CAPÍTULO

VII

Factorización

Niels Henrik Abel (1802-1829)

Matemático noruego, nació en u familia muy numerosa, hijo de pastor protestante en condiciones extrema pobreza. A los 16 años, maestro le aconsejó leer los gran libros de los matemáticos m eminentes. A los 19 años, demos que las ecuaciones algebraicas de grado superior a cuatro no ten solución algebraica general, crear con él una importante teoría llam "teoría de grupos" y descub importantes propiedades relativas las funciones elípticas y a una clase ecuaciones llamadas ecuacior abelianas.
Murió de tuberculosis a sus esca 27 años.



$$P(x,y)A_{(x,y)}{}^{a}\cdot B_{(x,y)}{}^{b}\cdot C_{(x,y)}{}^{g} \qquad a,b,g\hat{I}\ \mathbb{N}$$

ÁLGEBRA

LECTURA

Factorización

Al expresar 24=3.8 se ha factorizado 24 en producto de enteros; siendo 3 y 8 factores enteros de 24. A su vez 24=3.2³; 3 y 2 son también factores de 24 y se llaman factores primos.

Al expresar un polinomio como la multiplicación de otros polinomios pertenecientes a un conjunto dado, se ha efectuado una factorización de polinomios.

No todos los polinomios se pueden factorizar. De acuerdo a las características que presentan los polinomios se puede aplicar tal o cual criterio, por ejemplo:

$ax^2y^2 + bxy^3z + cx^3my^4$	→	*Factor común*
$Ax^{2n} + Bx^ny^m + Cy^{2m}$	→	*Aspa simple*
$Ax^{2n} + Bx^ny^m + Cy^{2m} + Dx^n + Ey^m + F$	→	*Aspa doble*
$Ax^{4n} + Bx^{3n} + Cx^{2n} + Dx^n + E$	→	*Aspa doble especial*
$Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$	→	*Divisores binómicos*

Entre otros casos particulares.

Comience factorizando cada uno de los polinomios:

- $x^2y^2 + xy^3 + x^2y$
- $24x^2y^2 + 16xy^3z + 32x^3my^4 - 64zx^3y^5$
- $9ab + 12bd - 45ac - 60cd$
- $121m^2 - 169n^2$
- $256p^8 - q^8$
- $4x^2 - 20xy + 9y^2$
- $6a^2 - 7ab - 5b^2$
- $3x^2 - 10xy + 3y^2$
- $x^4 - 22x^2 - 75$

para saber cómo estamos comenzando en este maravilloso tema que es la factorización.

De los autores.

Factorización

OBJETIVOS

- Expresar un polinomio como la multiplicación indicada en otros polinomios de menor grado.
- Explicar la factorización en la teoría de ecuaciones, especialmente en las ecuaciones polinomiales, fraccionarias, irracionales, etc.
- Explicar la factorización en la teoría de inecuaciones.

INTRODUCCIÓN

Desde tiempos muy remotos, en los albores de todo pensamiento matemático, surge la teoría de los números la cual esta apoyada en la parte algebraica.

En cuestiones de simplificación de expresiones, esta ayuda nos la brinda la teoría de la factorización, que en la vida cotidiana nos simplifica cálculos engorrosos y permite la resolución de ecuaciones e inecuaciones, el estudio de las funciones, etc. Para ello, desarrollaremos el tema con algunos conceptos primarios: factor algebraico, polinomios irreductibles, factor primo, etc.; así como los diversos criterios para poder factorizar polinomios, sobre determinados conjuntos numéricos.

Por ejemplo:

- $P(x) = x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + ... + a_n \equiv (x - x_1)(x-x_2)(x-x_3) ... (x-x_n)$ este polinomio de grado "n" ha sido expresado en una multiplicación de factores lineales.

  Para resolver una ecuación cuadrática aplicaremos "diferencia de cuadrados" o "aspa simple".
- El aspa doble podemos aplicar en la geometría para graficar ciertas regiones.
- Aspa doble especial, para resolver principalmente algunas ecuaciones cuárticas.
- El criterio de los divisores binómicos, para resolver ciertas ecuaciones, de preferencia, con grado impar.

  Al resolver una inecuación polinomial debemos factorizar.

  En la simplificación de fracciones, a veces, debemos factorizar numerador y denominador para luego simplificar y operar.

  Con ayuda de la factorización encontrar nuevas formas de operar, para aplicarlas en otros capítulos del curso.

  Éstas son algunas de las aplicaciones del presente capítulo.

CAMPO NUMÉRICO

Sea $K \neq \phi$ un conjunto numérico con dos operaciones binarias: adición (+) y multiplicación (.) definidos sobre K. Decimos que k es un campo numérico si se cumplen los siguientes axiomas:

AXIOMAS DE LA ADICIÓN

A1. **Axioma de la cerradura:** Para cada par de elementos a y b de un conjunto K, existe un único elemento "c" que también pertenece a dicho conjunto / $c=a+b$

A2. **Axioma de la conmutatividad:** Para cada par de elementos a, b del conjunto K, se tendrá: $a+b = b+a$

A3. **Axioma de la asociatividad:** Para todo elemento a, b, c del conjunto K, la suma de estos es independiente de la manera como se ordene.
Así: $(a+b)+c = a+(b+c)$

A4. **Axioma del elemento neutro:** Conocido como neutro aditivo. Para cada elemento del conjunto K, existe un único elemento denotado por "0"; $0 \in K$; $a+0=0+a=a$

A5. **Axioma del elemento llamado opuesto de "a" o simétrico:** Para cada elemento **a** del conjunto K, existe un único elemento denotado por **-a**, $(-a) \in K$; $a+(-a)=(-a)+a=0$

AXIOMAS DE LA MULTIPLICACIÓN

M1. **Axioma de la cerradura:** Para cada elemento **a, b** del conjunto K, existirá un único elemento **c** llamado producto ($c=a.b$) que también pertenece al conjunto K.

M2. **Axioma de la conmutatividad:** Para cada elemento a, b del conjunto K, se cumple: **ab=ba**
"El orden de los factores no altera el producto".

M3. **Axioma de la asociatividad:** Para todo **a, b, c** elementos del conjunto K, se tendrá:
$a(bc) = (ab)c$
"El producto es independiente de la manera como se asocia a los elementos a, b, c; es decir, el resultado no se altera con el orden"

M4. **Axioma del elemento neutro multiplicativo:** Para todo elemento "**a**" del conjunto K, existe un único elemento denotado por $\mathbf{1 \in K}$; $\mathbf{a.1 = 1.a = a}$

M5. **Axioma del elemento simétrico llamado inverso multiplicativo:** Para cada elemento no nulo **a** del conjunto K, existe un único elemento denotado por $\mathbf{a^{-1}}$ de K ; $a.a^{-1} = a^{-1}.a=1$

AXIOMA DE LA DISTRIBUTIVIDAD DE LA MULTIPLICACIÓN CON RESPECTO A LA ADICIÓN:

Para los elementos a, b, c de K, se tiene:

1. $a(b+c) = ab+ac$
2. $(a+b)c = ac+bc$

De donde se puede concluir que los conjuntos numéricos considerados como campos son los racionales ($\mathbb{Q}$); los reales ($\mathbb{R}$), los complejos ($\mathbb{C}$).

