

INTEGRAL DEFINIDA.-CALCULO DE AREAS

1.-Calcula el área del recinto limitado por la parábola $y=x^2$ y las rectas $y=0$, $x=2$, $x=6$.

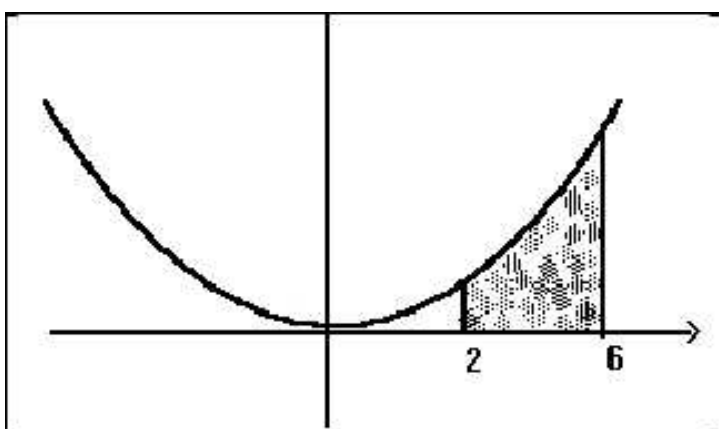
Solución:

La recta $y = 0$ es el eje x .

El área del recinto limitado por una función $f(x)$, el eje x y la rectas $x=a$, $x=b$,

viene dada por el valor absoluto de la integral $I = \int_a^b f(x)dx$

siempre que la función $f(x)$ no corte al eje x en ningún punto interior del intervalo $[a,b]$



$$\begin{aligned}
 I &= \int_2^6 x^2 dx = \\
 &= \left[\frac{x^3}{3} \right]_2^6 = \frac{6^3}{3} - \frac{2^3}{3} = \frac{208}{3} \\
 \text{Area} &= \left| \frac{208}{3} \right| = \frac{208}{3} \text{ u}^2
 \end{aligned}$$

2.- Calcula el área limitada por la curva $y = x^3 - 6x^2 + 8x$ y el eje x

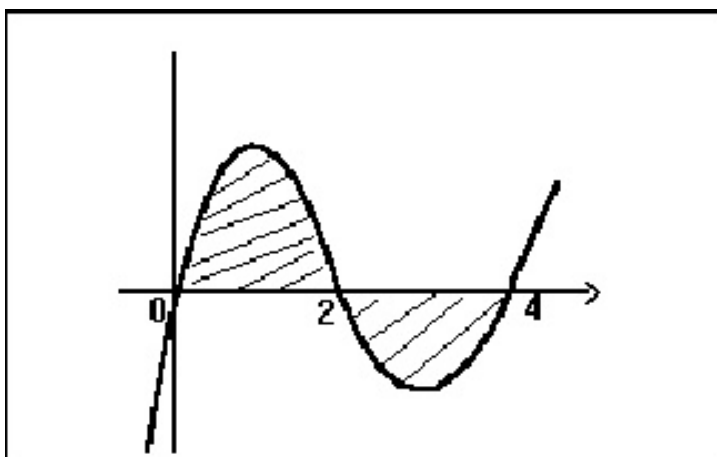
Solución:

Calculamos los puntos de corte de la curva con el eje x :

$$x^3 - 6x^2 + 8x = 0$$

$$(x^2 - 6x + 8)x = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 - 6x + 8 = 0 \Rightarrow x = 2; x = 4 \end{cases}$$

Los puntos de corte obtenidos son **0, 2 y 4** , por tanto el área pedida se halla resolviendo las integrales:



$$I_1 = \int_0^2 (x^3 - 6x^2 + 8x) dx$$

$$I_2 = \int_2^4 (x^3 - 6x^2 + 8x) dx$$

$$I_1 = \left[\frac{x^4}{4} - 2x^3 + 4x^2 \right]_0^2 = 4;$$

$$I_2 = \left[\frac{x^4}{4} - 2x^3 + 4x^2 \right]_2^4 = -4;$$

$$\text{Area} = |4| + |-4| = 8 \text{ u}^2$$

3.- Calcula el área del recinto limitado por la parábola de ecuación $y = 9 - x^2$ y el eje de abscisas.

