Capítulo

2 POLINOMIOS

NOTACIÓN DE EXPRESIONES ALGEBRAICAS

Se utiliza para indicar las variables de una expresión.

Ejemplos :

* $\underbrace{P(x)}_{\text{"P" de x}} \Rightarrow$ variable : "x".

* $\underbrace{F(x;y)}_{\text{"F" de xy}} \Rightarrow$ variables : x, y.

* $\underbrace{Q(x;y;z)}_{\text{"Q" de xyz}} = ax+by+cz \begin{cases} \text{variables} \rightarrow x;\ y;\ z \\ \text{constantes} \rightarrow a;\ b;\ c \end{cases}$

VALOR NUMÉRICO (V.N.)

Es el resultado que se obtiene al reemplazar las variables de una expresión algebraica por valores determinados.

Ejemplo :

1. ***Determinar el V.N. de la siguiente expresión :***

   $P(x;y;z) = x^2 + 3yz$ ***para : x = 5; y = -2; z = 3***

   Reemplazando :

   $P(5;\ -2;\ 3) = 5^2 + 3(-2)(3) = 7$

2. ***Determinar P(3), si :***

   $P(x) = x^3 + 2x - 10$

   En este caso, se pide el V.N. de P(x) para :
   x = 3.

   $P(3) = 3^3 + 2(3) - 10$

   $P(3) = 23$

3. ***Determinar P(5), si :***

   $P(x+7) = 2x^3 + 5x - 1$

   Para este caso, se resuelve la ecuación :
   x + 7 = 5; de donde : x = -2

   Al reemplazar :

$$P(-2+7) = 2(-2)^3 + 5(-2) - 1 = -16 - 10 - 1$$

$$P(5) = -27$$

PROPIEDADES : para un polinomio P(x).

1. Suma de coeficientes = P(1).

2. Término independiente = P(0).

CAMBIO DE VARIABLE

Así como las variables pueden reemplazarse por números, también pueden ser reemplazadas por otros polinomios, así tenemos:

1. ***Dado : P(x) = 2x+ 11 . Obtener P(x+ 7)***
   Para obtener lo pedido, se reemplaza :
   x por x + 7 en P(x).

$$\underbrace{P(x)}_{\downarrow x+7} = 2\underbrace{x}_{\downarrow x+7} + 11$$

$$P(x+7) = 2(x+7) + 11$$
$$P(x+7) = 2x + 25$$

2. ***Dado : P(x+ 3) = 3x + 4***
   Determinar : P(2x - 5).

   Se reemplaza (x + 3) por (2x - 5) previa preparación del polinomio como :

   P(x+ 3) = 3(x + 3 - 3)+ 4

   Ahora : P(2x-5) = 3(2x-5-3)+ 4
   Luego : P(2x-5) = 6x - 20

POLINOMO

Es toda expresión algebraica racional y entera. Cuando tiene un término se denomina <u>monomio</u>, con dos se denomina <u>binomio</u>, con tres <u>trinomio</u>, etc.

Recordemos que en una expresión Algebraica Racional entera :

Ninguna variable está afectada por algún signo radical o exponente fraccionario.

Ninguna variable se encuentra en el denominador.

Ejemplo :

$P(x;y) = 3x^2 + 7y + 5$ polinomio (trinomio).

$P(x;y;z) = 2\sqrt{x} + 2y - z$ no es polinomio.

GRADO :

Es la categoría que se asigna a un polinomio; y depende de los exponentes de sus variables.

GRADOS DE UN MONOMIO :

Grado Absoluto : es la suma de los exponentes de sus ***variables***.

Grado Relativo : es el exponente de la ***variable*** en referencia.

Ejemplo : $P(x;y) = 2a^3x^4y^5$

G. A. = 5 + 4
G.R. (x) = 4
G.R. (y) = 5

GRADOS DE UN POLINOMIO DE DOS Ó MÁS TÉRMINOS :

Grado Absoluto : es el mayor grado absoluto de uno de sus monomios.

Grado Relativo : es el mayor exponente de la variable en referencia.

