CAPÍTULO

II

Leyes de exponentes

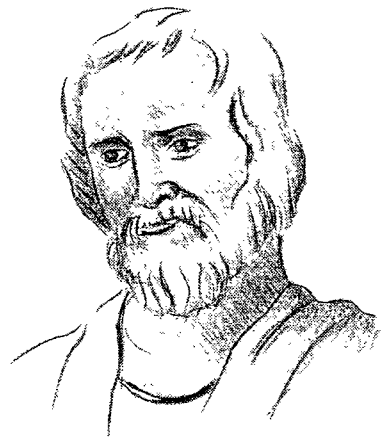
Arquímedes (287 a 212 a.n.e.)

Sin discusión fue el matemático griego más genial. Vivió en Siracusa de 287 al 212 a.n.e. Su padre fue el astrónomo Fidas. Se atribuyen a Arquímedes numerosos inventos, entre ellos el "Tornillo sin fin" detinado a traer el agua subterránea de las minas de Egipto. Participó en la defensa de Siracusa. La originalidad de Arquímedes convirtió junto a Platón, en la flor innata d genio griego. Descubrió las propiedad del número π y las enunció en el lit *Medida del círculo.* En este libro existe importante teorema que afirma "el valor π varía entre:

$3\frac{10}{71}$ y $3\frac{1}{7}$. Buscó los procedimientos físic de los descubrimientos, dando enseguí una exposición lógica y demostrativa de l resultados obtenidos; llamaba no a intuición y al tanteo, sino a la lógica físic matemática.

En su teoría de los métodos, anticipándo en 2000 años a Newton, descubrió y usó l conceptos básicos del cálculo integral y el uso de sus problemas anticipó creación del cálculo diferencial.

Murió asesinado por un soldado romano la cárcel. mientras resolvía un problema.



$$\left(\frac{x^{\alpha}\cdot y^{\beta}}{Z^{\gamma}}\right)^{n}=\frac{x^{\alpha n}\cdot y^{\beta n}}{Z^{\gamma n}}$$

LECTURA

La historia del cero

Hasta el año 1200 después de Cristo se usó en Europa la numeración romana. Por esa época, un mercader de Pisa, Leonardo Pisano, al volver de un largo viaje por Africa y el Medio Oriente escribió un libro titulado ***Liber Abaci****, donde exponía y proponía emplear la Matemática usada por los árabes, que a su vez la habían aprendido de los hindúes y que no significa otra cosa que* ***nada****.*

Si bien la obra de Leonardo Pisano fue un hecho revolucionario, debido a que no estaba inventada la imprenta, debieron transcurrir tres siglos para que fuera conocida en toda Europa.

Es interesante señalar que en la América precolombina, más precisamente entre los Mayas, existía la noción de "cero", número que ellos empleaban en su sistema de numeración vigesimal.

Este número es una de las más grandes invenciones del genio humano ya que gracias a él se abandonó la numeración romana, adoptándose la decimal vigente aún en nuestros tiempos y facilitó la ejecución de las operaciones aritméticas.

Fuente: La Nueva Matemática - Ed. Salvat.

Leyes de exponentes

OBJETIVOS

- Buscar una relación entre las definiciones y los teoremas correspondientes a los exponentes de una expresión matemática.
- Aplicar con criterio la notación científica en el cálculo con cantidades muy pequeñas o muy grandes, así: $0{,}0003 = 3.10^{-4}$ ó $32\,000 = 3{,}2 \cdot 10^4$
- Capacitar para reconocer los exponentes mayores de cocientes, productos, potencias o raíces n-ésimas.
- Aplicar la relación de base a base y exponente a exponente en la resolución de las ecuaciones exponenciales.

INTRODUCCIÓN

Veamos la necesidad e importancia de este capítulo a través de algunos ejemplos:

Los números 10, 100, 1000, etc. juegan un papel muy importante en la notación decimal y se llaman potencias de 10. Un modo conveniente de indicar estas potencias es mediante el uso de exponentes:

$$10^1 = 10$$
$$10^2 = 10 \times 10 = 100$$
$$10^3 = 10 \times 10 \times 10 = 1\,000$$
$$10^4 = 10 \times 10 \times 10 \times 10 = 10\,000$$
$$10^5 = 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 = 100\,000$$

y así sucesivamente; leemos 10^5 como "diez a la quinta potencia". El numeral 5 en 10^5 se llama exponente.

La mayor utilidad de estas formas exponenciales está en el trabajo científico, debido a la necesidad de simplificar los cálculos con números muy grandes o números pequeños. Citamos los siguientes ejemplos:

I. La estrella más cercana, Alfa Centauri, está a 25.000.000.000.000 millas de la tierra que puede simplificarse diciendo Alfa Centauri está a $25 \cdot 10^{12}$ millas de la tierra.

II. Entre los años 1 908 - 1 917, el físico norteamericano Robert Andrews Millikan dedujo que la carga negativa del electrón es $-1{,}60 \cdot 10^{-19}$ C, del mismo modo su masa es $9{,}11 \cdot 10^{-28}$ g.
¿Cómo sería sin la representación exponencial?

III. En la teoría molecular de la materia, Amadeo Avogadro determina una constante llamándola el número de Avogadro, cuyo valor es $6{,}02 \cdot 10^{23}$ (602 seguido de 21 ceros).

IV. El radio del núcleo del urano -235 es aproximadamente $7{,}0 \cdot 10^{-5}$ Å, siendo cada Å$= 10^{-8}$cm.

Vemos la gran utilidad de esta forma exponencial en el trabajo científico.

Para finalizar, planteamos el siguiente problema de astronomía. Se acostumbra describir las distancias entre las estrellas mediante unidades llamadas años luz. Por definición, un año luz es la distancia que recorre la luz en un año (365 días). Si la luz viaja con una velocidad de $3{,}1 \cdot 10^5$ km/s. aproximadamente ¿cuántos km hay en un año luz?

DEFINICIONES PREVIAS

EXPONENTE NATURAL

Es el exponente entero y positivo que nos indica el número de veces que se repite una expresión como factor.

Ejemplos:

1. $5^6 = \underbrace{5 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot 5}_{6 \text{ veces}}$

2. $\underbrace{\left(-\frac{x}{y}\right)\left(-\frac{x}{y}\right)\ldots\left(-\frac{x}{y}\right)}_{72 \text{ veces}} = \left(-\frac{x}{y}\right)^{72}$

3. $\underbrace{\sqrt[3]{xy} \cdot \sqrt[3]{xy} \ldots \sqrt[3]{xy}}_{4n-1 \text{ veces}} = \left(\sqrt[3]{xy}\right)^{4n-1}$; $4n-1 \in \mathbf{N}$

4. $\underbrace{\sqrt[4]{\frac{x}{\sqrt{y}}} \cdot \sqrt[4]{\frac{x}{\sqrt{y}}} \ldots \sqrt[4]{\frac{x}{\sqrt{y}}}}_{43 \text{ veces}} = \left(\sqrt[4]{\frac{x}{\sqrt{y}}}\right)^{43}$

5. $\underbrace{\left(\frac{x^3}{p}\right)\left(\frac{x^3}{p}\right)\ldots\left(\frac{x^3}{p}\right)}_{(2p+3q-7) \text{ veces}} = \left(\frac{x^3}{p}\right)^{2p+3q-7}$; $(2p+3q-7) \in \mathbf{N}$

En general:

$$a^n = \begin{cases} a \ ; & \text{Si: } n = 1 \\ \underbrace{a \cdot a \ldots a}_{n \text{ veces}} & \text{Si } n \in \mathbf{N} \ ; \ n \geq 2 \end{cases}$$

Nota

$\underbrace{(\sqrt{xy})(\sqrt{xy})\ldots(\sqrt{xy})}_{(\sqrt{7}+\sqrt{2}) \text{ veces}} \neq (\sqrt{xy})^{\sqrt{7}+\sqrt{2}}$

No tiene sentido ya que $(\sqrt{7}+\sqrt{2})$ no es un número natural.

N es el conjunto de los números naturales.
R es el conjunto de los números reales.

EXPONENTE CERO

Todo número diferente de cero elevado al exponente cero es la unidad.

$$a^0 = 1 \ ; \ \forall a \in \mathbf{R} \wedge a \neq 0$$

Ejemplos:

1. $(-4+\sqrt{2})^0 = 1$
2. $(\pi+\sqrt{2})^0 = 1$
3. $(x^2+y^2+15)^0 = 1$
4. $\left.\begin{matrix}(-425)^0 = 1 \\ -425^0 = -1\end{matrix}\right\}$ Observación

Nota 0^0 es indeterminado.

Ejemplo:

$(4-\sqrt{16})^{\sqrt[3]{-8}+2} = (4-4)^{2+2} = 0^0 \Rightarrow$ dicha expresión no está definida.

EXPONENTE NEGATIVO

Nos indica que la base diferente de cero se invierte (inverso multiplicativo).

$$a^{-1} = \frac{1}{a} \quad \forall a \in \mathbb{R} - \{0\}$$

TEOREMA

$$a^{n} = \frac{1}{a^{n}} \quad \forall a \neq 0 \wedge n \in \mathbb{N}$$

Ejemplos:

a) $3^{-2} = \dfrac{1}{3^2} = \dfrac{1}{9}$

b) $(-4)^{-3} = \dfrac{1}{(-4)^3} = \dfrac{1}{-64} = -\dfrac{1}{64}$

c) $\left(\dfrac{1}{8}\right)^{-2} = 8^2 = 64$

d) $5^{-2^3} = \left(\dfrac{1}{5}\right)^{\left(\frac{1}{2}\right)^3}$

Nota 0^{n} no está definido $(n \in \mathbb{N})$

EXPONENTE FRACCIONARIO

El exponente fraccionario se expresa como los radicales, donde el denominador de dicho exponente representa el índice del radical.