Solución

Determinamos los puntos de corte de la curva con el eje x :

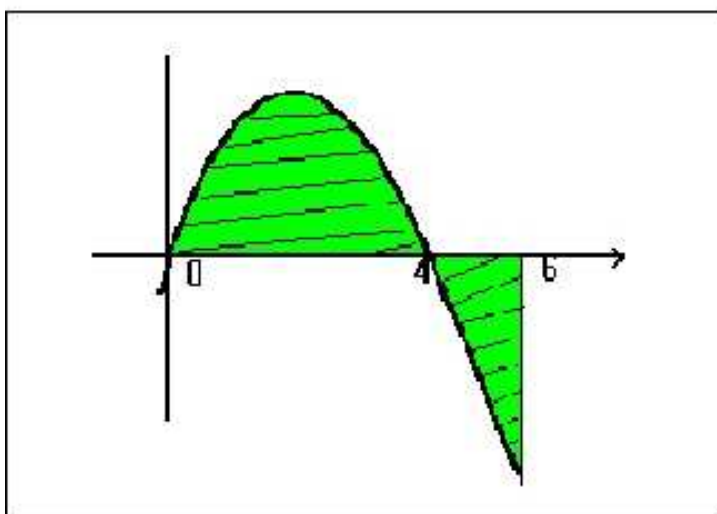
$$9 - x^2 = 0 \quad x=3; x=-3$$

$$I = \int_{-3}^3 (9 - x^2) dx = \left[9x - \frac{x^3}{3} \right]_{-3}^3 = (27 - 9) - (-27 + 9) = 36$$

$$\text{Area} = |36| \text{ u}^2 = 36 \text{ u}^2$$

4.- Calcula el área del recinto limitado por la parábola $y=4x-x^2$ y el eje de abscisas en el intervalo $[0,6]$

Solución:



Comprobamos si hay puntos de corte dentro del intervalo $[0,6]$.

$$4x - x^2 = 0 \Rightarrow x(4 - x) = 0 \Rightarrow x=0; x=4$$

Como hay un punto de corte dentro del intervalo $[0,6]$ que es $x = 4$, las integrales a plantear son:

$$I_1 = \int_0^4 (4x - x^2) dx = \left[2x^2 - \frac{x^3}{3} \right]_0^4$$

$$I_1 = 32 - \frac{64}{3} = \frac{96 - 64}{3} = \frac{32}{3}$$

$$I_2 = \int_4^6 (4x - x^2) dx; \quad I_2 = \left[2x^2 - \frac{x^3}{3} \right]_4^6 = (64 - 72) - \frac{32}{3} = -\frac{56}{3}$$

$$\text{Area} = \left| \frac{32}{3} \right| + \left| -\frac{56}{3} \right| = \frac{88}{3}; \quad \text{Area} = \frac{88}{3} u^2$$

5. - Halla el área comprendida entre las parábolas $y = 8 - x^2$; $y = x^2$

Solución:

Buscamos los puntos de corte de las dos curvas:

$$8 - x^2 = x^2 \Rightarrow 2x^2 = 8 \Rightarrow x = \pm\sqrt{4} = \pm 2$$

Los límites de integración son -2 y 2

La función a integrar es la diferencia de las dos funciones.

$$8 - x^2 - x^2 = 8 - 2x^2, \text{ por tanto,}$$

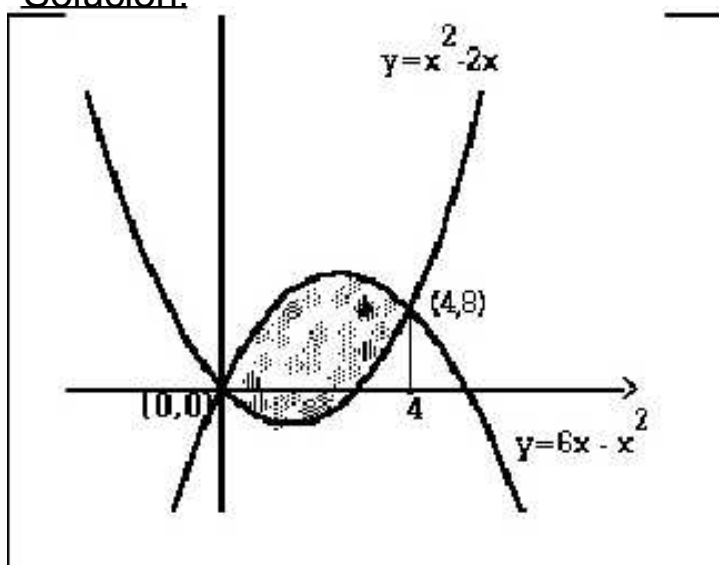
$$I = \int_{-2}^2 (8 - 2x^2) dx = \left[8x - \frac{2x^3}{3} \right]_{-2}^2$$