Ejemplo :

$$P(x;y) = \underbrace{2x^3y}_{4} + \underbrace{7x^4y^{\overset{\text{mayor}}{5}}}_{9} - \underbrace{6x^{\overset{\text{mayor}}{6}}y^2}_{8}$$

Grados →

G.A. = 9
G.R. (x) = 6
G.R. (y) = 5

POLINOMIOS IDÉNTICOS

Dos polinomios son idénticos si sus términos semejantes tienen igual coeficiente, así pues :

$P(x) = ax^3 + bx + c$

$Q(x) = mx^3 + nx + p$

son idénticos, si : a = m; b = n ; c = p.

Propiedad : dos polinomios idénticos tienen el mismo valor numérico para cada sistema de valores asignados a sus variables.

POLINOMIOS ESPECIALES

1. ***Polinomio Homogéneo*** : cuando sus términos son de igual grado absoluto.

   Ejemplo :

   $$P(x;y) = \underbrace{2x^4y^3}_{7} - \underbrace{x^5y^2}_{7} + \underbrace{5x^6y}_{7}$$

   Homogéneo de grado 7.

2. ***Polinomio Completo*** : cuando tiene todos los exponentes de la variable en referencia, desde el mayor hasta el cero incluido.

   Ejemplo :

   $$P(x;y) = 2x^{\overset{\text{"x" tiene exponente "1"}}{1}}y^3 + 7x^2y^4 - 5y^{\overset{\text{"x" tiene exponente cero}}{0}}$$

   completo con respecto a "x" .

   Propiedad : para un polinomio completo P(x).

términos = Grado + 1

3. ***Polinomio Ordenado*** : es aquel cuyos exponentes de la variable en referencia (ordenatriz) van aumentado (orden creciente) o disminuyendo (orden decreciente).

   Ejemplo :

   $$P(x;y) = 4x^4y^{\overset{\text{aumenta}}{3}} + 6x^7y^9 + 5xy^{20}$$

   ordenado ascendentemente respecto a "y".

POLINOMIO IDÉNTICAMENTE NULO

Es aquel polinomio cuyos términos presentan coeficientes iguales a cero, como por ejemplo :

$P(x) \equiv ax^3 + bx^2 + c$

será idénticamente nulo, si :

a = 0; b = 0; c = 0.

Propiedad : todo polinomio idénticamente nulo tiene valor numérico igual a cero para cualquier sistema de valores asignados a sus variables.

EJERCICIOS PROPUESTOS

01. Hallar : P[P(3)]. Si : $P(x) = 2x - 5$.

a) 1 b) 3 c) -3
d) -1 e) 5

02. Si se cumple : $P_{(x)} - P_{(x-1)} = x$
para algún polinomio no constante.
Calcular : $P_{(4)} - P_{(0)}$.

a) 9 b) 10 c) 20
d) 0 e) 15

03. Sean los polinomios :

$$P(x) = ax + b \ \wedge \ Q(x) = bx + a$$

siendo : $(a \neq b)$. Además :

$$P(Q(x)) \equiv Q(P(x))$$

Hallar : $P_{(Q(1))}$.

a) b b) a c) 1
d) -b e) ab

04. Dado el polinomio :

$$P(x;y) = 4m^n x^{2m+3n} y^{5n-m}$$

Si : GA(P) = 10 $\wedge$ GR(x) = 7.

Calcular su coeficiente.

a) 5 b) 64 c) 16
d) 8 e) 2

05. Dado el polinomio :
$P(x, y) = 7x^2y^{m+3} + 4x^5y^{m-4} + 3x^4y^{m+5} + x^6y^{m-2}$
Si : GR(x) + GR(y) + G.A. = 32.
Entoces el valor de "m" es :

a) 4 b) 5 c) 6
d) 7 e) 8

06. Si el polinomio :

$$R(x;y;z) = x^{a^b} + x^7y^{b^a} + x^{20}z^{12}$$

es homogéneo. Calcular : $(a-b)^2$.

