	c
35.	a
36.	d
37.	e
38.	c
39.	d
40.	d
41.	b
42.	c
43.	c
44.	b
45.	a
46.	c
47.	b
48.	a
49.	e
50.	e
51.	d
52.	b
53.	e
54.	e
55.	e
56.	a
57.	e
58.	d
59.	e
60.	b