$$I = \left(16 - \frac{16}{3} \right) - \left(-16 - \frac{-16}{3} \right) = 32 - \frac{32}{3} = \frac{64}{3}$$

$$\text{Area} = \left| \frac{64}{3} \right| u^2 = \frac{64}{3} u^2$$

6.- Halla el área comprendida entre las curvas $y=6x-x^2$; $y=x^2-2x$

Solución:



$$6x - x^2 = x^2 - 2x \Rightarrow 2x^2 - 8x = 0$$

$$2x(x - 4) = 0 \Rightarrow x = 0; \quad x = 4$$

Función a integrar:

$$(x^2 - 2x) - (6x - x^2) = 2x^2 - 8x$$

$$I = \int_0^4 (2x^2 - 8x) dx = \left[\frac{2x^3}{3} - 4x^2 \right]_0^4 = \frac{128 - 192}{3} = -\frac{64}{3}$$

$$\text{Area} = \left| -\frac{64}{3} \right| = \frac{64}{3} u^2$$

7.- Area del recinto limitado por la parábola $y=3x-x^2$ y la recta $y=x-3$

Solución:

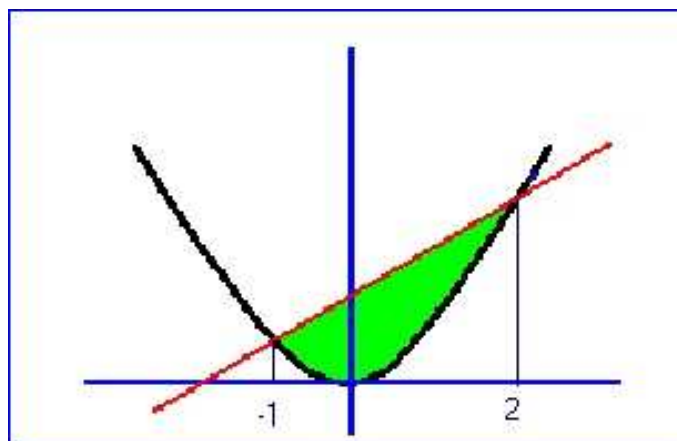
Límites de integración: $3x - x^2 = x - 3 \Rightarrow x^2 - 2x - 3 = 0$

Resolviendo la ecuación se obtiene $x=3$; $x=-1$

Función a integrar: $I = \int_{-1}^3 (x^2 - 2x - 3) dx = \left[\frac{x^3}{3} - x^2 - 3x \right]_{-1}^3 = -\frac{32}{3}$

$$\text{Area} = \left| -\frac{32}{3} \right| = \frac{32}{3} u^2$$

8.- Halla el área del recinto limitado por la parábola de ecuación $y=x^2$, la recta de ecuación $y=x+2$ y el eje OX.



Límites de integración:

Son los puntos de corte de la parábola y la recta: $x^2 = x + 2 \Rightarrow x^2 - x - 2 = 0$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{9}}{2} = \frac{1 \pm 3}{2} = \begin{cases} 2 \\ -1 \end{cases}$$

Función a integrar: $x + 2 - x^2$ (Diferencia de las dos funciones)

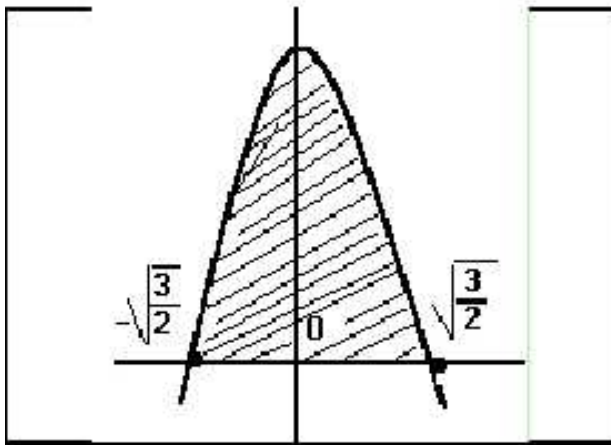
Hemos de resolver la integral siguiente:

$$I = \int_{-1}^2 (x + 2 - x^2) dx = \left[\frac{x^2}{2} + 2x - \frac{x^3}{3} \right]_{-1}^2 = \frac{9}{2}$$

$$\text{Area} = \left| \frac{9}{2} \right| u^2 = \frac{9}{2} u^2$$

9.- Calcula el área del recinto limitado por la parábola de ecuación $y=2(1-x^2)$ y la recta de ecuación $y=0$

Solución:



Como la curva es simétrica respecto al eje de ordenadas, podemos integrar entre 0 y $\sqrt{\frac{3}{2}}$ y multiplicar el resultado por 2.