a) 16 b) 9 c) 5
d) 3 e) 1

07. Determinar cuál es la suma de los coeficientes "m" y "n", de modo que para cualquier valor de "x", se cumple:

$$7 - x \equiv m(x-1) + n(x+2)$$

a) -1 b) 1 c) -2
d) 0 e) 2

08. Dado el polinomio :

$$P(x;y) = (a-4)xy^2 - (20-b)x^2y + ax^2y$$

Si : $P(x;y) \equiv 0$. Calcular :

$$\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{ab}$$

a) 8 b) 18 c) 20
d) 14 e) 28

09. Sea el polinomio :

$$P(x) = (2x-1)^n + nx$$

con "n" impar, si la suma de sus coeficientes aumentado en el duplo de su término independiente resulta 16, entonces "n" es :

a) 15 b) 19 c) 17
d) 21 e) 13

10. Dado el polinomio :

$$R(x) = (2x^4 - 3)^m (mx^5 - 1)^5 (2x^m - x - m)^3$$

Indique el coeficiente principal, si el término independiente es 72.

a) 1024 b) 243 c) 624
d) 512 e) 64

11. Si :

$$P(x) = (n-2)x^{n-9}y + (n-3)x^{n-8}y^2 + \\ + (n-4)x^{n-7}y^3 + ...$$

es ordenado y completo. Hallar el número de términos.

a) 7 b)9 c) 11
d) 5 c) 13

12. Si :

$$P_{(x+2)} = 6x + 1$$

$$P_{(F(x))} = 12x - 17$$

Obtener : $F_{(10)}$.

a) 23 b) 20 c) 22
d) 21 e) 19

13. Dada la expresión : $P_{(x)}$, tal que :

$P_{(x)} \equiv P_{(x-1)} + P_{(x-2)}$, además : $P_{(1)} = 3$;

$P_{(2)} = 4$. Calcular : P(P(P(0))).

a) 7 b) 4 c) 3
d) 1 e) 14

14. Dado el polinomio :

$$P(x) = x^{a-5} + 3x^{a+1} + 5x^{7-a} - 7$$

Hallar la suma de valores que puede asumir "a".

a) 6 b) 11 c) 13
d) 18 e) 21

15. En el polinomio homogéneo :

$$P(x, y, z) = (xy)^{3a^{b-a}} + y^{b^{a-b}} + 2z^c$$

Calcular : a + b + c.

a) 3 b) 5 c) 7
d) 9 e) 15

16. Si se cumple :

$$P(x) = x^2 + 3x + (x-2)q(x)$$

$$R(x) = 5x - 2 + P(x+1)$$

Hallar la suma de coeficientes del polinomio $R(x)$.

a) 11 b) 9 c) -7
d) 13 e) -6

17. Si : $F(x) = x^3(x^{18} + 125x^{15}) + 2(x+5)$

Hallar :

$$K = [F(1) + F(2) + F(3) + ... + F(99)]^{F(-5)}$$

a) 0 b) 243 c) 1024
d) 23 499 e) 1

18. Hallar : m - n + p; si se sabe que el polinomio:

$$Q(x) = x^{m-10} + x^{m-n+5} + x^{p-n+6}$$

es completo y ordenado en forma decreciente.

a) 8 b) 2 c) 6
d) 10 e) 4

19. Si la siguiente expresión matemática se reduce a un polinomio :

$$P(x, y, z) = a\sqrt[a]{x^b} + b\sqrt[b]{x^c} + c\sqrt[c]{x^a}$$

Hallar el valor de : a - 2c + b.

a) -1 b) -2 c) 1
d) 2 e) 0

20. Sea "f" una función definida en el conjunto de los números reales tal que verifica las siguientes propiedades :

$$f_{(x+y)} = f_{(x)} + f_{(y)}; \quad f_{(1)} = 2$$

Calcular : $f_{(1+2+...+10)}$.

a) 220 b) 20 c) 40
d) 55 e) 110

21. Si : $H_{(x-1)} = f_{(x)} + g_{(x)}$

Donde : $f_{(x-2)} = 2x + 4$

$$g_{(x+2)} = 3x^2 + 6x + 1$$

Hallar : H(5).