1. **¿El conjunto de los números naturales forma un campo?**
Respuesta: No, puesto que no cumple con los axiomas A4, A5, M5
Así $a+0 = a$ pero $0 \notin \mathbb{N}$
Si $a \in \mathbb{N}$, $-a \notin \mathbb{N}$
Si $a \in \mathbb{N}$, $a^{-1} \notin \mathbb{N}$

2. **¿El conjunto de los enteros forma un campo?**
Respuesta: No, porque si $a \in \mathbb{Z}$, $a^{-1} \notin \mathbb{Z}$, es decir no cumple M5
Por lo tanto: $\mathbb{Z}$ no forma un campo.

3. **¿Los irracionales ($\mathbb{Q}'$) forman un campo?**
Veamos $(5+\sqrt{2}) \in \mathbb{Q}' \wedge (5-\sqrt{2}) \in \mathbb{Q}'$
Pero $(5+\sqrt{2}) + (5-\sqrt{2}) = 10 \notin \mathbb{Q}'$
Vemos que no siempre cumple el axioma de la cerradura (A1)
Así mismo $(5+\sqrt{2}) \in \mathbb{Q}' \wedge (5-\sqrt{2}) \in \mathbb{Q}'$
pero $(5+\sqrt{2})(5-\sqrt{2}) = 23 \notin \mathbb{Q}'$;
no cumple (M1)

Por lo tanto, los irracionales no forman campo.

POLINOMIO SOBRE UN CAMPO

Lo llamaremos así cuando sus coeficientes pertenecen a ese campo.
Así :

1. $P(x) = 3x^2 + 5x^3 - \frac{4}{3}x - 7$

   Es un polinomio sobre los racionales, puesto que sus coeficientes son racionales.

2. $R(x;y) = 4x + \sqrt{5}y$

   Vemos que $\sqrt{5}$ no es racional pero sí un real; entonces $R(x,y)$ está sobre los reales.

3. $S(x,y) = 5x^7 - \sqrt{2}xy + (1-i)y^3$; $i = \sqrt{-1}$

   Vemos que $(1-i)$ no es racional ni real, es complejo.
   Entonces $S(x,y)$ está sobre los complejos.

NOTA

I. Todo polinomio que está sobre los racionales estará también sobre los reales y los complejos; pero que esté en los reales o complejos, no implica necesariamente que esté en los racionales.
II. Todo polinomio que está sobre los reales, está también sobre los complejos.

FACTOR DE UN POLINOMIO

Un polinomio $f(x)$ de grado no nulo, es considerado factor de otro polinomio $P(x)$ si existe un único polinomio $q(x)$ tal que:

$$P(x) \equiv f(x) \cdot q(x)$$

es decir, la división de $P(x)$ entre $f(x)$ es exacta.

Ejemplo:
De $P(x) = x(x^2-1)(x+2)$, sus factores son
x ; $x+1$; $x-1$; $x+2$; x^2+2x ; ....; $x(x+1)(x-1)(x+2)$

Ejemplo:
De $P(x,y) = c(x^3-y^3)(x+y)$, sus factores son: $x-y$, $x+y$, x^2+xy+y^2, ... ; $c(x^3-y^3)(x+y)$

NOTA

c no es considerado factor en este caso por ser de grado nulo.

POLINOMIO IRREDUCTIBLE

Un polinomio es irreductible sobre un determinado campo numérico si no admite ser expresado como la multiplicación de dos o más factores sobre el mismo campo.

Ejemplo:
$P(x) = 4x^4 - 1$

I. $P(x)=4x^4-1$ no es irreductible en $\mathbb{Q}$ porque se puede expresar como
$P(x) = (2x^2+1)(2x^2-1)$

II. $F(x) = 2x^2-1$ es irreductible en $\mathbb{Q}$, pero no en $\mathbb{R}$, puesto que $F(x) = (\sqrt{2}x+1)(\sqrt{2}x-1)$

III. $M(x) = 2x^2 + 1$ es irreductible en $\mathbb{Q}$ y $\mathbb{R}$ pero no en $\mathbb{C}$, puesto que
$M(x) = (\sqrt{2}x+i)(\sqrt{2}x-i)$

NOTA

es la unidad imaginaria denotado por $i=\sqrt{-1}$, a estudiarse más adelante.

TEOREMA

Todo polinomio de primer grado es irreductible en cualquier campo numérico.

FACTOR PRIMO: Es un factor irreductible de un polinomio sobre un determinado campo.

Ejemplo: $P(x) = 5(x-2)^3(x^2+3x+1)$
sus factores primos en $\mathbb{Q}$ son $x-2, x^2+3x+1$ en cambio $(x-2)^2$ no es primo, puesto que es divisible por $x-2$, es decir $(x-2)^2 \equiv (x-2)(x-2)$

NOTA

Al factor de un polinomio también se le llama divisor, que no necesariamente es primo.

TEOREMA

Dado un polinomio mónico $P(x)$ expresado por

$$P(x) \equiv p_1^a(x) \cdot p_2^b(x) \cdot p_3^c(x) \ldots\ldots p_n^m(x)$$

donde $p_1(x), p_2(x) \ldots\ldots p_n(x)$ polinomios mónicos primos y primos entre sí.
Se tendrá:

I. Nº de factores primos = n

II. Nº de factores o divisores algebraicos = $(a+1)(b+1)\ldots(m-1)-1$

Ejemplo 1
En $P(x,y,z) = x^2yz^2$
I. Factores primos son tres: x, y, z
II. Número de factores totales es
$(2+1)(1+1)(2+1)-1 = 17$
$\therefore$ Tiene 17 factores en total.

Ejemplo 2
En $R(x,y) = (x+y)^2(x^2+xy-y^2)^3xy^2$
I. Factores primos: $x+y, x^2+xy-y^2, x, y$ son 4 factores primos.
II. Número total de factores:
$(2+1)(3+1)(1+1)(2+1) - 1 = 71$
$\therefore$ Tiene 71 factores en total.

FACTORIZACIÓN

Es la transformación de un polinomio en una multiplicación indicada de sus factores primos o sus potencias.

Ejemplo:

$$x^2+9x-22 \equiv (x-2)(x+11)$$

(factorización: $\longrightarrow$; producto: $\longleftarrow$)

TEOREMA DE LA FACTORIZACIÓN ÚNICA

La representación factorizada de un polinomio es única, salvo el orden de los factores.