Límites de integración: $2(1-x^2) = -1 \Rightarrow 3 = 2x^2 \Rightarrow x = \pm\sqrt{\frac{3}{2}}$

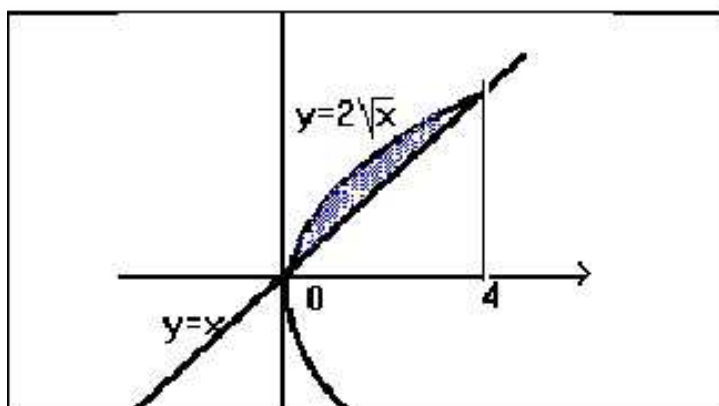
Función a integrar: $2(1-x^2) - (-1) = 3 - 2x^2$

$$I = \int_0^{\sqrt{\frac{3}{2}}} (3 - 2x^2) dx = \left[3x - \frac{2x^3}{3} \right]_0^{\sqrt{\frac{3}{2}}} = 2\sqrt{\frac{3}{2}}$$

$$Area = 4\sqrt{\frac{3}{2}}$$

10.- Calcula el área del recinto limitado por la curva de ecuación $y = 2\sqrt{x}$ y la recta $y=x$.

Solución:



Límites de integración:

$$2\sqrt{x} = x \Rightarrow 4x = x^2 \Rightarrow x^2 - 4x = 0$$

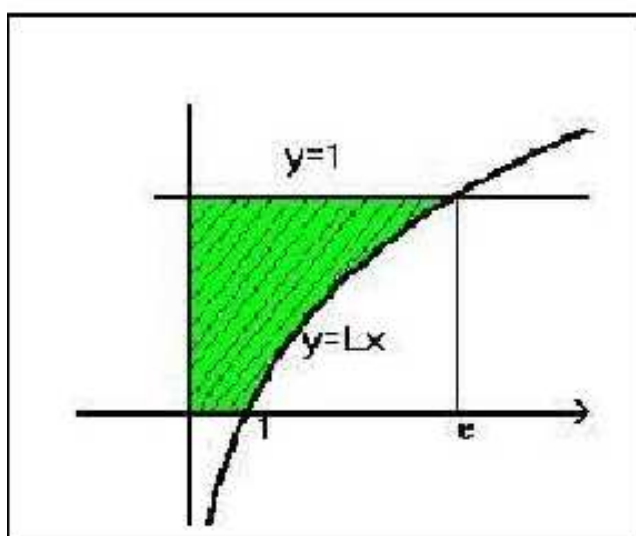
$$x(x - 4) = 0 \Rightarrow x = 0; x = 4$$

Función a integrar: $2\sqrt{x} - x$

$$I = \int_0^4 (2\sqrt{x} - x) dx = \int_0^4 (2x^{\frac{1}{2}} - x) dx = \left[\frac{4\sqrt{x^3}}{3} - \frac{x^2}{2} \right]_0^4 = \frac{8}{3}; \quad \text{Area} = \frac{8}{3} u^2$$

11.- Halla el área del recinto limitado por las gráficas de las funciones $y = \ln(x)$, $y = 1$ y los ejes de coordenadas.