a) 62 b) 78 c) 87
d) 93 e) 99

22. Si :

$$P_{(x)} = ax^2 + b \quad y \quad P_{(P(x))} = 8x^4 + 24x^2 + c$$

El valor de : a + b + c, es :

a) 28 b) 32 c) 30
d) 31 e) 26

23. Indique el grado de :

$$R(x;y) = x^{a-5}y^{\frac{a}{2}+1} + x^{a-4}y^{\frac{a}{4}+1} + x^{11-a}$$

a) 7 b) 8 c) 4
d) 6 e) 3

24. Si el polinomio :

$$P(x;y) = nx^{n+m}y - x^{r-1}y + my^{m+5}x^3$$

es homogéneo y con grado relativo respecto a "y" igual a 3. Hallar el grado relativo de "x".

a) 3 b) 5 c) 7
d) 9 e) 11

25. Sean los polinomios :

$$P_{(x)} = ax^3 + bx^2 + cx + d \; ; \; Q_{(x)} = ax^2 + d \; ;$$

$$R_{(x)} = ax + b \; .$$

Si : $P_{(0)} = 2; \; Q_{(1)} = R_{(2)} = 1$.

Hallar "x", tal que : $R_{(x)} = 0$.

a) -3 b) -1 c) 0
d) 1 e) 3

26. Determinar en cuanto difieren "p" y "q" para que con cualquier valor de "x" se cumpla que :

$$27 + 8x \equiv p(x+4) + q(2x+3)$$

a) 7 b) 5 c) 1
d) 3 e) 2

27. Hallar : m . n, si el polinomio es homogéneo.

$$P(x;y) = x^{n-3}y^7 + (x^2y^2)^4 + x^m y^4$$

a) 100 b) 124 c) 144
d) 140 e) 70

28. El grado de homogeneidad del polinomio :

$$P(x;y) = x^a y^{2b+c} + x^{a+b} y^{2c} + x^{a+2c} y^{a-2b}$$

es 6. Calcular el valor de : E = a + b + c.

a) 9 b) 7 c) 5
d) 3 e) 11

29. Sea el polinomio :

$$P_{(2x)} = a_0 x + 2a_1 x^2 + 2^2 a_2 x^3 + \ldots + 2^5 a_5 x^6$$

Hallar la suma de coeficientes de $P_{(x)}$, si su término independiente es $a_5 - 2$ y además:

$$a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 8 \; ; \; a_0 \neq 0$$

a) 3 b) 5 c) 7
d) 2 e) 1

30. Dados los polinomios :

$$f_{(x)} = a(x-1)(x-2) + b(x-2)(x-3) + c(x-1)(x-3)$$

$$g_{(x)} = x^2 - 2x + 9$$

Si : $f_{(x)} = g_{(x)}$; $\forall x \varepsilon \boldsymbol{R}$

Determine el valor de : a+ b+ c.

a) -1 b) 0 c) 1
d) 2 e) 1/2

31. Si : $f(x) = \dfrac{x+c}{x-1}$ $x \neq 1$; $c \neq 1$.

f(f(x)) será :

a) $\dfrac{c}{x-1}$ b) $\dfrac{x}{x-1}$ c) c
d) 1 e) x

32. Si : $f_{(x-2)} = x^2 + 1$ y $h_{(x+1)} = 3x + 1$, se tiene que $h(f_{(0)}) + h_{(-5)}$ es :

a) 82 b) -17 c) 193
d) 28 e) -4

33. Hallar "n", si el grado de :

$$\sqrt{\frac{x\sqrt{x^n}}{\sqrt[3]{x}}} \text{ es } 5$$

a) 5/3 b) 56 c) 56/3
d) 56/5 e) 5/6

34. Dado el monomio :

$$M(x;y) = 4a^b x^{2a+3b} y^{5b-a}$$

se tiene : GA(M) = 10; GR(x) = 7.
Señalar su coeficiente.

a) 2 b) 4 c) 8
d) 16 e) 64

35. Si la suma de coeficientes del polinomio P(x) es 13.

$$P(x) = a(2-x)^{10} + b(3-2x)^8 + 5$$

Hallar : a + b.

a) 4 b) 5 c) 6
d) 7 e) 8

36. Definimos un polinomio P(x) x ε R.

$$P(x) = (x+n-2)^4 - (x+n-3)^3 + 2$$

en el cual el término independiente es 17. Calcular "n".