CRITERIOS PARA FACTORIZAR

Son técnicas a utilizar, de acuerdo a la forma que presente el polinomio.

1. FACTOR COMÚN-AGRUPACIÓN DE TÉRMINOS

Se buscan factores comunes que pueden ser monomios o polinomios de más de un término. En caso de no haber algún factor común, se agrupará convenientemente tratando de que aparezca algún factor común.

Ejemplo 1
Factorizar $P(x) = 4x^4 + 5x^2$

Resolución:
Observamos que x^2 es factor común de $4x^4$ y $5x^2$, luego $P(x) = x^2(4x^2+5)$, donde sus factores primos son: x, $4x^2+5$

Ejemplo 2
Factorizar $P(x,y) = x^3(x+y) + 5xy(x+y)$
Resolución:
Se observa que el factor común es $x(x+y)$
luego $P(x,y) = x(x+y)(x^2+5y)$
cuyos factores primos son x, $x+y$, x^2+5y

Ejemplo 3
Factorizar
$P(x,y) = a^2x - ax^2 - 2a^2y + 2axy + x^3 - 2x^2y$
Resolución:
Vemos que no existe factor común alguno a simple vista, entonces tendremos que agrupar convenientemente como se indica.

$$\underline{a^2x - ax^2} + \underline{2axy - 2a^2y} + \underline{x^3 - 2x^2y}$$
$$= a^2(x-2y) - ax(x-2y) + x^2(x-2y)$$
$$= (x-2y)(a^2-ax+x^2)\ ;\ \text{luego}$$
$$P(x,y) = (x-2y)(a^2-ax+x^2)$$

II. POR IDENTIDADES

En este caso utilizaremos las equivalencias algebraicas en sentido inverso al de los productos notables.
Cabe recordar:

- $x^2 \pm 2xy + y^2 \equiv (x \pm y)^2$
- $x^2 - y^2 \equiv (x + y)(x - y)$
- $x^3 - y^3 \equiv (x - y)(x^2 + xy + y^2)$
- $x^3 + y^3 \equiv (x + y)(x^2 - xy + y^2)$
- $x^3 \pm y^3 \pm 3xy(x \pm y) \equiv (x \pm y)^3$
- $x^2 + (a + b)x + ab \equiv (x + a)(x + b)$
- $x^4 + x^2 + 1 \equiv (x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1)$

entre otros

Ejemplo 1
Factorizar $R(x) = x^3+x^2-x-1$
Resolución:
Agrupando convenientemente como se indica.
$\underline{x^3 + x^2} - \underline{x - 1}$
$x^2(\underline{x+1}) - (\underline{x+1}) \equiv (x+1)(x^2-1)$

Nota: $x^2-1 \equiv (x+1)(x-1)$

$\Rightarrow R(x) = (x+1)(x+1)(x-1)$
$\therefore R(x) = (x+1)^2(x-1)$

Ejemplo 2
Factorizar
$P(x,a,b) = x^2 + 2(a+b)x + a^2 + 2ab + b^2$
Resolución:
Como $a^2 + 2ab + b^2 \equiv (a+b)^2$
luego $P(x,a,b) = \underbrace{x^2 + 2(a+b)x + (a+b)^2}$
trinomio cuadrado perfecto

$\therefore P(x,a,b) = (x+a+b)^2$

Ejemplo 3
Factorizar $P(x) = x^4 + 2x^2 + 9$
Resolución:
Hacemos que $2x^2 = 6x^2 - 4x^2$ por conveniencia para el problema, luego $P(x) = \underline{x^4+6x^2}-4x^2+\underline{9}$, agrupando convenientemente
$= (x^4+6x^2+9) - 4x^2 \equiv (x^2+3)^2 - (2x)^2$
(Diferencia de cuadrados)
$= (x^2+3+2x)(x^2+3-2x)$
$\therefore P(x) = (x^2+2x+3)(x^2-2x+3)$

Ejemplo 4
Factorizar $P(x,y) = x^3+y^3+6xy-8$
Resolución:
Recordar

$$a^3+b^3+c^3-3abc \equiv (a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc)$$

luego en el problema:
$x^3+y^3+(-2)^3-3xy(-2) = (x+y-2)\,[x^2+y^2+(-2)^2 - xy-x(-2)-y(-2)]$
$\therefore P(x,y) = (x+y-2)(x^2+y^2+4-xy+2x+2y)$

III. CRITERIO DE ASPAS

A. ASPA SIMPLE

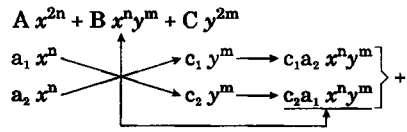
Se utiliza para factorizar a los polinomios de la siguiente forma general:

$$P(x,y) = Ax^{2n} + Bx^n y^m + Cy^{2m} \quad \text{ó}$$
$$P(x) = Ax^{2n} + Bx^n + C$$

Para factorizar
$P(x,y) = Ax^{2n} + Bx^n y^m + Cy^{2m}$

Seguiremos el siguiente procedimiento:

I. Descomponer los extremos convenientemente:



II. Se comprueba que el término central es igual a la suma de los productos parciales en forma de aspa:
$B = c_1a_2 + c_2a_1$

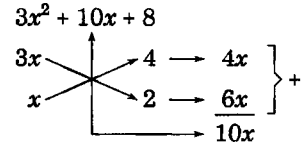
III. Luego $P(x,y)$ es $(a_1x^n + c_1y^m)(a_2x^n+c_2y^m)$, es decir, $P(x,y) = (a_1x^n + c_1y^m)(a_2x^n + c_2y^m)$

Ejemplo 1

Factorizar $P(x) = 3x^2 + 10x + 8$

Resolución:

Descomponiendo los extremos:



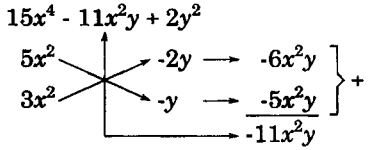
La forma factorizada es $(3x+4)(x+2)$, es decir, $P(x)=(3x+4)(x+2)$

Ejemplo 2

Factorizar $P(x,y) = 15x^4 - 11x^2y + 2y^2$

Resolución:

Descomponiendo adecuadamente los extremos



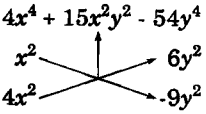
$\therefore$ El polinomio factorizado es
$P(x,y) = (5x^2 - 2y)(3x^2 - y)$

Ejemplo 3

Factorizar $R(x,y) = 4x^4 + 15x^2y^2 - 54y^4$

Resolución:

Descomponiendo los extremos adecuadamente



$\Rightarrow R(x,y) = (x^2 + 6y^2)(4x^2 - 9y^2)$
$= (x^2+6y^2)(2x+3y)(2x-3y)$
$\therefore R(x,y) = (x^2+6y^2)(2x+3y)(2x-3y)$

TEOREMA

Todo polinomio de la forma
$P(x) = Ax^2+Bx+C$; $\{A, B, C\} \subset \mathbb{Z} \wedge \forall A \neq 0$
es factorizable en los racionales, si y sólo si , B^2-4AC es un cuadrado perfecto (C.P.)