Solución:



Observando el dibujo, el área pedida será la diferencia entre las integrales

$$\int_0^e 1 \cdot dx \quad \text{y} \quad \int_1^e Lx \cdot dx$$

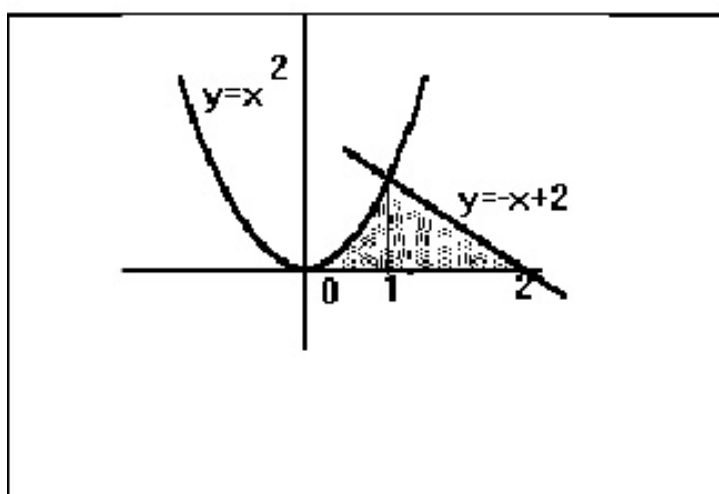
$$I_1 = \int_0^e 1 \cdot dx = [x]_0^e = e$$

$$I_2 = \int_1^e Lx dx = [xLx - x]_1^e = (e - e) - (0 - 1) = 1 \quad (\text{por partes})$$

$$\text{Area} = I_1 - I_2 = e - 1 u^2$$

12.- Halla el área del recinto limitado por la parábola $y = x^2$, la recta de ecuación $y = -x + 2$ y el eje OX

Solución:



Punto de corte de la parábola y el eje OX:

$$x^2 = 0 \Rightarrow x = 0$$

Punto de corte de la recta y el eje =OX:

$$-x + 2 = 0 \Rightarrow x = 2$$

Punto de corte de la parábola y la recta:

$$x^2 = -x + 2 \Rightarrow x^2 + x - 2 = 0$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{-1 \pm 3}{2} = \begin{cases} 1 \\ -2 \end{cases}$$

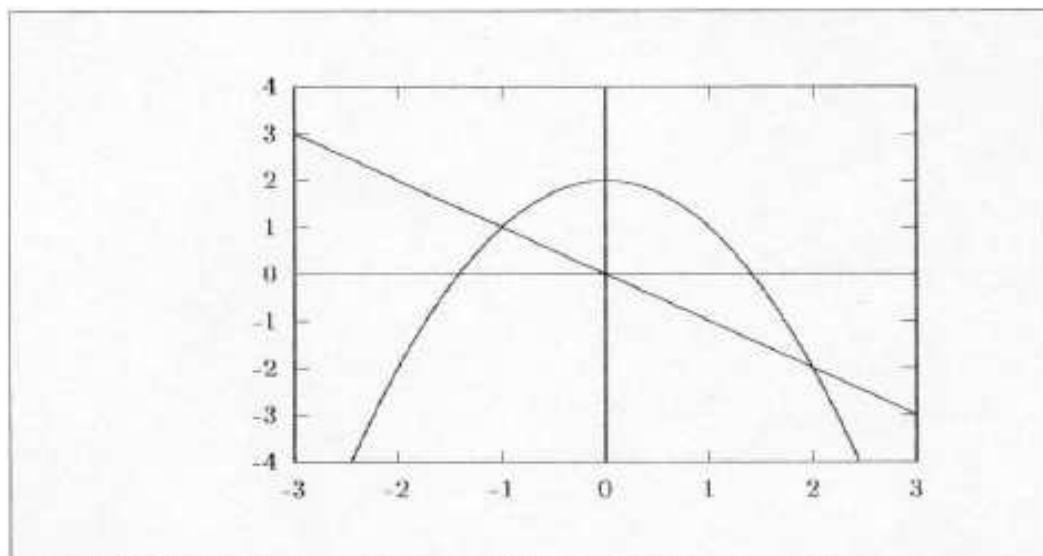
La solución $x = -2$ está fuera del eje OX, por tanto, sólo hemos de considerar el valor

$$x = 1$$

Observando el dibujo, hemos de resolver las integrales siguientes:

$$I_1 = \int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}; \quad I_2 = \int_1^2 (-x + 2) dx = \frac{1}{2}; \quad Area = \left| \frac{1}{3} \right| + \left| \frac{1}{2} \right| = \frac{5}{6} u^2$$

13.- Encuentre el área acotada por la parábola $y = 2 - x^2$ y la recta $y = -x$ que se muestra en la figura.