a) 1 b) 4 c) 2
d) 5 e) 3

37. Hallar : m - n + p; si se sabe que el polinomio:

$$Q(x) = x^{m-10} + x^{m-n+5} + x^{p-n+6}$$

es completo y ordenado en forma decreciente.

a) 8 b) 2 c) 6
d) 10 e) 4

38. Sabiendo que el polinomio :

$$A(x;y) = 7x^{a+2} y^{b+3} + 8x^c y^{d+1} - 5x^{2a+3} y^{b+1}$$

es homogéneo. Hallar "a".

a) 0 b) 2 c) 1
d) -3 e) -4

39. Si el polinomio :

$$R_{(x)} = (a+b-2)x^2 - (a+c-3)x + (b+c-5)$$

se anula para :
x = 2001; x = 2002; x = 2003; x = 2004.
Hallar : a-b+ c.

a) -1 b) 2 c) 1
d) 0 e) 2001

40. Sea $P_{(x)}$ un polinomio mónico de grado 3; halle la suma de coeficientes del término cuadrático y lineal, siendo su término independiente igual a 5.
Además :

$$P_{(x+1)} = P_{(x)} + nx + 2$$

a) 1 b) 0 c) 2
d) 3 e) 4

41. Dado un polinomio lineal $P_{(x)}$, que presenta resultados mostrados en el cuadro :

x	1	2
$P_{(x)}$	4	6

Calcule : $P_{(5)} + P_{(0)}$.

a) 18 b) 16 c) 12
d)14 e) 8

42. Si : $f_{(x^2-2x+1)} = x^2 - 3$, entonces $f_{(x-2)}$ es:

a) $x^2 + 2x - 2$ b) $x^2 + 2\sqrt{x-2}$
c) $x + 2\sqrt{x-2} - 4$ d) $(x - \sqrt{2})^2 + 1$
e) $x - 2\sqrt{x-2} + 4$

43. ¿Para cuántos valores de "b" el polinomio :

$$P_{(x;y)} = ab\,x^{a-b}y^{a+b} - b^2y^4$$

es homogéneo?

a) 1 b) 2 c) 3
d) 4 e) Más de 4

44. Calcular : m - n, si el polinomio :

$$P(x;y) = 3x^{2m+n-4}.y^{m+n+2} + 7x^{2m+n-3}y^{m+n+1} - 7x^{2m+n-2}.y^{m+n}$$

es de grado 10 y la diferencia entre los grados relativos a "x" e "y" es 4.

a) 6 b) 9 c) 14
d) 15 e) 18

45. Si el polinomio P(x;y) es idéntiamente nulo. Hallar : ab.

$$P(x;y) = (a+b)x^3y + 2x^4y^5 - 18x^3y + (b-a)x^4y^5$$

a) 10 b) 20 c) 40
d) 60 e) 80

46. En el polinomio :

$$P(x+1) = (2x+1)^n + (x+2)^n - 128(2x+3)$$

donde "n" es impar, la suma de coeficientes y el término independiente suman 1, luego el valor de "n" es :

a) 5 b) 7 c) 9
d) 11 e) 13

47. Si :

$$P_{(x)} = (n-2)x^{n-9}y + (n-3)x^{n-8}y^2 + (n-4)x^{n-7}y^3 + \ldots$$

es ordenado y completo. Hallar el número de términos.

a) 7 b) 9 c) 11
d) 5 c) 13

48. Dada la función "f", tal que :

$$f\left(\sqrt[3]{\frac{x+3}{2}}\right) = 2x^2 - 18 \qquad x \in \boldsymbol{R}$$

Calcular : $\dfrac{f_{(1)} + f_{(-1)}}{2}$

a) 11 b) 7 c) 10
d) 9 e) 8

49. Proporcionar la suma de coeficientes del siguiente trinomio :

$$P(x;y) = (m-3)x^{9-m} + mx^{m-2}.y^{\frac{m}{3}} + y^{17-2m}$$

a) 4 b) 6 c) 8
d) 10 e) 12

50. Siendo :

$$P_{\left(\frac{1}{ax+1}\right)} = a^2x + 3a + 1$$

Obtener : $P_{\left(-\frac{1}{2}\right)}$

a) 1 b) 2 c) -3
d) -2 e) 0

51. Si : $f_{(x+1)} = f_{(x)} + 2x + 4$; y $f_{(0)} = 2$,

entonces $f_{(1)} + f_{(-1)}$ vale :

a) 0 b) 2 c) 6
d) -2 e) -6

52. Si : $f_{(x^x)} = \sqrt[x^{x+1}]{x^{x^{2x+2}}}$

Además : $f_{(x^{x+1})} = 3125$.