Ejemplo 1

¿ $2x^2 - 5x + 2$ es factorizable ?

Resolución:

Veamos $(-5)^2 - 4(2)(2) = 25 - 16 = 9$

como 9 es cuadrado perfecto $\Rightarrow$ $2x^2 - 5x + 2$, sí es factorizable en los racionales.

Ejemplo 2

¿ $3x^2 + x + 1$ es factorizable en $\mathbb{Q}$?

Resolución:

Veamos: $1^2-4(3)(1) = -11$ y no es cuadrado perfecto, entonces $3x^2+x+1$ no es factorizable en $\mathbb{Q}$.

Ejemplo 3

Demostrar que $\forall\ k \in \mathbb{Z}$, $x^2+(k+1)x+k$ es factorizable en $\mathbb{Q}$

Resolución:

Veamos

$(k+1)^2-4(1)(k) = k^2+2k+1-4k = (k-1)^2$

Se observa que $(k-1)^2$ es un cuadrado perfecto $\forall\ k \in \mathbb{Z}$

$\therefore$ $x^2+(k+1)x+k$ es factorizable en $\mathbb{Q}$

Corolario:
Todo polinomio cuadrático en una variable, si es factorizable, debe admitir el criterio del aspa simple. Si no admite aspa simple, es porque no es factorizable en Q

NOTA

Existen polinomios que no tienen la forma general, sin embargo, pueden ser factorizados por aspa simple.
Así

$$M(x) = x^5 - 2x^3 + 5x^2 - 10$$

x^3 → 5
x^2 → -2

$$\therefore M(x) = (x^3 + 5)(x^2 - 2)$$

B. ASPA DOBLE

Se utiliza para factorizar a los polinomios de la siguiente forma general:

$$P(x,y) = Ax^{2n} + Bx^n y^m + Cy^{2m} + Dx^n + Ey^m + F$$

Procedimiento para factorizar:

I. Se debe ordenar el polinomio de acuerdo a esta forma general.
II. De faltar algún término, se reemplazará en su lugar por cero.
III. Se aplicarán aspas simples a:
   1. Los términos: Ax^{2n}, $Bx^n y^m$, Cy^{2m}
   2. Los términos: Cy^{2m}, Ey^m, F
   3. Los términos: Ax^{2n}, Dx^n, F
IV. Los factores se tomarán de manera horizontal.

Esquema:

$$P(x,y) = Ax^{2n} + Bx^n y^m + Cy^{2m} + Dx^n + Ey^m + F$$

a_1x^n → c_1y^m → f_1
a_2x^n → c_2y^m → f_2

luego tenemos:

$$P(x,y) = (a_1x^n + c_1y^m + f_1)(a_2x^n + c_2y^m + f_2)$$

Ejemplo 1

Factorizar

$$P(x,y) = 6x^2 + 13xy + 6y^2 + 7x + 8y + 2$$

Resolución:

Aplicando las aspas simples:

$6x^2 + 13xy + 6y^2 + 7x + 8y + 2$

$3x$ → $2y$ → 2
$2x$ → $3y$ → 1

entonces la forma factorizada es:

$$(3x + 2y + 2)(2x + 3y + 1)$$

Ejemplo 2

Factorizar $P(x,y) = 10x^2 + 11xy - 6y^2 - x - 11y - 3$

Resolución:

$10x^2 + 11xy - 6y^2 - x - 11y - 3$

$5x$ → $-2y$ → -3
$2x$ → $3y$ → 1

Descomponiendo en aspas simples:

$$\Rightarrow P(x,y) = (5x - 2y - 3)(2x + 3y + 1)$$

Ejemplo 3

Factorizar

$$M(x,y,z) = 6x^2 - 25y^2 + 20z^2 - 5xy - 23xz - 5yz$$

Resolución:

Se ordenará de acuerdo a la forma general considerando a la tercera variable como si fuera una constante, así

$6x^2 - 5xy - 25y^2 - 23xz - 5yz + 20z^2$

$3x$ → $5y$ → $-4z$
$2x$ → $-5y$ → $-5z$

luego su forma factorizada es:

$$M(x,y,z) = (3x + 5y - 4z)(2x - 5y - 5z)$$

C. ASPA DOBLE ESPECIAL

Será posible aplicar a los polinomios que presentan la siguiente forma general:

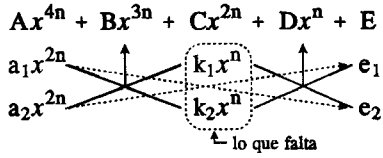
$$P(x) = Ax^{4n} + Bx^{3n} + Cx^{2n} + Dx^{n} + E$$

De manera particular, si n=1 tendremos el polinomio de 4to. grado

Procedimiento para factorizar

I. Se ordena de acuerdo a la forma general, colocando cero en el lugar del término que falta.

II. Se descompone adecuadamente los extremos buscando mediante un aspa simple, aproximarse al término central.
Así :



se debe tener (SDT) : Cx^{2n} ,
se tiene (ST) : $(a_1e_2 + a_2e_1)x^{2n}$,
falta : $(C - a_1e_2 - a_2e_1)x^{2n} = Kx^{2n}$

III. Lo que falta se descompone en la parte central buscando aspas simples a ambos lados.

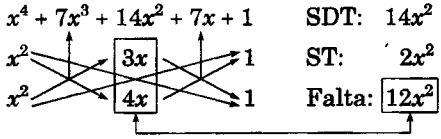
IV. Los factores se toman en forma horizontal.
$(a_1x^{2n} + k_1x^{n} + e_1)(a_2x^{2n} + k_2x^{n} + e_2)$

Ejemplo 1

Factorizar $P(x) = x^4 + 7x^3 + 14x^2 + 7x + 1$

Resolución:

Descomponiendo los extremos



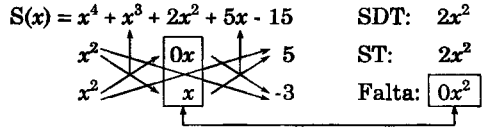
$\therefore P(x) = (x^2 + 3x + 1)(x^2 + 4x + 1)$

Ejemplo 2

Factorizar $f(x) = x^3(x+1) + 2x^2 + 5(x-3)$

Resolución:

Efectuando y ordenando de acuerdo a la forma general:



$\Rightarrow S(x) = (x^2 + 0x + 5)(x^2 + x - 3)$

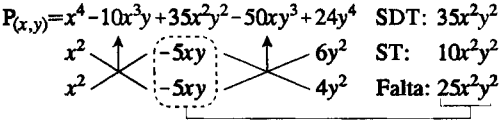
$\therefore S(x) = (x^2 + 5)(x^2 + x - 3)$

Ejemplo 3

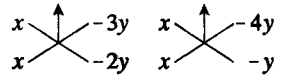
Factorizar

$$P(x,y) = x^4 - 10x^3y + 35x^2y^2 - 50xy^3 + 24y^4$$

Resolución:



$\Rightarrow P_{(x,y)} = (x^2 - 5xy + 6y^2)(x^2 - 5xy + 4y^2)$



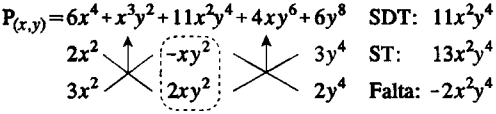
$\therefore P(x,y) = (x-3y)(x-2y)(x-4y)(x-y)$

Ejemplo 4

Factorizar $P(x,y) = 6x^4 + 6y^8 + 4xy^6 + 11x^2y^4 + x^3y^2$

Resolución:

Ordenando para el aspa doble especial



$\therefore P(x,y) = (2x^2 - xy^2 + 3y^4)(3x^2 + 2xy^2 + 2y^4)$

IV. CRITERIO DE DIVISORES BINÓMICOS

Finalidad: Se utiliza para factorizar los polinomios en una variable y de grado superior, siempre y cuando admita por lo menos un factor lineal.

Raíz de un polinomio:

Dado un polinomio $P(x)$ no constante, **a** es una raíz del polinomio $P(x)$, si y sólo si $P(a) = 0$.

Ejemplo:

$P(x) = x^3 - 3x - 2$

Observamos que $P(2) = 2^3 - 3(2) - 2 = 0$

Entonces diremos que 2 es una raíz de $P(x)$

Determinación de los posibles ceros o raíces racionales (P.C.R.) de un polinomio P(x)

Para conocer los posibles ceros racionales de un polinomio $P(x)$ de coeficientes enteros

$P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + ... + a_n \quad ; \quad a_0 \cdot a_n \neq 0$,

se utilizará el siguiente criterio:

$$P.C.R = \pm\left\{\frac{\text{Divisores de } |a_n|}{\text{Divisores de } |a_0|}\right\}$$

Ejemplo:

$$P(x) = 3x^4 + 4x + 2x^2 - 9$$

Los posibles ceros racionales :

$$P.C.R = \pm\left\{\frac{\text{Divisores de } 9}{\text{Divisores de } 3}\right\} = \pm\left\{\frac{1, 3, 9}{1, 3}\right\} = \pm\left\{1, 3, 9, \frac{1}{3}\right\}$$

El polinomio posiblemente se anule para algunos de estos valores, así

$P(1) = 3+4+2-9 = 0$, entonces $x = 1$ es un cero racional.

TEOREMA

Un polinomio tiene factores de primer grado de coeficientes racionales, si y sólo si, si tiene raíces racionales.

NOTA: Toda raíz racional de un polinomio pertenece, necesariamente al conjunto de los posibles ceros racionales.

Ejemplo:

Dado el polinomio $P(x) = x^3 - 3x + 1$, sus posibles ceros racionales son 1 ó -1.

Así mismo $P(1) = -1$

$P(-1) = 3$

esto nos indica que no tiene ceros racionales, por lo tanto, no tendrá factores lineales, indicando que $f(x)$ no será factorizable en los racionales.

TEOREMA DEL FACTOR

Dado un polinomio $P(x)$, el número "b" es un cero de este polinomio, si y sólo si $(x-b)$ será un factor de $P(x)$.

Ejemplo:

$P(x) = x^3 + 5x + 6$

P.C.R. $= \pm \{1,2,3,6\}$

como $P(-1) = (-1)^3 + 5(-1) + 6 = 0$

$\Rightarrow (x - (-1)) = (x+1)$ será un factor de $P(x)$

en tal caso será posible escribir

$P(x) = (x + 1)q(x)$

PROCEDIMIENTO PARA FACTORIZAR

Dado el polinomio

$P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + ... + a_n$; $a_0 \cdot a_n \neq 0$,

de coeficientes racionales, se procede de la siguiente manera:

1. Se halla los posibles ceros racionales que nos permiten encontrar la raíz o el cero racional, luego, mediante el teorema del factor, se podrá conocer el primer factor.
2. Se hace una división por Ruffini entre el polinomio y el primer factor encontrado, siendo el cociente de esta división el otro factor buscado.

Ejemplo 1

Factorizar: $P(x) = x^3 - 7x + 6$

Resolución:

I. Los posibles ceros racionales son

$\pm \{1, 2, 3, 6\}$

Veamos: $P(1) = 1-7+6 = 0$

$\Rightarrow (x - 1)$ es un factor

II. El otro factor por la regla de Ruffini:

$[P(x) \div (x-1)]$

	1	0	-7	6
$x=1$	↓	1	1	-6
	1	1	-6	0

$q(x)$

Recordar $P_{(x)} \equiv (x - 1)\, q(x)$

$\Rightarrow P_{(x)} \equiv (x-1)(x^2+x-6)$

$x \quad 3$

$x \quad -2$

$\therefore P(x) = (x-1)(x+3)(x-2)$

Ejemplo 2

Factorizar $P(x) = 2x^3 - 5x^2 - 23x - 10$

Resolución:

$$P.C.R. = \pm \left\{\frac{1, 2, 5, 10}{1, 2}\right\} = \pm \left\{1, 2, 5, 10, \frac{1}{2}, \frac{5}{2}\right\}$$

Para $x = -2 \Rightarrow P(-2) = 0$

(la verificación para el lector)

Luego, por la regla de Ruffini:

	2	-5	-23	-10
$x=-2$	↓	-4	18	+10
	2	-9	-5	0

$q(x)$

$\Rightarrow P(x) = (x + 2)(2x^2 - 9x - 5)$

$2x \quad 1$

$x \quad -5$

$\therefore P(x) = (x+2)(2x+1)(x-5)$

Ejemplo 3

Factorizar

$$P(x) = \underline{4}x^5 - 29x^3 - 24x^2 + 7x + \underline{6}$$

Resolución:

Hallando los posibles ceros racionales:

$$P.C.R = \pm \left\{\frac{1, 2, 3, 6}{1, 2, 4}\right\} = \pm \left\{1, 2, 3, 6, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right\}$$

Podemos hacer directamente la división por Ruffini, consecutivamente.