Para encontrar la intersección entre ambas curvas resolvemos la ecuación:

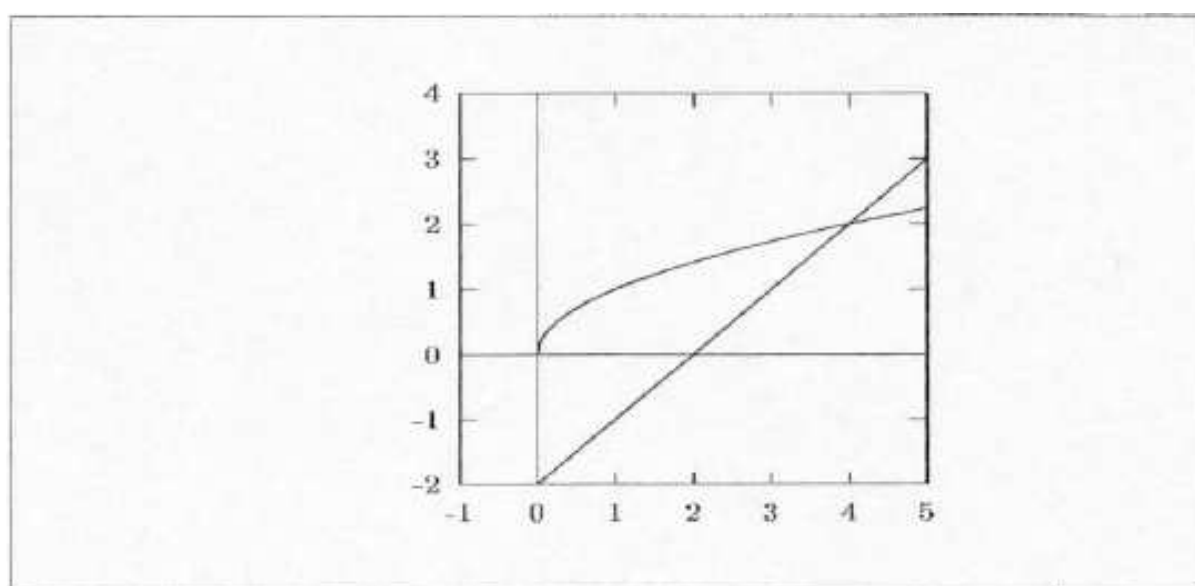
$$2 - x^2 = -x \Rightarrow x^2 - x + 2 = 0$$

$$(x - 2)(x + 1) = 0 \Rightarrow x = 2 \quad \vee \quad x = -1$$

$$y = -2 \quad y = 1$$

$$\begin{aligned} \text{Area} &= \int_{-1}^2 (2 - x^2 + x) dx = \left(2x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 \right) \Big|_{-1}^2 = 4 - \frac{8}{3} + 2 + 2 - \frac{1}{3} - \frac{1}{2} \\ &= 5 - \frac{1}{2} = \frac{9}{2} \quad [\text{Unidades de Área}]. \end{aligned}$$

14.- Halle el área acotada a la derecha por la recta $y = x - 2$ a la izquierda por la parábola $x = y^2$ y debajo por el eje x .



$$y = y^2 - 2 \Rightarrow y^2 - y - 2 = 0$$

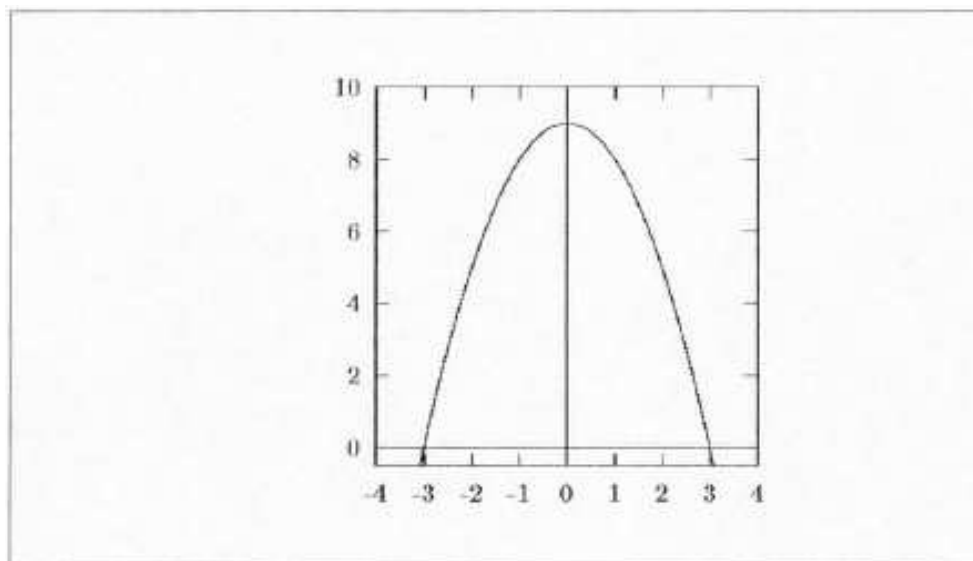
$$\Rightarrow (y - 2)(y + 1) = 0 \Rightarrow y = 2 \quad \vee \quad y = -1$$