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^{m}} = \sqrt[n]{a}^{m} \; ; \; \forall n \in \mathbb{N} \wedge n \geq 2$$

Ejemplos:

1. $4^{3/2} = \sqrt{4^3} = \sqrt{64} = 8$
2. $8^{10/3} = \sqrt[3]{8^{10}} = \sqrt[3]{8}^{10} = 2^{10} = 1\,024$
3. $81^{3/4} = \sqrt[4]{81^3} = \sqrt[4]{81}^{3} = 3^3 = 27$
4. Calcular: $4^{-2^{-1}}$

   Resolución:

   Usando las definiciones de exponente negativo y fraccionario, se tiene:

   $$4^{-2^{-1}} = \left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$$

5. Reducir:

   $$27^{9^{-16^{-2^{-2}}}}$$

   Resolución:

   Es equivalente a:

   $$26^{\left(\frac{1}{9}\right)^{\left(\frac{1}{16}\right)^{\left(\frac{1}{2}\right)^2}}}$$

   Se reduce de dos en dos de arriba hacia abajo, como sigue:

   - $\left(\dfrac{1}{2}\right)^2 = \dfrac{1}{4}$
   - $\left(\dfrac{1}{16}\right)^{1/4} = \sqrt[4]{\dfrac{1}{16}} = \dfrac{1}{2}$
   - $\left(\dfrac{1}{9}\right)^{1/2} = \sqrt{\dfrac{1}{9}} = \dfrac{1}{3}$

   Finalmente: $27^{1/3} = \sqrt[3]{27} = 3$

POTENCIACIÓN

DEFINICIÓN

Es una operación matemática que consiste en hallar una expresión llamada potencia, partiendo de otras dos llamadas base y exponente respectivamente.

Identidad Fundamental

$P = a^n \; ; \; a \in \mathbb{R} \; ; \; n \in \mathbb{N} \; ; \; p \in \mathbb{R}$

Donde: a : base
n : exponente natural
p : potencia

TEOREMA 1

$x^m \cdot x^n = x^{m+n} \quad ; \quad x \in \mathbb{R} \wedge m, n \in \mathbb{N}$

Demostración:

$$x^m \cdot x^n = \underbrace{x \cdot x \ldots x}_{\text{m veces}} \cdot \underbrace{x \cdot x \ldots x}_{\text{n veces}}$$

$$\Rightarrow x^m \cdot x^n = \underbrace{x \cdot x \ldots x}_{\text{(m+n) veces}} = x^{m+n}$$

Ejemplos:

1. $a^5 \cdot a^6 \cdot a^7 = a^{5+6+7} = a^{18}$

2. $x \cdot x^2 \cdot x^3 \ldots x^n = x^{1+2+3+\ldots+n}$

Pero: $1+2+3+\ldots+n = \dfrac{n(n+1)}{2}$

$$\Rightarrow x \cdot x^2 \cdot x^3 \ldots x^n = x^{\frac{n(n+1)}{2}}$$

3. ¿ $x^{\sqrt{2}+1} = \underbrace{x \cdot x \ldots x}_{(\sqrt{2}+1)\text{ veces}}$?

¿Por qué? ... .

TEOREMA 2

$(x^m)^n = x^{mn} \; : \; x \in \mathbb{R} \wedge m, n \in \mathbb{N}$

Demostración:

$$(x^m)^n = \underbrace{x^m \cdot x^m \cdot x^m \ldots x^m}_{\text{n veces}} = x^{\overbrace{m+m+\ldots+m}^{\text{n veces}}}$$

$$\Rightarrow (x^m)^n = x^{m.n}$$

Ejemplos:

1. $(x^3)^4 (x^3)^5 = x^{3.4} \cdot x^{3.5} = x^{12} \cdot x^{15} = x^{27}$

2. $\left(\ldots\left(\left(x^2\right)^3\right)^4 \ldots\right)^{50} = x^{1.2.3\ldots50} = x^{50!}$

NOTA
1.2.3 ... 50 = 50!
Se llama **factorial** de 50

3. $\left(\left(\ldots\left(\left(x^{-15}\right)^{-14}\right)^{13} \ldots\right)^{14}\right)^{15} = x^{15(-14)(15)}$

$$= x^0 = 1$$

$$\forall \; x \neq 0$$

NOTA $(-15)(-14)\ldots(-1)(0)(1)\ldots(15) = 0$

TEOREMA 3

$(a.b)^n = a^n \cdot b^n \; ; \; a, b \in \mathbb{R} \wedge n \in \mathbb{N}$

Demostración:

$$(a.b)^n = \underbrace{(ab)(ab)(ab)\ldots.(ab)}_{\text{n veces}}$$

$$= \underbrace{a.a.a\ldots a}_{\text{n veces}}\,.\,\underbrace{b.b\ldots.b}_{\text{n veces}}$$

$$\Rightarrow (a.b)^n = a^n.b^n$$

Ejemplos:

1. $(x.y)^5 = x^5.y^5$
2. $2^3.3^3 = (2.3)^3 = 6^3 = 216$
3. $(\sqrt{x}\,y^7 z^8)^{16} = (\sqrt{x})^{16}(y^7)^{16}(z^8)^{16}$
4. $\left(\left(\frac{a}{b}\right)c^n\right)^4 = \left(\frac{a}{b}\right)^4(c^n)^4$

TEOREMA 4

$$(x^a.y^b)^n = x^{a.n}.y^{b.n}$$

Ejemplos:

1. $(x^5.y^4)^7 = (x^5)^7(y^4)^7 = x^{35}y^{28}$
2. $(x^4a^3c^2)^2 = x^{4.2}.a^{3.2}.c^{2.2} = x^8a^6c^4$

TEOREMA 5

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}\ ;\ m,n \in \mathbb{N} \wedge m \geq n$$

$$a \in \mathbb{R} - \{0\}$$

$$a^{\ldots} = \frac{a^{(m-n)+n}}{a^n} = \frac{a^{m-n}.a^n}{a^n} \quad m\ n$$

Ejemplos:

1. $\frac{2^{20}}{2^{16}} = 2^{20-16} = 2^4 = 16$

2. $\frac{a^{3+5x}}{a^{3-5x}} = a^{(3+5x)-(3-5x)} = a^{10x}$

TEOREMA 6

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}\ ;\ n \in \mathbb{N} \wedge b \in \mathbb{R} - \{0\}$$

Corolario 1

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \left(\frac{b}{a}\right)^n = \frac{b^n}{a^n} \quad \forall\ a.b \neq 0$$

Ejemplos:

1. $\left(\frac{a^\alpha}{b^\beta}\right)^n = \frac{(a^\alpha)^n}{(b^\beta)^n} = \frac{a^{\alpha n}}{b^{\beta n}}$

2. $\left(\frac{2^{30}}{2^{-20}}\right)^2 = \frac{2^{60}}{2^{-40}} = 2^{100}$

3. $\left(\frac{(a^2)^x}{(b^3)^y}\right)^{-2} = \frac{(a^{2x})^{-2}}{(b^{3y})^{-2}} = \frac{a^{-4x}}{b^{-6y}} = \frac{b^{6y}}{a^{4x}}$

NOTA: Los teoremas expuestos y demostrados para exponentes naturales, pueden ampliarse a exponentes reales. Pero para su demostración es necesario ya otros elementos de matemática superior.

RADICACIÓN EN $\mathbb{R}$

DEFINICIÓN

Dados un número real "**a**" y un número natural **n** mayor que 1, "**b**" se llama raíz n-ésima principal de **a** y se denota por $b=\sqrt[n]{a}$ sí y sólo sí $b^n=a$, donde $a, b\in\mathbb{R} \wedge n\in\mathbb{N}-\{1\}$ bajo la condición de que si **n** es par, entonces $a,b \in \mathbb{R}_0^+$.

Así $\sqrt[4]{16} = 2$ ya que $2^4 = 16$ (2 es la raíz principal)

$\sqrt[3]{-8} = -2$ puesto que $(-2)^3 = -8$ (única en $\mathbb{R}$)

Identidad fundamental:

$$y = \sqrt[n]{x} \Leftrightarrow y^n = x \; ; \; n\in\mathbb{N} \; ; \; n\geq 2$$

TEOREMAS DE RADICACIÓN

TEOREMA 1

$$\sqrt[n]{a.b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} \text{ en } \mathbb{R}$$

Si **n** es par entonces $a\geq 0 \wedge b\geq 0$

Ejemplos:

1. $\sqrt{32} = \sqrt{16.2} = \sqrt{16}.\sqrt{2} = 4(1{,}41) = 5{,}64$ (Aproximadamente)
2. $\sqrt[3]{a^5.b^7} = \sqrt[3]{a^5}.\sqrt[3]{b^7}$
3. ¿ $\sqrt{(-3)(-2)} = \sqrt{-3}\sqrt{-2}$?

¿ Por qué ? ...

TEOREMA 2

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} \; ; \; b\neq 0$$

Si **n** es par entonces $a\geq 0 \wedge b>0$

Ejemplos:

1. $\sqrt[4]{\frac{81}{16}} = \frac{\sqrt[4]{81}}{\sqrt[4]{16}} = \frac{3}{2}$
2. $\frac{\sqrt[3]{16}}{\sqrt[3]{2}} = \sqrt[3]{\frac{16}{2}} = \sqrt[3]{8} = 2$
3. ¿ $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{3}{-2}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{-2}}$?

¿Por qué? ...