	4	0	-29	-24	7	6
$x=-1$	↓	-4	4	+25	-1	-6
$x=-2$	4	-4	-25	12	6	0
	↓	-8	24	2	-6	
$x=3$	4	-12	-1	3	0	
	↓	12	0	-3		
$x=\frac{1}{2}$	4	2	-1	0		
		2	1			
	④	②	0			

Luego

$$P(x) = (x+1)(x+2)(x-3)(x-½)(4x+2),$$

que es idéntico a

$$P(x) = (x+1)(x+2)(x-3)(2x-1)(2x+1)$$

V. ARTIFICIOS DIVERSOS

Son métodos prácticos que facilitan la resolución de los problemas, tales como:

A. CAMBIO DE VARIABLE

Consiste en transformar, equivalentemente, mediante un cambio adecuado, un problema operativo en otro más simplificado.

Ejemplo 1

Factorizar

$$P(a, b, c) = (18c+7b+6a)(a+3c+3b)+3b^2$$

Resolución:

Agrupando convenientemente:

$(a+3c+3b)[6(a+3c+3b) - 11b] + 3b^2$

haciendo: $a + 3c + 3b = z$,se tiene

$P(z,b) = z(6z - 11b) + 3b^2$

$$6z^2 - \underline{11bz} + 3b^2$$

$3z \rightarrow -b$

$2z \rightarrow -3b$

Por aspa simple $P(z,b) = (3z - b)(2z - 3b)$

Luego, reponiendo z tenemos:

$P(a,b,c) = (3a + 9c + 8b)(2a + 6c + 3b)$

Ejemplo 2

Factorizar e indicar la suma de factores primos de

$$R(x) = (x^2 + 7x + 5)^2 + 3(x^2 + 7x + 5) - 10$$

Resolución:

Haciendo $x^2 + 7x + 5 = k$

se tiene $R(k) = k^2+3k-10$

luego, por aspa simple, se obtiene

$R(k) = (k+5)(k-2)$

Reponiendo **k** en términos de x

$$R(x) = (x^2 + 7x + 5 + 5)(x^2 + 7x + 5 - 2)$$

$$= (x^2 + 7x + 10)(x^2 + 7x + 3)$$

$x \rightarrow 5$

$x \rightarrow 2$

$$R(x) = (x+5)(x+2)(x^2+7x+3)$$

Por lo tanto, la suma de factores primos es:

$$x + 5 + x + 2 + x^2 + 7x + 3 = x^2 + 9x + 10$$

B. SUMAR Y RESTAR

Consiste en sumar y restar simultáneamente una misma expresión o descomponer algún término del polinomio, de tal modo que, una expresión aparentemente no factorizable se transforme en otro, fácilmente.

B1. **PARA POLINOMIOS DE GRADO PAR:** Consiste en buscar un trinomio cuadrado perfecto para luego llevarlo a una diferencia de cuadrados.

Ejemplo 1

Factorizar

$$f(x) = x^4 + 6x^2 + 25$$

Resolución:

Formando el trinomio cuadrado perfecto (sumar y restar $4x^2$)

$$F(x) = \underbrace{(x^2)^2 + 5^2 + \underbrace{6x^2 + 4x^2}_{10x^2}}_{(x^2+5)^2} - \boxed{4x^2} - \boxed{(2x)^2}$$

Diferencia de cuadrados

$$F(x) = \overbrace{(x^2 + 5)^2 - (2x)^2}$$

$$= (x^2+5x+2x)(x^2+5x-2x)$$

ordenando

$$F(x) = (x^2 + 2x + 5)(x^2-2x+5)$$

Ejemplo 2

Factorizar

$$M(x,y) = 16x^4 - 12x^2y^2+y^4$$

Resolución:

Descomponiendo

$-12x^2y^2$ como $-8x^2y^2 - 4x^2y^2$ se tiene

$$M(x,y) = \underbrace{16x^4 - 8x^2y^2 + y^4}_{(4x^2-y^2)^2} - 4x^2y^2$$

(Diferencia de cuadrados)

$M(x,y) = (4x^2-y^2)^2-(2xy)^2$

$= (4x^2 - y^2 + 2xy)(4x^2 - y^2 - 2xy),$

ordenando, se tiene

$M(x,y) = (4x^2 + 2xy - y^2)(4x^2 - 2xy - y^2)$

B2. PARA POLINOMIOS DE GRADO IMPAR:

Será necesario recordar las siguientes igualdades:

- $x^3 + 1 \equiv (x + 1)(x^2 - x + 1)$
- $x^3 - 1 \equiv (x - 1)(x^2 + x + 1)$
- $x^4 + x^2 + 1 \equiv (x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1)$

Ejemplo 1

Factorizar $P(x) = x^5 + x + 1$

Resolución:

Sumando y restando x^2 se tiene:

$P(x) = x^5 - x^2 + x^2 + x + 1$

$= x^2(x^3 - 1) + x^2 + x + 1$

$= x^2(x-1)(x^2+x+1) + x^2 + x + 1$

$= (x^2+x+1)[x^2(x-1)+1]$

$\therefore P(x) = (x^2 + x + 1)(x^3 - x^2 + 1)$

Ejemplo 2

Factorizar

$$Q(x) = x^7 + x^2 + 1$$

sumando y restando x^4:

$Q(x) = x^7 - x^4 + x^4 + x^2 + 1$

$= x^4(x^3 - 1) + (x^4 + x^2 + 1)$

$= x^4(x - 1)(x^2 + x + 1)$

$+ (x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1)$

$\Rightarrow Q(x) = (x^2 + x + 1)[x^4(x-1) + (x^2-x+1)]$

$\therefore Q(x) = (x^2 + x + 1)(x^5 - x^4 + x^2 - x + 1)$

C. POLINOMIOS RECÍPROCOS

Son aquellos polinomios que tienen por característica: *"si una raíz cualquiera es α la otra necesariamente es α^{-1} / $\alpha \neq 0$"* y tienen la siguiente forma:

$P_1(x) = ax+a$ (caso excepcional)

$P_2(x) = ax^2+bx+a$

$P_3(x) = ax^3+bx^2+bx+a$

$P_4(x) = ax^4+bx^3+cx^2+bx+a$

$\vdots$

TEOREMA

Todo polinomio recíproco de grado impar se anula para 1 ó -1

NOTA

Sea $P(x)$ un polinomio de grado impar entonces $(x-1)$ ó $(x+1)$ será uno de sus factores.

Procedimiento para factorizar polinomios recíprocos de grado par:

I. Se extrae la parte literal del término central dando lugar a expresiones de la forma $x + \frac{1}{x}, x^2 + \frac{1}{x^2}, \ldots$.