$$x = 4 \quad x = 1$$

$$\text{Area} = \int_0^2 (y + 2 - y^2) dy = \left(\frac{1}{2}y^2 + 2y - \frac{1}{3}y^3 \right) \Big|_0^2 = 2 + 4 - \frac{8}{3}$$

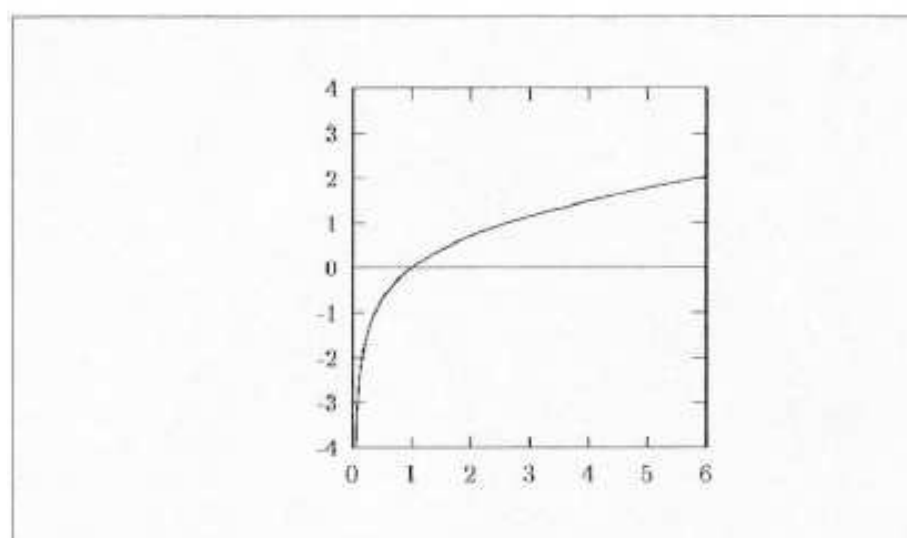
$$= 10/3 \text{ [Unidades de Area]}$$

15.- Busque el área encerrada por las curvas: $y = 9 - x^2$; $x = -3$; $x = 3$; $y = 0$.



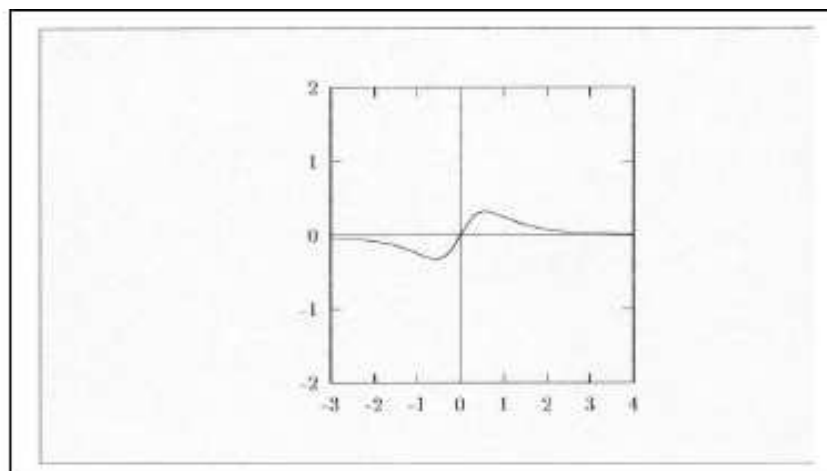
$$\int_{-3}^3 (9 - x^2) dx = 9x - \frac{x^3}{3} \Big|_{-3}^3 = 27 - 9 + 27 - 9 = 36 \text{ [Unidades de Area]}$$

17.- Halle el área encerrada por las curvas: $y = \sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}$; $x = 1$; $x = 4$; $y = 0$.