TEOREMA 3

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m.n]{a} \quad m, n \in \mathbb{N}$$

Si: **m . n** es par $\Rightarrow a \geq 0$

Ejemplos:

1. $\sqrt[3]{\sqrt[4]{\sqrt[2]{x}}} = \sqrt[3.4.2]{x} = \sqrt[24]{x}$

2. ¿ $\sqrt[3]{\sqrt[2]{\sqrt[4]{-5}}} = \sqrt[24]{-5}$?

¿Por qué? .....

RADICALES SUCESIVOS

$$\sqrt[n]{a\sqrt[m]{b\sqrt[p]{c}}} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n.m]{b} \cdot \sqrt[n.m.p]{c}$$

Ejemplos:

1. $\sqrt[4]{5\sqrt[3]{2\sqrt[5]{7}}} = \sqrt[4]{5} \cdot \sqrt[4.3]{2} \cdot \sqrt[4.3.5]{7}$
$= \sqrt[4]{5} \cdot \sqrt[12]{2} \cdot \sqrt[60]{7}$

2. $\sqrt[7]{3\sqrt[4]{2\sqrt[5]{5}}} = \sqrt[7]{3} \cdot \sqrt[7.4]{2} \cdot \sqrt[7.4.5]{5}$
$= \sqrt[7]{3} \cdot \sqrt[28]{2} \cdot \sqrt[140]{5}$

De la fórmula anterior: Si las bases a, b, c son iguales, eso determina a una forma práctica de reducir.

Regla Práctica

I.

$$\sqrt[n]{x^{\alpha} \overset{\times}{\underset{+}{\sqrt[m]{x^{\beta}}}} \overset{\times}{\underset{+}{\sqrt[p]{x^{\gamma}}}}} = \sqrt[n.m.p]{x^{(\alpha m+\beta)p+\gamma}}$$

(× + × + × + ...)

Ejemplos:

1. $\sqrt[4]{x^{1} \overset{\times}{\underset{+}{\sqrt[3]{x^{5}}}}} = \sqrt[4.3]{x^{1.3+5}} = \sqrt[12]{x^{8}}$

2. $\sqrt[3]{x^{5} \overset{\times}{\underset{+}{\sqrt{x^{3}}}}} = \sqrt[3.2]{x^{5.2+3}} = \sqrt[6]{x^{13}}$

3. $\sqrt[5]{x^{2} \overset{\times}{\underset{+}{\sqrt[3]{x^{5}}}} \overset{\times}{\underset{+}{\sqrt[4]{x^{1}}}}} = \sqrt[5.3.4]{x^{(2.3+5)4+1}}$
$= \sqrt[60]{x^{45}}$

4. $\sqrt{2\sqrt[4]{8\sqrt[3]{16}}} = \sqrt{2^{1} \overset{\times}{\underset{+}{\sqrt[4]{2^{3}}}} \overset{\times}{\underset{+}{\sqrt[3]{2^{4}}}}}$

$$\sqrt[2.4.3]{2^{(1.4+3)3+4}} = \sqrt[24]{2^{25}}$$

II.

$$\sqrt[n]{x^{\alpha} \overset{\times}{\underset{\div}{\sqrt[m]{x^{\beta}}}} \overset{\times}{\underset{\div}{\sqrt[p]{x^{\gamma}}}}} = \sqrt[nmp]{x^{(\alpha m-\beta)p+\gamma}}$$

(× − × + × − .....)

En los exponentes, los signos se alternan.

Ejemplos:

1. $\sqrt[4]{x^{3} \overset{\times}{\underset{\div}{\sqrt[2]{x^{1}}}}} = \sqrt[4.2]{x^{3.2-1}} = \sqrt[8]{x^{5}}$

2. $\sqrt{x^1 \overset{+}{\div} \sqrt{x^1 \overset{\times}{\div} \sqrt{x^1 \overset{+}{\div} \sqrt{x^1 \overset{\times}{\div} \sqrt{x^1 \overset{+}{\div}}}}}}} =$

$$= \sqrt[2.2.2.2.2]{x^{\{[(1.2-1)2+1]2-1\}2+1}} = \sqrt[32]{x^{11}}$$

3.

$$\sqrt[3]{x^4 \overset{\times}{\div} \sqrt{x^1 \overset{\times}{\div} \sqrt[4]{x^1 \overset{+}{\div}}}} = \sqrt[3.2.4]{x^{(4.2-1)4+1}}$$

$$= \sqrt[24]{x^{29}}$$

Corolario 2

$$\sqrt[a.b]{x^{ac}} = \sqrt[b]{x^c}$$

Si **ab** es par $\Rightarrow x \in \mathbb{R}_0^+$

Ejemplos:

1. $\sqrt[3.5]{x^{3.4}} = \sqrt[5]{x^4}$

2. $\sqrt[3]{2}.\sqrt{3} = \sqrt[3.2]{2^2}.\sqrt[2.3]{3^3} = \sqrt[6]{4}.\sqrt[6]{27} = \sqrt[6]{4.27}$

$$= \sqrt[6]{108}$$

Analice cada una de las siguientes preguntas:

a) ¿ $\sqrt[2.7]{(-5)^{2.3}} = \sqrt[7]{(-5)^3}$?

¿Por qué? .....

b) ¿ $(-16)^{3/4} = \left(\sqrt[4]{-16}\right)^3$?

¿Por qué? .....

c) ¿$(-27)^{4/3} = \left(\sqrt[3]{-27}\right)^4 = (-3)^4 = 81$?

¿Por qué? ....

d) ¿$(-8)^{1/3} = (-8)^{2/6}$?

¿Por qué? .....

Ejemplos aplicativos:

1. Hallar el exponente de x, luego de simplificar

$$\left\{\frac{\sqrt{x^3\sqrt{x\sqrt[3]{x}}}.x^2}{\sqrt[4]{x^3\sqrt[3]{x}}}\right\}^{24} \quad ; \; x > 0$$

Resolución:

Usando la regla práctica I

$$\left(\frac{\sqrt[2.2.3]{x^{(3.2+1).3+1}}.x^2}{\sqrt[4.3]{x^{3.3+1}}}\right)^{24} = \left(\frac{\sqrt[12]{x^{22}}.x^2}{\sqrt[12]{x^{10}}}\right)^{24}$$

$$= \left(\sqrt[12]{\frac{x^{22}}{x^{10}}}.x^2\right)^{24} = \left(\sqrt[12]{x^{12}}.x^2\right)^{24} = (x.x^2)^{24}$$

$$= x^{72}$$

Respuesta: El exponente final es 72

2. Reducir:

$$\frac{\sqrt[3]{x\sqrt[4]{x^3\sqrt{x}}}.(x^{0,5})^4}{\sqrt{x \div \sqrt{x \div \sqrt{x \div \sqrt{x}}}}}$$

Resolución:

Aplicando las reglas prácticas I y II se tendrá

$$\frac{\sqrt[3.4.2]{x^{(1.4+3)2+1}}.x^{0,5.4}}{\sqrt[2.2.2.2]{x^{((1.2-1)2+1)2-1}}}$$

$$= \frac{\sqrt[24]{x^{15}}.x^2}{\sqrt[16]{x^5}} = x^{\frac{5}{8}+2-\frac{5}{16}} = x^{\frac{37}{16}}$$

Problemas Resueltos

Problema 1

Reducir

$$\frac{\overbrace{5\,.\,5\,....\,5}^{10\text{ veces}}\quad\overbrace{15\,.\,15\,.\,15\,....\,15}^{7\text{ veces}}}{81^2\,.\,5^{15}}$$

Resolución:

Por exponente natural

$$\frac{5^{10}\,.\,15^7}{81^2\,.\,5^{15}} = \frac{5^{10}\,.\,5^7\,.\,3^7}{(3^4)^2\,.\,5^{15}} = 5^{10+7-15}\,.\,3^{7-8}$$

$$= 5^2 3^{-1} = \frac{25}{3}$$

Problema 2

Reducir

$$\frac{2^5\,.\,4^5\,.\,6^5\,.\,8^5\,.....\,(2n)^5}{2^5\,.\,3^5\,.\,4^5\,.....\,n^5} \quad ; \quad n > 10$$

Resolución:

Asociando adecuadamente

$$2^5\,.\,\frac{4^5}{2^5}\,.\,\frac{6^5}{3^5}\,.\,\frac{8^5}{4^5}\,.....\,\frac{(2n)^5}{n^5}$$

$$= \underbrace{2^5\,.\,2^5\,.\,2^5\,.\,2^5\,.....\,2^5}_{n\text{ veces}} = (2^5)^n = 32^n$$

Problema 3

Si la expresión $\forall\, a \neq 0$

$$\left(\left((a^2)^n\right)^3\right)^{4^0}\left(\frac{a^3}{\underbrace{a\,.\,a\,.....\,a}_{n\text{ veces}}}\right).a^{99^{0^{88^5}}}$$

se reduce a la unidad. Calcular "n".