Calcular : $P = \sqrt{f_{(x+2)}}$.

a) 16 b) 10 c) 18
d) 14 e) 12

53. Q(x) es un polinomio que cumple las siguientes condiciones :
I. $Q(3) = Q(5) = 0$
II. Grado mínimo
III. Suma de coeficientes 16.

Calcular el término independiente de Q(x).

a) 18 b) 15 c) 30
d) 45 e) 32

54. Sabiendo que :

$$P(x;y) = (5x - 3y)^{n+1} + 5n$$

es tal que la suma de coeficiente es igual al término independiente aumentado en 1024. Hallar "n".

a) 6 b) 7 c) 8
d) 9 e) 10

55. Si el trinomio :

$$F(x) = \sqrt[a]{x^{a+b}} + \sqrt[b]{x^{b+c}} + \sqrt[c]{x^{a+c}}$$

es homogéneo de grado (10), de qué grado es el monomio.

$$S(x;y;z) = \sqrt[a]{x^b}.\sqrt[c]{y^a}.\sqrt[b]{z^c}$$

a) 7 b) 13 c) 27
d) 33 e) 30

56. Calcular la suma de coeficientes del siguiente polinomio completo :

$$P(x) = c(x^a + x^b) + a(x^b + x^c) + b(x^a + x^c) + abc$$

Si : $a \neq b \neq c$.

a) 6 b) 9 c) 12
d) 15 e) 18

57. El polinomio :

$$A(x) = ax^m + bx^n + cx^p + dx^q + mp$$

es completo y ordenado, con suma de coeficientes igual a 13.
Indicar : a + b + c + d.

a) 5 b)10 c) 8
d) 6 e) 9

58. Si : $f_{(x+1)} = x^2$

Hallar : $f_{\left(\frac{x^2-1}{x}\right)}$, $x \neq 0$

a) $\left(\frac{x^2-1}{x}\right)^2$ b) $\left(\frac{x-1}{x^2}\right)$

c) $\frac{1}{x^2}(x^2+x+1)^2$ d) $(x^2-x-1)^2$

e) $\frac{1}{x^2}(x^2-x-1)^2$

59. Sean : P, Q dos polinomios dados por :

$P_{(x)} = ax^3 + bx^2 + cx + d$

$Q_{(x)} = 2x^3 - x^2 + 3x + 1$

Si : $P_{(x)} \equiv Q_{(x-1)}$, determinar el valor de :

$$a + b + c + d$$

a) 0 b) 1 c) 2
d) 3 e) 5

60. Si : $R_{(\frac{x}{5}-3)} = x + 1$

Además : $R_{(F_{(\frac{2x}{9}+7)})} = 20x + 1$

Calcular : $F_{(x)}$.

a) 15x - 9 b) 8x - 129 c) 18x - 129
d) 18x - 29 e) -18x + 129

Claves

01.	c
02.	b
03.	c
04.	d
05.	c
06.	b
07.	a
08.	d
09.	c
10.	a
11.	a
12.	e
13.	a
14.	d
15.	c
16.	d
17.	e
18.	c
19.	e
20.	e
21.	d
22.	e
23.	b
24.	b
25.	e
26.	b
27.	c
28.	c
29.	b
30.	c

31.	c
32.	e
33.	c
34.	c
35.	e
36.	b
37.	c
38.	c
39.	c
40.	a
41.	d
42.	c
43.	c
44.	c
45.	e
46.	c
47.	b
48.	e
49.	d
50.	a
51.	c
52.	a
53.	c
54.	d
55.	c
56.	e
57.	a
58.	e
59.	b
60.	c