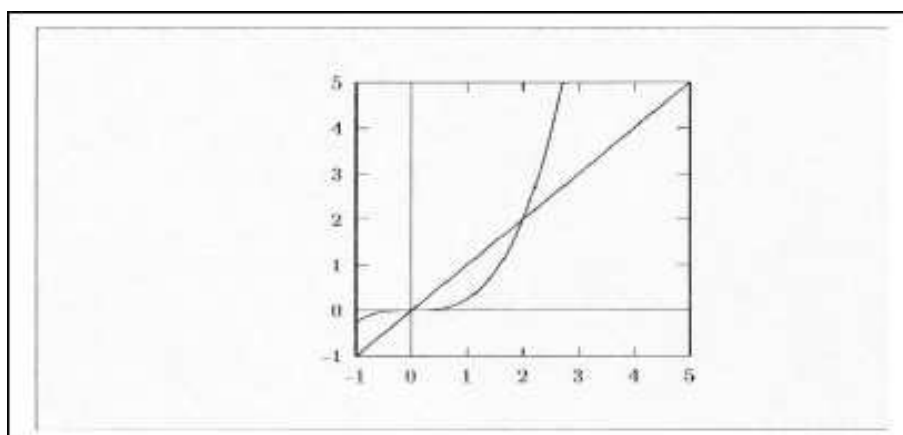
$$\int_1^4 (x^{1/2} - x^{-1/2}) dx = \frac{2}{3} x^{3/2} - 2x^{1/2} \Big|_1^4 = \frac{2}{3} 8 - 4 - \frac{2}{3} + 2 = 8/3 \text{ [Unidades de Area]}$$

18.- Halle el área encerrada por las curvas $y = \frac{x}{(x^2 + 1)^2}$; $x = -2$; $x = 3$; $y = 0$.



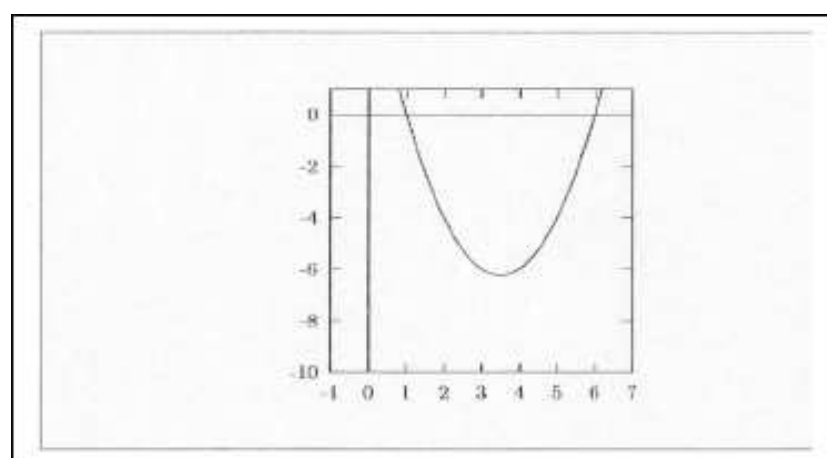
$$\begin{aligned}
 & - \int_{-2}^0 \frac{x}{(x^2+1)^2} dx + \int_0^3 \frac{x}{(x^2+1)^2} dx = -\frac{1}{2} \int_5^1 \frac{du}{u^2} + \frac{1}{2} \int_1^{10} \frac{du}{u^2} = \left. \frac{1}{2} \frac{1}{u} \right|_5^1 - \left. \frac{1}{2} \frac{1}{u} \right|_1^{10} \\
 & = \frac{1}{2} \frac{1}{1} - \frac{1}{2} \frac{1}{5} - \frac{1}{2} \frac{1}{10} + \frac{1}{2} \frac{1}{1} = 1/2 - 1/10 - 1/20 + 1/2 = 17/20 \text{ [Unidades de Area]}
 \end{aligned}$$

19.- Halle el área encerrada por las curvas: $4y = x^3$ e $y = x$; $x \geq 0$



$$\int_0^4 \left(x - \frac{x^3}{4} \right) dx = \left. \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{16} \right|_0^2 = 2 - 1 - 0 = 1 \text{ [Unidades de Area]}$$

20.- Halle el área encerrada por las curvas $y = x^2 - 7x + 6$; el eje X y las rectas:
Verticales $x = 2$ y $x = 6$.



$$\begin{aligned}
 & - \int_2^6 (x^2 - 7x + 6) dx = \left. -\frac{x^3}{3} + \frac{7x^2}{2} - 6x \right|_2^6 \\
 & = -72 + 126 - 36 + \frac{8}{3} - \frac{28}{2} + 12 = \frac{56}{3} \text{ [Unidades de Area]}
 \end{aligned}$$