Resolución:

Se ve que $n \in \mathbb{N}$, luego

$$a^{2.n.3.4^0}\,.\,\frac{a^3}{a^n}\,.\,a^{99^{0^{88^5}}} = a^{6n}\,.\,\frac{a^3}{a^n}\,.\,a^1 = a^{5n+4}$$

si se reduce a la unidad $(5n+4) = 0$; pero no existe $n \in \mathbb{N}$; $5n+4 = 0$

$\therefore$ no existe tal **n**

Problema 4

Al reducir

$$\frac{(x^2)^3\,.\,x^{2^3}\,.\,x^{(-2)^3}\,.\,x^{(-2)^4}}{x^{-2^2}\,.\,x^{(-2)^0}\,.\,x^{2^0}\,.\,x^{-2^0}}$$

Indicar el valor de verdad de las proposiciones

I. Se reduce a $x^{25}\ \forall\ x \in \mathbb{R}$

II. Es equivalente a $x^{25} \leftrightarrow x \neq 0$

Resolución:

Vemos que $x \neq 0$ (por estar en el denominador)

$$\frac{x^{2.3}\,.\,x^{2^3}\,.\,x^{(-2)^3}\,.\,x^{(-2)^4}}{x^{-2^2}\,.\,x^{(-2)^0}\,.\,x^{2^0}\,.\,x^{-2^0}} = \frac{x^6\,.\,x^8\,.\,x^{-8}\,.\,x^{16}}{x^{-4}\,.\,x^1\,.\,x^1\,.\,x^{-1}}$$

$$\frac{x^6\,.\,x^8\,.\,x^{-8}\,.\,x^{16}}{x^{-4}\,.\,x^1\,.\,x^1\,.\,x^{-1}} = \frac{x^{6+8-8+16}}{x^{-4+1+1-1}} = \frac{x^{22}}{x^{-3}} = x^{25}$$

Luego I. (F)

II. (V)

Problema 5

Indicar el valor de verdad de las proposiciones

I. $\forall\, x \neq 0$

$$\left(.....\left(\left(x^{-9}\right)^{-8}\right)^{-7}....\right)^9 = 1$$

II. $4^{-2^{-1}} - 3^{-2^{0^{-1}}} = 6^{-1}$

Resolución:

I. $x^{9(-8)(-7).(-1)(0)\,.\,(9)}$

$= x^0 = 1\ \forall\, x \neq 0$ ..... (V)

II. **NOTA** 0^{-1} no está definido ..... (F)

Problema 6

Con respecto a la expresión

$$\left\{\left(2^{-2}\,.\,8^{\frac{1}{3}}\right)^{-n} + \left((-2)^{-2}\,(-8)^{\frac{1}{3}}\right)^{-n}\right\}^0 \quad ; \quad n \in \mathbb{N}$$

Enunciar el valor de verdad

I. La expresión se reduce a la unidad

II. Para **n** par la expresión es uno

III. Para **n** impar la expresión no está definida

Resolución:

Simplificando

$$\left\{\left(\frac{1}{2^2}\cdot\sqrt[3]{8}\right)^{-n}+\left(\frac{1}{2^2}\cdot\sqrt[3]{-8}\right)^{-n}\right\}^0$$

$$=\left\{\left(\frac{2}{4}\right)^{-n}+\left(-\frac{2}{4}\right)^{-n}\right\}^0=\{2^n+(-2)^n\}^0$$

Si **n** es par $(2^n+2^n)^0=1$

Si **n** es impar $(2^n-2^n)^0=0^0$ no definido

$\therefore$ Concluyendo que

I. (F) II. (V) III. (V)

Problema 7

Simplificar:

$$\frac{3^{2n+1}+9^{n+1}}{9^{n+1}-3^{2n+1}}\quad;\quad n\in\mathbb{N}$$

Resolución:

Descomponiendo $\dfrac{3^{2n}\cdot 3+9^n\cdot 9}{9^n\cdot 9-3^{2n}\cdot 3}$

y factorizando 9^n se tiene $\dfrac{9^n(3+9)}{9^n(9-3)}=\dfrac{12}{6}=2$

Problema 8

Simplificar

$$\sqrt[2n+3]{\frac{(225)^{2n+3}\cdot 225}{5^{2n+3}\cdot 5^2\cdot 4+5^{2n+3}\cdot 5^3}}$$

Resolución:

Descomponiendo adecuadamente

$$\sqrt[2n+3]{\frac{(225)^{2n+3}\cdot 225}{5^{2n+3}\cdot 5^2\cdot 4+5^{2n+3}\cdot 5^3}}$$

$$\sqrt[2n+3]{\frac{(225)^{2n+3}\cdot 225}{5^{2n+3}\cdot(5^2\cdot 4+5^3)}}=\sqrt[2n+3]{\left(\frac{225}{5}\right)^{2n+3}}$$

$$=45$$

Problema 9

Con respecto a la expresión

$$\left(\sqrt[x]{y}\right)^z$$

Establecer el valor de verdad de cada una de las proposiciones:

I. Existe en $\mathbb{R}$; si $x\in\mathbb{N}$

II. Existe en $\mathbb{R}$; si $x>0\ \wedge\ y>0$

III. Existe en $\mathbb{R}$; si $x\in\mathbb{N}\ \wedge\ y>0$

IV. Existe en $\mathbb{R}$; si $\{x,y,z\}\subset\mathbb{Q}$

Resolución:

Para que $\left(\sqrt[x]{y}\right)^z$ exista en $\mathbb{R}$ sólo es necesario

Si $y>0\ \Rightarrow\ x$ es cualquier natural

Si $y<0$ sólo que x sea impar $\wedge\ z\in Z$,

Si $x\in\mathbb{N}\ \Rightarrow\ y>0$

Luego se concluye

I. (F) II. (F) III. (V) IV. (F)

Problema 10

Hallar el valor de a^2+b^2 en

$$\sqrt[a-b]{\frac{\sqrt[b]{a^a\cdot b}}{\sqrt[a]{a^b\cdot b}}}=3^{\frac{4}{3}}$$

Resolución:

Transformando a exponentes fraccionarios se tiene

$$\sqrt[a-b]{\frac{a^{\frac{a}{b}}\cdot b^{\frac{1}{b}}}{a^{\frac{b}{a}}\cdot b^{\frac{1}{a}}}}=\sqrt[a-b]{a^{\frac{a}{b}-\frac{b}{a}}\cdot b^{\frac{1}{b}-\frac{1}{a}}}$$

Simplificando se obtiene

$$\sqrt[a-b]{a^{\frac{a^2-b^2}{ab}} \cdot b^{\frac{a-b}{ab}}} = a^{\frac{a+b}{ab}} \cdot b^{\frac{1}{ab}}$$

$$= \sqrt[ab]{a^{a+b} \cdot b} = \sqrt[3]{3^4}$$

como **a** y **b** son naturales, sólo se verifica en

$$a = 3 \ \wedge \ b = 1$$

$$\therefore \ a^2 + b^2 = 10$$

Problema 11

Siendo $\{m,n\} \subset \mathbb{N}$

Indicar si es verdadero (V) o falso (F) en cada una de las siguientes proposiciones:

I. $\sqrt[n]{xy} = \sqrt[n]{x}\ \sqrt[n]{y} \quad \forall x,y \in \mathbb{R}$

II. $\sqrt[n]{x} = \sqrt[m.n]{x^m} \quad \forall x \in \mathbb{R}$

III. $\sqrt[n]{x^m} = \sqrt[n]{x}^m \quad \forall x \in \mathbb{R}$

IV. $\sqrt[n]{x^n y} = x\sqrt[n]{y} \quad \forall x,y \in \mathbb{R}$

Resolución:

Aparentemente todas las proposiciones son correctas pero no siempre.

I. Si **n** es par y x ó y son negativos no es cierto.

II. Si **m** es par y x negativo no verifica.

III. Si **n** es par y x negativo no cumple.

IV. Si **n** es par y x negativo no cumple.

de donde se obtiene que

I. (F) II. (F) III.(F) IV. (F)

Problema 12

Reducir

$$\left(\sqrt[18]{\left[(x^4)^{64^2}\right]^8 . x^{16^4}} \right)^{\frac{4}{3}} ; \ x > 0$$

Resolución:

En el radicando

$$\left(\left(x^4\right)^{64^2} \right)^8 . x^{16^4} = x^{2^2 . (2^6)^2 . 2^3} . x^{(2^4)^4}$$

$$= x^{2 . 2^{16} + 2^{16}} = x^{3 . 2^{16}}$$

Luego

$$\left(\sqrt[2^{18}]{x^{3 . 2^{16}}} \right)^{\frac{4}{3}} = \sqrt[2^{18}]{x^{2^{18}}} = x$$

Problema 13

Efectuar

$$3^{-1} \sqrt[3]{3^{-1}} . \frac{3^{n+\frac{1}{3}}}{\frac{1}{3} . \sqrt[n]{3^{n^2}}} \quad ; \ n \in \mathbb{N} \ ; \ n \geq 2$$

Resolución:

$$3^{-1} . \sqrt[3]{3^{-1}} . \frac{3^n . 3^{1/3}}{3^{-1} . 3^n} = 3^{-1/3} . 3^{1/3} = 3^0 = 1$$

NOTA $\sqrt[n]{3^{n^2}} = 3^n$

Problema 14

Operar

$$\left\{ \left[\left(\frac{1}{5}\right)^2 + \left(\frac{5}{2}\right)^{-2} \right]^{-1} + \left[2 - \left(\frac{3}{5}\right)^{-1} \right]^{-1} \right\}^{\frac{1}{6}}$$

Resolución:

$$\left[\left(\frac{1}{5}\right)^2 + \left(\frac{5}{2}\right)^{-2} \right]^{-1} = \left(\frac{1}{25} + \frac{4}{25} \right)^{-1} = \left(\frac{5}{25} \right)^{-1} = 5$$

$$\left[2 - \left(\frac{3}{5}\right)^{-1} \right]^{-1} = \left(2 - \frac{5}{3} \right)^{-1} = \left(\frac{1}{3} \right)^{-1} = 3$$

$$\Rightarrow \{5+3\}^{1/6} = 8^{1/6} = (2^3)^{1/6} = 2^{1/2} = \sqrt{2}$$

Problema 15

Simplificar

$$\frac{\sqrt{a^3b^3\sqrt[4]{a^2b^2\sqrt[5]{ab}}}}{\sqrt[6]{\sqrt{\sqrt[4]{\sqrt[5]{a^6b^6}}}}}$$

Resolución:

Recordando que $(a.b)^n = a^n.b^n$

se tendrá

$$\frac{\sqrt{(ab)^3.\sqrt[4]{(ab)^2\sqrt[5]{ab}}}}{\sqrt[2.4.6.5]{(ab)^6}},$$

haciendo $ab = x$

Tenemos:

$$\frac{\sqrt{x^3\sqrt[4]{x^2\sqrt[5]{x}}}}{\sqrt[40]{x}} = \frac{\sqrt[2.4.5]{x^{(3.4+2)5+1}}}{\sqrt[40]{x}}$$

$$\frac{\sqrt[40]{x^{71}}}{\sqrt[40]{x}} = \sqrt[40]{\frac{x^{71}}{x}} = \sqrt[40]{x^{70}} = \sqrt[4]{x^7}$$

al reponer x por ab se obtiene $\sqrt[4]{(ab)^7}$

Problema 16

Reducir

$$\underbrace{\sqrt[70]{x\sqrt[70]{x\sqrt[70]{x\ldots..\sqrt[70]{x^{69}\sqrt{x}}}}}}_{71\text{ radicales}}$$

Resolución:

Busquemos alguna ley de formación

$$\sqrt[70]{x^1\sqrt[69]{x}} = \sqrt[70.69]{x^{69+1}} = \sqrt[69]{x},$$

si tomamos los dos últimos radicales resulta el último.