II. Se hace el cambio de variable $x + \frac{1}{x}$ con lo cual se logra disminuir el grado del polinomio en la mitad.

Ejemplo 1

$P(x) = x^4 + 6x^3 + 7x^2 + 6x + 1$

Resolución:

Se factoriza la parte literal del término central.

$$P(x) = x^2\left[x^2 + 6x + 7 + \frac{6}{x} + \frac{1}{x^2}\right]$$

$$\Rightarrow P(x) = x^2\left[\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + 6\left(x + \frac{1}{x}\right) + 7\right]$$

Hacemos : $x + \frac{1}{x} = z$

$\Rightarrow x^2 + \frac{1}{x^2} = z^2 - 2$

$\Rightarrow P(x,z) = x^2(z^2 - 2 + 6z + 7) = x^2(z^2+6z+5)$
$= x^2(z+1)(z+5)$

$\Rightarrow P(x,z) = x^2(z+5)(z+1)$

Reponiendo **z** :

$$P(x) = x^2\left(x + \frac{1}{x} + 5\right)\left(x + \frac{1}{x} + 1\right)$$

$\therefore P(x) = (x^2 + 5x + 1)(x^2 + x + 1)$

Ejemplo 2

Señalar el factor primo de mayor suma de coeficientes en

$A(x) = 3x^5 + 5x^4 + 3x^3 + 3x^2 + 5x + 3$

Resolución:

Se observa que $A(-1) = 0 \Rightarrow (x+1)$ es un factor de $A(x)$

El otro factor por Ruffini :

	3	5	3	3	5	3
$x=1$	↓	-3	-2	-1	-2	-3
	3	2	1	2	3	0

q

$q(x) = 3x^4+2x^3+x^2+2x+3$

$q(x)$ por polinomios recíprocos de grado par.

$$q(x) = x^2\left\{3x^2 + 2x + 1 + \frac{2}{x} + \frac{3}{x^2}\right\}$$

$$= x^2\left\{3\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + 2\left(x + \frac{1}{x}\right) + 1\right\}$$

Haciendo

$$x + \frac{1}{x} = z \Rightarrow x^2 + \frac{1}{x^2} = z^2 - 2$$

se tiene

$$q(x,z) = x^2[3(z^2-2)+2z+1]$$
$$= x^2(3z^2+2z-5)$$
$$= x^2(3z+5)(z-1)$$

Reponiendo z :

$$q(x) = x^2\left\{3\left(x + \frac{1}{x}\right) + 5\right\}\left\{x + \frac{1}{x} - 1\right\}$$

$q(x) = (3x^2 + 5x+3)(x^2-x+1)$,

luego tenemos

$A(x) = (x+1)(3x^2+5x+3)(x^2-x+1)$

De donde el factor de mayor suma de coeficientes es $3x^2 + 5x + 3$

D. FACTORIZACIÓN DE POLINOMIOS SIMÉTRICOS Y ALTERNADOS

D1. Polinomio Simétrico

Es el polinomio que no se altera al intercambiar cualquier par de variables en forma simultánea.

Ejemplo 1

Sea $G(x,y,z) = 5(x^3 + y^3 + z^3) + 2xyz$,

elegimos arbitrariamente dos variables y, z y las intercambiamos

$$G(x,z,y) = 5(x^3 + z^3 + y^3) + 2xzy$$
$$= 5(x^3 + y^3 + z^3) + 2xyz$$

Podemos observar que el polinomio no ha sufrido ningún cambio.

$\Rightarrow G(x,y,z)$ es simétrico.

Formas generales de los polinomios simétricos:

	1er. Grado	2do. Grado	3er. Grado
2 var.	$A(x+y)$	$A(x^2+y^2) + Bxy$	$A(x^3+y^3) + B(x^2y+xy^2)$
3 var.	$A(x+y+z)$	$A(x^2+y^2+z^2) + B(xy+xz+yz)$	$A(x^3+y^3+z^3) + B[x^2(y+z)+y^2(x+z) + z^2(x+y)] + cxyz$

D2. POLINOMIO ALTERNADO:
Es el polinomio que sólo cambia de signo al intercambiar cualquier par de variables de manera simultánea.

Ejemplo 1
$R(x,y) = x^3 - y^3$
Si cambiamos x por y, recíprocamente se obtiene $R(x,y) = y^3 - x^3 = -(x^3 - y^3)$
de donde $R(y,x) \equiv -R(x,y)$
por lo tanto $R(x,y)$ es alternado.

TEOREMAS

1. De la adición, sustracción, multiplicación de polinomios simétricos, resultan polinomios simétricos.
2. De la multiplicación de un polinomio simétrico por otro alternado resulta otro polinomio alternado.
3. Si un polinomio simétrico se anula para alguna de sus variables, se anulará para todas sus variables.
4. Si un polinomio se anula para una variable igual a otra, se anulará para esa misma variable igual a las demás.

Procedimiento para factorizar:
1. Se verifica si es simétrica o alternada.
2. Buscaremos factores binomios haciendo una variable igual a otra o a su negativo.
4. Se establece la identidad de polinomios teniendo presente la simetría.

Ejemplo 2
Factorizar $M(x,y) = (x+y)^5 - x^5 - y^5$
Resolución:
Observamos para:
$x = 0 \Rightarrow M(0,y) = 0 \Rightarrow x$ es un factor
$y = 0 \Rightarrow M(x,0) = 0 \Rightarrow y$ es un factor
$x = -y \Rightarrow M(-y,y) = 0 \Rightarrow x + y$ es factor

Por identidad :
$$(x+y)^5 - x^5 - y^5 \equiv \underbrace{xy(x+y)}_{\text{3er. grado}}\ \underbrace{Q(x,y)}_{\text{2do. grado}}$$

$\Rightarrow Q(x,y) = M(x^2+y^2) + N(xy)$
$\therefore (x+y)^5 - x^5 - y^5 \equiv xy(x+y)\{M(x^2+y^2) + Nxy\}$

Haciendo :
I. $x = y = 1$
$\Rightarrow 2^5 - 1 - 1 = 2\{2M + N\}$
$\Rightarrow 2M + N = 15$ ..... (α)
II. $x=2, y=-1$
$\Rightarrow 1 - 2^5 + 1 = (-2)(1)\{5M - 2N\}$
$\Rightarrow 5M - 2N = 15$ ..... (β)

De (α) y (β) $M = N = 5$
$\Rightarrow M(x,y) = xy(x+y)(5(x^2+y^2) + 5xy)$
$\therefore M(x,y) = 5xy(x+y)(x^2+y^2+xy)$

Ejemplo 3
Factorizar
$M(a,b,c) = a^3c + c^3b + b^3a - a^3b - b^3c - c^3a$
Resolución:
Si intercambiamos cualquier par de variables, el polinomio sólo alterna el signo.
Así $M(a,b,c) = -M(b,a,c)$. Entonces, el polinomio es alternado, además para $a=b$ se tiene $M(b,b,c)=0 \Rightarrow (a-b)$ es un factor de M. Luego, por polinomios alternados, los otros factores son