De donde puede observarse que esa operación se va repetir, dejando el mismo resultado, entonces, todo se reducirá a $\sqrt[69]{x}$

Problema 17

Simplificar

$$\frac{\sqrt[9]{5}\sqrt[3]{125}+\sqrt[3]{50}+\sqrt[3]{20}}{\left(\sqrt{\sqrt[9]{25\sqrt[3]{5}}}\right)^{\sqrt[3]{25}+\sqrt[3]{10}+\sqrt[3]{4}}}$$

Resolución:

Nota $\left(\sqrt{\sqrt[9]{25}}\right)^{\sqrt[3]{5}} = \left(\sqrt[18]{5^2}\right)^{\sqrt[3]{5}} = \sqrt[9]{5}^{\sqrt[3]{5}}$

Luego se tendrá

$$\frac{\sqrt[9]{5}\sqrt[3]{125}+\sqrt[3]{50}+\sqrt[3]{20}}{\left(\sqrt[9]{5}\sqrt[3]{5}\right)^{\sqrt[3]{25}+\sqrt[3]{10}+\sqrt[3]{4}}} = \frac{\sqrt[9]{5}\sqrt[3]{5}\left(\sqrt[3]{25}+\sqrt[3]{10}+\sqrt[3]{4}\right)}{\sqrt[9]{5}\sqrt[3]{5}\left(\sqrt[3]{25}+\sqrt[3]{10}+\sqrt[3]{4}\right)} = 1$$

Problema 18

Calcular aproximadamente cada expresión

$$A = \sqrt{5\sqrt{5\sqrt{5}\ldots..}}$$

$$B = \sqrt{72+\sqrt{72+\sqrt{72+\ldots.}}}$$

$$C = \sqrt[5]{\frac{64}{\sqrt[5]{\frac{64}{\sqrt[5]{\frac{64}{\vdots}}}}}}$$

$$D = \sqrt{8\sqrt{2\sqrt{8\sqrt{2}\ldots..}}}$$

$$E = \sqrt[5]{5}^{\sqrt[5]{5}^{\sqrt[5]{5}^{\cdot^{\cdot}}}}$$

Resolución:

Caso de las infinitas veces de una operación.

Usaremos el criterio siguiente

"Infinito es una cantidad inmensamente grande que si quitas 1 ; 2 ; 3 ; ... n ; n ∈ N no se altera, sigue infinito".

Veamos

I. $A = \sqrt{5\underbrace{\sqrt{5\sqrt{5\sqrt{5\ldots.}}}}_{A}} \Rightarrow A = \sqrt{5.A}$

elevando al cuadrado $A^2 = 5A \Rightarrow A = 5$

II. $B = \sqrt{72 + \underbrace{\sqrt{72+\sqrt{72+\ldots.}}}_{B}}$

$\Rightarrow B = \sqrt{72 + B}$

Al cuadrado $B^2 = 72 + B$

$\Rightarrow B^2 - B = 72$

$\Rightarrow B(B-1) = 9(9-1)$

Por comparación se obtiene $B = 9$

III. $C = \sqrt[5]{\dfrac{64}{\sqrt[5]{\dfrac{64}{\sqrt[5]{\dfrac{64}{\vdots}}}}}} \Rightarrow C = \sqrt[5]{\dfrac{64}{C}}$

Elevando a la quinta

$\Rightarrow C^5 = \dfrac{64}{C} \Rightarrow C^6 = 64 \Rightarrow C = \sqrt[6]{64}$

$\therefore C = 2$

IV. $D = \sqrt{8\underbrace{\sqrt{2\sqrt{8\sqrt{2\ldots.}}}}_{D}}$

$\Rightarrow D = \sqrt{8\sqrt{2}.D}$

Al cuadrado $D^2 = 8\sqrt{2D}$

al cuadrado $D^4 = 8^2 . 2D$

$\Rightarrow D^3 = 128 \Rightarrow D = \sqrt[3]{128}$

$\Rightarrow D = \sqrt[3]{64.2}$

$D = 4\sqrt[3]{2}$

V. $E = \sqrt[5]{5}^{\sqrt[5]{5}^{\sqrt[5]{5}^{\iddots^{E}}}} \Rightarrow E = \sqrt[5]{5}^{E}$

$\Rightarrow \sqrt[E]{E} = \sqrt[5]{5}$

Por comparación $E = 5$

Problema 19

Calcular el mayor valor de n, si

$$(n\sqrt{n})^{\frac{1}{n\sqrt{n}}} = \left[\left[\left[\left(\left(2^{1+\frac{1}{1}}\right)^{1+\frac{1}{2}}\right)^{1+\frac{1}{3}}\right]^{1+\frac{1}{4}}\right]\right]^{\frac{1}{10}}$$

Resolución:

$$(n\sqrt{n})^{\frac{1}{n\sqrt{n}}} = 2^{2\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{5}{4}\cdot\frac{1}{10}} = 2^{\frac{1}{2}},$$

así mismo, $2^{\frac{1}{2}} = \sqrt[2]{2^1} = \sqrt[2.2]{2^{1.2}} = \sqrt[4]{4} = 4^{\frac{1}{4}}$

de donde $n\sqrt{n} = 4 \quad \vee \quad n\sqrt{n} = 2$

Como piden el mayor valor de n se tomará

$n\sqrt{n} = 4 \Rightarrow$ al cuadrado:

$n^2 . n = 4^2 \Rightarrow n^3 = 16 \Rightarrow n = \sqrt[3]{16}$

Problema 20

Simplificar

$$\sqrt[n^{n^n}]{n^{n^n+n^n}} \cdot \sqrt[n^{n^n}]{\left(\frac{1}{n}\right)^{n^n+n^n}}$$

Resolución:

NOTA $\sqrt[m]{a^\alpha} \cdot \sqrt[m]{b^\alpha} = \sqrt[m]{(ab)^\alpha}$

En el problema se tendrá

$$\sqrt[n^n]{\sqrt[n^{n+n^n}]{n^{n+n^n}}} \cdot \sqrt[n^n]{\sqrt[n^{n+n^n}]{\left(\frac{1}{n}\right)^{n^{n+n^n}}}}$$

$$= \sqrt[n^n]{\left(n \cdot \frac{1}{n}\right)^{n^{n+n^n}}} = 1$$

NOTA: $n \cdot \frac{1}{n} = 1$

Problema 21

Simplificar

$$\frac{\sqrt[n^2+1]{(n^2+1)^{(n^2+1)^2} \cdot (n^2+1)^1} \cdot \sqrt[n^2+1]{(n^2+1)^{1-(n^2+1)^2}}}{(n^2+1)^{\frac{2}{n^2+1}}}$$

donde: $n \in \mathbb{N}$

Resolución:

NOTA: $\frac{\sqrt[m]{a^\alpha} \cdot \sqrt[m]{a^\beta}}{\sqrt[m]{a^\gamma}} = \sqrt[m]{a^{\alpha+\beta-\gamma}}$

En el problema se tiene

$$\sqrt[n^2+1]{(n^2+1)^{(n^2+1)^2 \cdot 1 + 1 - (n^2+1)^2 \cdot 2}} = \sqrt[n^2+1]{(n^2+1)^0} = 1$$

Problema 22

Reducir la siguiente expresión

$$\frac{\sqrt[5]{x^2 \sqrt[3]{x^4 \sqrt{x^7}}}}{\sqrt[3]{\dfrac{\sqrt[4]{\dfrac{\sqrt[5]{\dfrac{1}{x^6}}}{x}}}{x^2}}} ; x > 0$$

Resolución:

En el numerador se utilizará la regla práctica en radicales sucesivos

$$\sqrt[5]{x^2 \sqrt[3]{x^4 \sqrt{x^7}}} = \sqrt[5.3.2]{x^{1[(2.3)+4].2+7}} = \sqrt[30]{x^{27}} = \sqrt[10]{x^9}$$

En el denominador (exponente negativo)

Recuerde:

$$\frac{a}{b} = ab^{-1}$$

Luego tenemos

$$\sqrt[3]{\frac{\sqrt[4]{\dfrac{\sqrt[5]{\dfrac{1}{x^6}}}{x}}}{x^2}} = \sqrt[3]{x^{-2} \cdot \sqrt[4]{x^{-1} \cdot \sqrt[5]{x^{-6}}}}$$

Usando la regla práctica

$$\sqrt[3.4.5]{x^{(-2.4-1).5-6}} = \sqrt[60]{x^{-51}} = \sqrt[20]{x^{-17}}$$

Luego se tiene

$$\frac{\sqrt[10]{x^9}}{\sqrt[20]{x^{-17}}} = \frac{\sqrt[20]{x^{18}}}{\sqrt[20]{x^{-17}}} = \sqrt[20]{x^{18-(-17)}} = \sqrt[20]{x^{35}} = \sqrt[4]{x^7}$$

Problema 23

Hallar el exponente de x en

$$S = \underbrace{\sqrt[4]{x^3 \sqrt[4]{x^3 \sqrt[4]{x^3 \ldots \sqrt[4]{x^3}}}}}_{97 \text{ radicales}}$$

Resolución:

Utilizaremos una ley que nos permita hallar una regla de formación (**método inductivo**).

Si fuera 1 radical

$$\sqrt[4]{x^3} = x^{\frac{3}{4}}$$

Si fuera 2 radicales

$$\sqrt[4]{x^3 \sqrt[4]{x^3}} = \sqrt[16]{x^{15}} = x^{\frac{15}{16}}$$

Si fuera 3 radicales

$$\sqrt[4]{x^3 \sqrt[4]{x^3 \sqrt[4]{x^3}}} = \sqrt[64]{x^{63}} = x^{\frac{63}{64}}$$

Veamos la formación de sus exponentes

$$\frac{3}{4} ; \frac{15}{16} ; \frac{63}{64} \ldots\ldots$$

$$\frac{4^1-1}{4^1} ; \frac{4^2-1}{4^2} ; \frac{4^3-1}{4^3} \ldots\ldots$$

Para 97 radicales su exponente será

$$\frac{4^{97}-1}{4^{97}}$$

Problema 24

Si se cumple que $2^{22} + 1024 = 1024a$

Calcular $2^{2^{2^2}} - \left(\left(2^2\right)^4\right)^{0.5} . a$

Resolución:

De la condición

$$2^{22} + 2^{10} = 2^{10}. a \Rightarrow 2^{12} + 1 = a$$

Luego

$$2^{2^{2^2}} - 2^{2.4.0,5}\left(2^{12}+1\right) = 2^{16}-2^4(2^{12}+1)$$
$$= 2^{16}-2^{16}-2^4 = -16$$

Problema 25

Si se cumple que

$$A^{A^{A^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}} = \sqrt[x]{x\sqrt[x]{x\sqrt[x]{x.....}}},$$

además $A = \left(\sqrt[3]{3\sqrt{3}}\right)^{\frac{\sqrt{3}}{3}}$, según ello calcular un valor de "x".

Resolución:

Simplificando en A

$$A = \left(\sqrt[3]{3\sqrt{3}}\right)^{\frac{\sqrt{3}}{3}}$$

NOTA $3\sqrt{3} = \sqrt{3}^3$

$$\Rightarrow A = \left(\sqrt[3]{\left(\sqrt{3}\right)^3}\right)^{\frac{\sqrt{3}}{3}} \Rightarrow A = \sqrt{3}^{\frac{1}{\sqrt{3}}}$$

$$A^{A^{A^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}} = \sqrt[x]{x\sqrt[x]{x\sqrt[x]{x.....}}} = y$$

Del problema 18

$$A^{A^{A^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}} = y \Rightarrow A^y = y \Rightarrow A = y^{\frac{1}{y}} = \sqrt{3}^{\frac{1}{\sqrt{3}}}$$

Por comparación: $y = \sqrt{3}$

asimismo

$$\sqrt[x]{x\underbrace{\sqrt[x]{x\sqrt[x]{x.....}}}_{y}} = y \Rightarrow y = \sqrt[x]{xy}$$

Despejando y de $xy = y^x$ se tiene

$$\Rightarrow y = \sqrt[x-1]{x} = \sqrt{3}$$

buscando un valor $\sqrt[x-1]{x} = \sqrt[3-1]{3}$

de donde $x = 3$

Problema 26

Calcular un valor de n de la igualdad.

$$n^{n^{n^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}} = 72 + \sqrt{n}^{72+\sqrt{n}^{72+\sqrt{n}^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}}$$

Resolución:

Igualando a una segunda incógnita:

$$n^{n^{n^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}} = 72+\sqrt{n}^{72+\sqrt{n}^{72+\sqrt{n}^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}} = y$$

de donde $n^{n^{n^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}} = y \Rightarrow n = \sqrt[y]{y}$ ..... (α)

asimismo $72+\sqrt{n}^y = y$ .... (β)

(α) en (β): $72 + \sqrt{\sqrt[y]{y}^{\,y}} = y$

entonces $y - \sqrt{y} - 72 = 0$

de donde $y = 81$

Luego en α $n = \sqrt[81]{81}$

Problema 27

De la igualdad

$$\sqrt[x+y]{\left(\frac{\sqrt[x]{xy^{-1}}}{\sqrt[y]{yx^{-1}}}\right)^{x^2}} = \frac{1}{\sqrt[3]{3}} \; ; \; x, y \in \mathbb{N}$$

hallar el valor de $\frac{3x}{y}$

Resolución:
De la igualdad a exponentes fraccionarios

$$\sqrt[x+y]{\left(\frac{x^{\frac{1}{x}}.y^{-\frac{1}{x}}}{y^{\frac{1}{y}}.x^{-\frac{1}{y}}}\right)^{x^2}} = \sqrt[x+y]{\left(\frac{x^{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}}}{y^{\frac{1}{y}+\frac{1}{x}}}\right)^{x^2}}$$

$$\sqrt[x+y]{\left(\frac{x^{\frac{x+y}{xy}}}{y^{\frac{x+y}{xy}}}\right)^{x^2}} = \left(\left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{1}{xy}}\right)^{x^2} = \left(\frac{x}{y}\right)^{\left(\frac{x}{y}\right)}$$

Por dato

$$\left(\frac{x}{y}\right)^{\left(\frac{x}{y}\right)} = \frac{1}{\sqrt[3]{3}} = \left(\frac{1}{3}\right)^{\left(\frac{1}{3}\right)}$$

Por comparación

$$\frac{x}{y} = \frac{1}{3} \quad \therefore \quad \frac{3x}{y} = 1$$

Problema 28

Calcular el valor de

$$F = \underbrace{\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}\ .....\ \sqrt{2\sqrt{2^{2-x}}}}}}_{\text{n radicales}}$$

si además $x = 2^{n+1}$

Resolución:
Será equivalente a

$$F = \underbrace{\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}\ ...\ \sqrt{2}}}}_{\text{(n-1) rad.}} \cdot \sqrt[2.2.....2]{2^{2-x}}$$

Del problema 23:

$$F = \sqrt[2^{n-1}]{2^{2^{n-1}-1}} \cdot \sqrt[2^n]{2^{2-x}} = 2^{\frac{2^{n-1}-1}{2^{n-1}}} \cdot 2^{\frac{2-2^{n+1}}{2^n}}$$

$$F = 2^{\frac{2^n-2}{2^n}+\frac{2-2^{n+1}}{2^n}} = 2^{\frac{2^n \cdot 2+2-2^n \cdot 2}{2^n}} = 2^{1-2}$$

$$\therefore F = 2^{-1} = \frac{1}{2}$$

Problema 29

El valor aproximado de

$$A = \sqrt{2\sqrt{4\sqrt{8\sqrt{16}.....}}} \text{ es:}$$

Resolución:

$$A = \sqrt{2} \cdot \sqrt[4]{4} \cdot \sqrt[8]{8} \cdot \sqrt[16]{16} \ ...$$

$$A = 2^{\frac{1}{2}} \cdot 2^{\frac{2}{4}} \cdot 2^{\frac{3}{8}} \cdot 2^{\frac{4}{16}} + ...$$

$$A = 2^{\frac{1}{2}+\frac{2}{4}+\frac{3}{8}+\frac{4}{16}+.....}$$

Sea **e** el exponente de **2**

$$e = \frac{1}{2} + \frac{2}{4} + \frac{3}{8} + \frac{4}{16} + ... (1)$$

$$2e = 1 + \frac{2}{2} + \frac{3}{4} + \frac{4}{8} + ... (2)$$

(2)-(1):

$$e = \underbrace{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + ...}_{\frac{1}{1-\frac{1}{2}}}$$

$$\Rightarrow e = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2$$

$$\therefore A = 2^2 = 4$$

NOTA

$a + ar + ar^2 + ar^3 + ... = \frac{a}{1-r}$

Si: $-1 < r < 1$

Problema 30

Si el reducido de

$$\sqrt{x\sqrt{x^3\sqrt{x^5\sqrt{x^7}.....\sqrt{x^{2n-1}}}}} \text{ es } x^{a-\left(\frac{bn-a}{2^n}\right)}$$

hallar el valor de $\frac{a+1}{b+1} - \frac{a-1}{b-1}$

Resolución:
Deduciendo

Para 1 radical $\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$

Para 2 radicales $\sqrt{x\sqrt{x^3}} = x^{\frac{5}{4}}$

Como el exponente de x es de la forma

$$\frac{a \cdot 2^n - bn - a}{2^n}$$

Por definición de identidad

Si $n=1 \Rightarrow 2a-b-a = 1$

$\Rightarrow a-b = 1 \ldots\ldots\ldots (\alpha)$

Si $n=2 \Rightarrow 4a\ 2b-a = 5$

$\Rightarrow 3a-2b = 5 \ldots\ldots\ldots (\beta)$

De (α) y (β): $a = 3 \ ; \ b = 2$

Luego lo pedido

$\frac{a-1}{b-1} - \frac{a-1}{b-1}$ es $\frac{3+1}{2+1} - \frac{3-1}{2-1} = \frac{4}{3} - 2 = -\frac{2}{3}$

Problema 31

Hallar el exponente de "x" en

$$A = \sqrt[n]{x^{n-1}\sqrt[n-1]{x^{n-2}\sqrt[n-2]{x^{n-3}\ldots\sqrt[3]{x^2\sqrt{x}}}}}$$

Resolución:
Buscamos una ley de formación deductivamente:

Para 1 radical $\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$

Para 2 radicales $\sqrt[3]{x^2\sqrt{x}} = x^{\frac{5}{6}}$

Para 3 radicales $\sqrt[4]{x^3\sqrt[3]{x^2\sqrt{x}}} = x^{\frac{23}{24}}$

$\vdots$

Se formà del siguiente modo:

$$\frac{\lfloor 2-1}{\lfloor 2} \ ; \ \frac{\lfloor 3-1}{\lfloor 3} \ ; \ \frac{\lfloor 4-1}{\lfloor 4}$$

Observamos que tiene (n-1) radicales, luego para (n-1) radicales se tendrá

$$A = x^{\frac{\lfloor n-1}{\lfloor n}}$$

$\therefore$ El exponente de x es $\frac{\lfloor n-1}{\lfloor n}$

Problema 32

Simplificar

$$\left\{\left[\frac{\left(a^{\frac{a+1}{a}} + a^{\frac{a-1}{a}}\right)^a}{a^{a-1}\cdot\left(a^{\frac{2}{a}}+1\right)^{\frac{1}{a}}}\right]^{\frac{a}{a^2-1}} - 1\right\}^a, \ a \in \mathbb{R}^+$$

Resolución:
Veamos

$$a^{\frac{a+1}{a}} = a^{1+\frac{1}{a}} = a \cdot \sqrt[a]{a}$$

$$a^{\frac{a-1}{a}} = a^{1-\frac{1}{a}} = \frac{a}{\sqrt[a]{a}}$$

$$\Rightarrow \left(a^{\frac{a+1}{a}} + a^{\frac{a-1}{a}}\right)^a = \left(a\sqrt[a]{a} + \frac{a}{\sqrt[a]{a}}\right)^a$$

$$a^a\left(\frac{\sqrt[a]{a^2}+1}{\sqrt[a]{a}}\right)^a = a^{a-1}\cdot\left(\sqrt[a]{a^2}+1\right)^a$$

Reemplazando, se tiene

$$\left\{\left[\frac{a^{a-1}\cdot\left(\sqrt[a]{a^2}+1\right)^a}{a^{a-1}\cdot\left(\sqrt[a]{a^2}+1\right)^{\frac{1}{a}}}\right]^{\frac{a}{a^2-1}} - 1\right\}^a$$

$$= \left\{\left[\left(\sqrt[a]{a^2}+1\right)^{\frac{a^2-1}{a}}\right]^{\frac{a}{a^2-1}} - 1\right\}^a$$

$$= \left(\sqrt[a]{a^2}+1-1\right)^a = a^2$$

Problemas Propuestos

1. Si $a^{2a^6} = 3$; $a > 0$

calcular: $\left(a^{a^{a^6}}\right)^{\sqrt{3}}$

A) $\sqrt{3}$ B) $\sqrt{2}$ C) 1
D) 3 E) $\sqrt[3]{3}$

2. Si **n** es un número impar

$$A = \sqrt[3]{4\sqrt[3]{4\sqrt[3]{4 \ldots . \sqrt[3]{4}}}}$$

de "n" radicales

$$B = \sqrt[3]{16 \div \sqrt[3]{16 \div \sqrt[3]{16 \ldots . \div \sqrt[3]{16}}}}\ ,$$

de "n" radicales

entonces **A . B** es:

A) 4 B) 2 C) 1
D) $\frac{1}{2}$ E) $\frac{1}{4}$

3. Luego de efectuar

$$\left[256\sqrt{2}\sqrt{2}\sqrt[(1\sqrt{8})]{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{2^{\frac{1}{2}}}}\right]$$

se obtiene:

A) 1 B) $\sqrt{2}$ C) $\sqrt{8}$
D) 2 E) 4

4. Simplificar

$$\left(\frac{x^{x^x} + x^{-x^x}}{x^{-x^x} + x^{x^x}}\right)^{\frac{x^x}{1-x^{2x}}}, \quad \text{si: } x > 0$$

A) x^2 B) $\sqrt{x}$ C) x
D) x^3 E) 1

5. Luego de resolver

$$x^{x^{\sqrt[4]{x}+0.25}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{2}^{1-2\sqrt{2}}}$$

Indicar el valor de $\sqrt[4x+3]{x^8}$

A) 16^{-1} B) 8 C) 8^{-1}
D) 4^{-1} E) 2^{-1}

6. Señalar la suma de los exponentes de x e y luego de reducir

$$\left(\frac{\sqrt{\frac{xy}{\sqrt[y]{(xy)^x}}}}{\frac{x-y}{2}}\right)^{-x} \cdot \left\{\frac{\sqrt{\frac{xy}{\sqrt[y]{xy}}}}{\frac{y-1}{4}}\right\}^{y} \cdot \sqrt[y]{xy}^{2x}$$

Sabiendo que $x - y = 2k \ \wedge \ y - 1 = 4r$
donde $k, r \subset \mathbb{N}$

A) 2 B) 4 C) 6
D) 8 E) 10

7. Señalar el exponente final de x en

$$\sqrt[3]{x^{\frac{1}{3}} \cdot \sqrt[3]{x^{\frac{1}{3}} \sqrt[3]{x^{\frac{1}{3}}}}} \ldots\ldots \text{ "k" radicales}$$

A) $\frac{1}{2}\left(\frac{3^k-1}{3^k}\right)$ B) $\frac{1}{9}\left(\frac{3^k+1}{3^k}\right)$ C) $\frac{1}{3}\left(\frac{3^k-1}{3^k}\right)$
D) $\frac{3^k+1}{3^k-1}$ E) $\frac{1}{2}\left(\frac{3^k-1}{3^{k+1}}\right)$

8. Indicar el exponente final de x en

$$\sqrt[3]{x\sqrt[5]{x^4\sqrt[9]{x^{24}\sqrt[17]{x^{240}}}}} \ldots . \text{ "n" radicales}$$

A) $\frac{2^n+1}{2^n-1}$ B) $\frac{2^n}{2^n-1}$ C) $\frac{2^n}{2^n+1}$
D) $\frac{2^n-1}{2^n+1}$ E) $\frac{2^n+1}{2^n}$

9. De la igualdad $x^{(x-1)^2} = 2x+1$

calcular $x - \frac{1}{x}$

A) 2 B) 4 C) 5
D) 7 E) 10

10. Calcular aproximadamente

$$A = \sqrt{2\sqrt{4\sqrt{2\sqrt{4}}}} \ldots\ldots$$

A) 2 B) $2\sqrt[3]{2}$ C) $\sqrt{2}$
D) 16 E) $\sqrt[4]{2^5}$

11. Hallar una relación entre x e y en

$$\sqrt[y]{\frac{x^{xy+x}\,.\,y^{y^2+y}}{y^y\,.\,x^x}} = \frac{1}{\sqrt[3]{3}}$$

A) $y = x$ B) $y = 3x$ C) $y = 2x$
D) $2x = 3y$ E) $y = 4x$

12. Simplificar

$$\frac{\left[\sqrt[5]{5\sqrt{\frac{5}{4}}}\,.\,\sqrt{5^{\left(\frac{5}{3\sqrt{45}}\right)^{-1}}}\right]^{\sqrt{5}}}{125}$$

A) 1 B) 5 C) 25
D) 125 E) $\sqrt[5]{5}$

Indicar el valor de verdad de cada una de las proposiciones

I. $(-4)^{\frac{2}{4}} = (-8)^{\frac{1}{3}} = -2$

II. $\sqrt{a^n} = \sqrt{a}^{\,n} \Leftrightarrow a > 0 \quad (a=0 \wedge n>0)$

III. $\left(\left(\frac{x-1}{4}\right)^{-1}\right)^0 = 1 \;\forall x \in \mathbb{R}$

A) FVF B) FVV C) FFF
D) VFF E) VVF

Con respecto a la expresión

$$\frac{\left(\sqrt[x]{1\,.\,x\,.\,x^2\,.\,x^3\,.\,\ldots\,.\,x^x}\right)^2}{\underbrace{x^x + x^x + \ldots\ldots + x^x}_{x \text{ sumandos}}}$$

Establecer el valor de verdad de cada una de las proposiciones

I. Se reduce a 1, si $x \in \mathbb{N} - \{1\}$
II. Se reduce a x, si $x \in \mathbb{N} - \{1\}$
III. Se reduce a x^{x+1}, si $x \in \mathbb{N} - \{1\}$

A) VFF B) FVV C) FFV
D) FVF E) FFF

Sabiendo que x e y verifican la igualdad $xy + x + y = 1$, halle el valor de

$$\left(\frac{\sqrt[x+1]{4^{x+1}}}{\sqrt[x+1]{4^{x-1}}}\right)^{\frac{(x-y)^{-1}}{3-xy}}$$

A) 1 B) 2 C) $\sqrt{2}$
D) 4 E) 8

16. Luego de resolver la ecuación exponencial:

$$x^{x^{0,5}} = \sqrt{0,5}$$

el valor de x toma la forma 4^n donde "n" es igual a

A) -4 B) -7 C) -10
D) -12 E) -16

17. Sabiendo que $a^b = \left(\frac{1}{b}\right)^a = 2$

hallar el valor de

$$\left(\frac{a^{b^{-1}a} + b^{a^{-1}b}}{a^{b^{-1}a} + b^{a^{-1}b}}\right)^{1 - a^{b^{-1}} b^a}$$

A) 2 B) $\frac{1}{2}$ C) 4
D) $\frac{1}{4}$ E) 8

18. Si $x^{\sqrt{x}} = 4$, calcular el valor de:

$$\left[x^{\left(\frac{1}{2^{10}}\right)}\,.\,x^{\left(\frac{1}{2}+\sqrt{x}\right)}\right]^{\sqrt{x}}$$

A) 3 B) 4 C) 2
D) $\sqrt[4]{2}$ E) $4^{\frac{1}{4}}$

19. Calcular el exponente final de x en

$$\sqrt{x\,\sqrt[3]{x^2\,\sqrt[4]{x^3\,\sqrt[5]{x^4\,\ldots}}}}$$

A) 1 B) 2 C) 3
D) $\frac{1}{2}$ E) $\frac{1}{4}$

20. Dada la siguiente sucesión

$x_1 = \sqrt{2}$; $x_2 = \sqrt{2\sqrt{2}}$; $x_3 = \sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}$; ....

Calcular $\dfrac{x_4^2\,.\,x_{11}^2}{x_3\,.\,x_{10}}$

A) 2 B) 4 C) 5
D) $\frac{1}{2}$ E) $\frac{1}{4}$

21. Se tiene la siguiente igualdad

$$\sqrt{x^{\sqrt{x}}} \cdot \sqrt{x} = \sqrt{a^{\sqrt{a}-1}}$$

anunciar el valor de no verdad de las siguientes proposiciones:

I. Las expresiones quedan bien definidas, si: $x \in \mathbb{R}$

II. La igualdad se verifica si y sólo si $a \in \mathbb{R}^+$; $x = a$

III. Si x existe entonces a existe

A) FVV B) VFF C) VVF
D) FFV E) FFF

22. Reducir $\dfrac{(x^5)^{x^{-x}} + x^{x-x^x}}{x(x^{x+4}+1)}$, si: $x^x = 5$

A) 1 B) x C) $x+1$
D) x^2 E) x^5

23. Si $A = \left(2^{2^{-3^5}}\right)^{2^{3^5}} - \left(3^{3^{n^3}}\right)^{3^{n^3}}$

$B = (\ldots\ldots((2^2)^4)^6 \ldots\ldots)^{14}$

Halle el valor de $\dfrac{B^{\frac{1}{n}}}{-2^{2^7}(A)}$

Donde $1.2.3.4.5.6.7 = n$

A) -1 B) 1 C) 2
D) -2 E) $\frac{1}{2}$

24. Determinar el valor de

$$\frac{\sqrt[3]{\frac{1}{2}\sqrt[4]{\frac{3}{4}\sqrt[5]{\frac{5}{6}}}} \cdot \sqrt[3]{\frac{3}{2}\sqrt[4]{\frac{5}{3}\sqrt[5]{\frac{4}{5}}}}}{\sqrt[3]{\frac{3}{4}\sqrt[4]{\frac{5}{4}\sqrt[5]{\frac{2}{3}}}}}$$

A) 1 B) 2 C) $\frac{3}{5}$
D) $\frac{4}{3}$ E) $\frac{2}{3}$

25. Calcular el valor de

$$a^{\left(\frac{a^{a-1}}{a^a-1}\right)} \quad ; \text{ si } a^{-a} = \frac{1}{3}$$

A) $2\sqrt{3}$ B) $3\sqrt{3}$ C) $4\sqrt{3}$
D) $5\sqrt{3}$ E) $\sqrt{3}$

26. Analizar las proposiciones siguientes:

I. En $\mathbb{R}$: $\sqrt{16} = 4 \wedge \sqrt[3]{8} = -2$

II. $\sqrt{(-3)^2} = \sqrt{3^2} = 3 \vee \sqrt{(-7)^2} = -7$

III. En $\mathbb{R}$: $\sqrt{(-1)(-2)} = \sqrt{-1}.\sqrt{-2}$

y determine su valor de verdad

A) FVF B) FFF C) VVV
D) VVF E) FFV

27. Determinar el valor de verdad de las proposiciones:

I. $\forall\, x \in \mathbb{R}\,; x^0 = 1 \Rightarrow (-2)^0 = 1$

II. Si: $x^m.x^n = x^{m+n} \Rightarrow 3^3.3^3 = 9^9$

III. $\forall x \in \mathbb{R}\,; (-x)^2 = x^2 \vee (-3)^2 = -9$

A) VFV B) VVF C) VVV
D) VFF E) FFF

28. Reducir

$$A = \sqrt[n]{\frac{(xy)^n + (yz)^n + (zx)^n}{x^{-n} + y^{-n} + z^{-n}}} \cdot \frac{x^{-1}.z^{-1}}{y}$$

$\forall\, n \in \mathbb{N} - \{1\}$; $xyz \neq 0$

A) 1 B) 0 C) x
D) $x^n y^n z^n$ E) xyz

29. Hallar el valor de

$$M = \frac{2^{x+1} + 2^{x+2} + 2^{x+3} + 2^{x+4}}{2^{x-1} + 2^{x-2} + 2^{x-3} + 2^{x-4}}$$

A) 2 B) 1 C) 16
D) $\frac{1}{5}$ E) 32

30. Luego de reducir

$$\frac{\sqrt[3]{a\sqrt[4]{a^3\sqrt[3]{a\sqrt[4]{a^3}}}}}{\sqrt[4]{a\sqrt[3]{a^2\sqrt[4]{a\sqrt[3]{a^2}}}}}$$

dar el exponente de a

A) $\frac{72}{13}$ B) $\frac{19}{72}$ C) $\frac{13}{36}$
D) $\frac{1}{6}$ E) $\frac{13}{72}$

31. Si $x^x=2$; calcular el valor de $x^{x^{1+2x^{1+x}}}$

A) 2^{16} B) 2^{64} C) 2^{32}
D) 2^4 E) 2^{18}

32. Simplificar

$$\frac{4^{2^{-1}}-16^{2^{-1}}-25^{2^{-1}}}{36^{2^{-1}}+25^{2^{-1}}+81^{2^{-1}}}+\left[\frac{2^{2^{(5)^0}}+\left(\frac{1}{3}\right)^{-2}}{\left(\frac{1}{3}\right)^{-2\sqrt{2}^2}+\left(\frac{1}{5}\right)^{-\left(\frac{1}{5}\right)^0}}\right]^{3^{0^7}}$$

A) $\frac{9}{86}$ B) $\frac{86}{9}$ C) $\frac{43}{11}$
D) $\frac{20}{41}$ E) $\frac{31}{86}$

33. Reducir

$$S=\left(x^{\frac{n}{n-1}}.\sqrt[n-1]{\frac{y^{n+1}}{\sqrt[n]{xy^{n+1}}}}\right)^{\frac{n}{n+1}}$$

A) x B) x^n C) xy
D) 1 E) $\frac{x}{y}$

Simplificar $\forall\ x\in\mathbb{N}-\{1\}$

$$E=\frac{\sqrt[x]{2^x+3^{-x}}+\sqrt[x]{2^{-x}+3^x}}{\sqrt[x]{6^x+1}}$$

A) $\frac{5}{6}$ B) $\frac{1}{5}$ C) 2
D) 3 E) 5

Efectuar

$$\frac{\left(a^{3^2}b^{3^3}\right)^{3^2}+\left(a^{-1}b^{-1/2}\right)^2-\left(a^{\frac{3}{2}}.b^{\frac{9}{2}}\right)^{\frac{2}{3}}}{a^{-1}.b}$$

A) 1 B) $\frac{a^2}{b}$ C) $\frac{a}{b}$
D) $\frac{1}{ab^2}$ E) $\frac{b}{a}$

36. Si $x=\sqrt{3\sqrt{3\sqrt{3.....}}}$; además: $y=2^{x/3}$

entonces: $M=\sqrt[x-1]{y+2}$ es:

A) $\sqrt[3]{3}$ B) 4 C) $\sqrt{3}$
D) 2 E) 16

37. Reducir $P=\frac{3^{\frac{n+2}{n}}.(48)^{\frac{2}{n}}.9}{12^{4/n}}$

A) 3 B) 9 C) 27
D) 1 E) 12

38. Si $A=\sqrt{20+\sqrt{20+\sqrt{20+.....}}}$,

además $T=\sqrt[4]{A+11+\sqrt[4]{A+11+\sqrt[4]{A-11+.....}}}$

Calcular $\sqrt[4]{T^4-T}$

A) 1 B) 2 C) 4
D) 6 E) 8

39. Calcular el exponente final de x en

$$S(x)=\sqrt[3]{x\sqrt[3]{x\sqrt[3]{x}.....\text{ "n" radicales}}}$$

A) $3^n-1/2^n$ B) $3^n-1/3^n$ C) $3^n-1/2$
D) $3^n/2^n$ E) $\frac{3^n-1}{2.3^n}$

40. Si el exponente final de x es 15 en

$$E=\left\{\frac{\sqrt[a]{x^{a+1}\sqrt[a]{x^{a^2+2}\sqrt[a]{x^{a^3+3}}}}}{\sqrt[a]{x\sqrt[a]{x^2\sqrt[a]{x^3}}}}\right\}^a$$

El valor de "a" es

A) 8 B) 5 C) 3
D) 3a E) 1

1 A	11 B	21 B	31 A
2 A	12 C	22 A	32 E
3 E	13 A	23 B	33 C
4 C	14 A	24 A	34 A
5 A	15 B	25 B	35 D
6 D	16 A	26 A	36 D
7 E	17 E	27 A	37 C
8 D	18 E	28 A	38 B
9 A	19 A	29 E	39 E
10 B	20 B	30 E	40 B

Claves