(a-b), (b-c) y (c-a)

$$\Rightarrow \underbrace{M(a,b,c)}_{\text{4to. grado}} = \underbrace{(a-b)(b-c)(c-a)}_{\text{3er. grado}} \cdot \underbrace{[k(a+b+c)]}_{\text{1er. grado}}$$

Análogamente al procedimiento del problema anterior, se comprueba que **k** es igual a **1**, luego:
$\Rightarrow M(a,b,c) = (a-b)(b-c)(c-a)(a+b+c)$

Problemas Resueltos

Problema 1

Al factorizar $P(x,y) = x^9y - x^3y^7$, establecer el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

I. x^2+xy+y^2 es un factor primo

II. x^2-y^2 no es un factor de $P(x,y)$

III. $P(x,y)$ no es factorizable en $\mathbb{Q}$

Resolución:

Extrayendo factor común al monomio x^3y, se tiene

$$P(x,y) = x^3y(x^6-y^6) = x^3y[(x^3)^2-(y^3)^2]$$
$$= x^3y(x^3+y^3)(x^3-y^3)$$

Luego por suma y diferencia de cubos,

$P(x,y) = x^3y(x+y)(x^2-xy+y^2)(x-y)(x^2+xy+y^2)$;

estudiando las proposiciones se concluye:

I. V II. F III. F

Problema 2

Factorizar en $\mathbb{R}$

$P(x,y) = x^3+28y^3+3xy(x+y)$

e indicar la suma de coeficientes de uno de sus factores primos.

Resolución

Observamos $28y^3 = y^3+27y^3$

Luego, reordenando:

$$P(x,y) = x^3 + y^3 + 3xy\,(x+y) + 27y^3$$
$$= (x+y)^3 + (3y)^3$$

Suma de cubos:

$$= (x+y+3y)[(x+y)^2-(x+y)3y+(3y)^2]$$
$$= (x+4y)[x^2+y^2+2xy-3xy-3y^2+9y^2]$$
$$= (x+4y)(x^2-xy+7y^2)$$

Los factores primos son $x+4y$, $x^2-xy+7y^2$ cuya suma de coeficientes es 5 y 7 respectivamente.

Problema 3

Luego de factorizar

$P(x,y)=x^3+y^3+z^3+x^2y+y^2z+z^2y+xy^2+xz^2+zx^2$

indicar un factor primo

Resolución:

Como son 9 términos agrupamos de 3 en 3 como se indica

$$\underline{x^3+y^3+z^3}+\underline{x^2y+y^2z+z^2y}+\underline{xy^2+xz^2+zx^2}$$

Entonces

$$x^2(\underline{x+y+z})+y^2(\underline{x+y+z})+z^2(\underline{x+y+z}),$$

por lo tanto $P(x,y) \equiv (x+y+z)(x^2+y^2+z^2)$,

de donde uno de los factores primos es:

$$x+y+z \quad \text{ó} \quad x^2+y^2+z^2$$

Problema 4

Luego de factorizar, indicar un factor primo de

$P(x,y,z) = 2[(x+y+z)^2+(x+y-z)^2]+5(x^2+y^2-z^2+2xy)$

Resolución:

Haciendo un cambio de variable $x+y=m$

Se tiene

$$\underbrace{2[(m+z)^2+(m-z)^2]}_{2(m^2+z^2)}+5(m^2-z^2)$$

$$= 2(2m^2+2z^2)+5m^2-5z^2$$
$$= 4m^2+4z^2+5m^2-5z^2$$
$$= 9m^2-z^2 = (3m+z)(3m-z)$$

Reponiendo **m**:

$$P(x,y,z) = (3(x+y)+z)\,(3(x+y)-z)$$
$$\equiv (3x+3y+z)(3x+3y-z)$$

Luego, un factor primo será $3x+3y+z$ ó $3x+3y-z$

Problema 5

Factorizando en $\mathbb{Q}$

$P(x) = (x^2+x+1)(x^2-x+1)+7x^2-385$

indicar la suma de sus factores primos lineales.

Resolución:

Efectuando por productos notables:

$P(x) = x^4+x^2+1+7x^2-385$

Reduciendo se obtiene $P(x)=x^4+8x^2-384$

Por aspa simple:

$$P_{(x)} = x^4+8x^2-384$$
$$x^2 \quad 24$$
$$x^2 \quad -16$$

Luego, $P(x) = (x^2+24)(x^2-16)$

$$\equiv (x^2+24)(x+4)(x-4)$$

Los factores primos lineales son

$(x+4)$ y $(x-4)$, cuya suma es $2x$

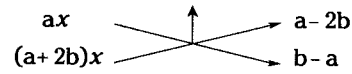
Problema 6

Indicar un factor primo de
$P(x) = (a^2+2ab)x^2+b(a-4b)x+(b-a)(a-2b)$

Resolución:

Por ser $P(x)$ polinomio cuadrático factorizamos por aspa simple

$$a(a+2b)x^2 + b(a-4b)x + (b-a)(a-2b)$$



$$= (ax+a-2b)\,[(a+2b)x+b-a]$$

Entonces, un factor primo es

$(ax+a-2b)$ ó $[(a+2b)x + b-a]$

Problema 7

Indicar el número de factores primos de
$P(x) = (x^2+7x+5)^2+3(x^2+1)+21x+2$

Resolución:

Efectuando y reordenando

$P(x) = (x^2+7x+5)^2+\underline{3x^2}+3+\underline{21x}+2$

$P(x) = (x^2+7x+5)^2+3(x^2+7x)+5$,

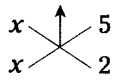
haciendo $x^2+7x+5 = y$ se tiene

$y^2+ 3(y-5) + 5 = y^2+3y-10 = (y+5)(y-2)$

Reponiendo y :

$$(x^2+7x+5+5)(x^2+7x+5-2)$$

$$(x^2+7x+10)(x^2+7x+3)$$



$P(x) = (x+5)(x+2)(x^2+7x+3)$, vemos que tiene 3 factores primos.

Problema 8

Si $A(x) = x^2-4x+m+1$ y

$B(x) = x^2-(m+1)x+4$

admiten un factor común lineal.

Hallar el valor de **m**, si $A(x) \neq B(x)$

Resolución:

Sea $x-\alpha$ el factor común de $A(x)$ y $B(x)$,entonces

$A(\alpha) = 0 \Rightarrow \alpha^2-4\alpha+m+1 = 0$

$B(\alpha) = 0 \Rightarrow \alpha^2-(m+1)\alpha+4 = 0$,

restando se tiene $(m-3)\alpha+m-3 = 0$

Entonces $(m-3)(\alpha+1) = 0$,

de donde $m-3 = 0$ ó $\alpha+1 = 0$

I. Si $m-3 = 0 \Rightarrow A(x) = B(x)$

Contradicción con los datos

II. Si $\alpha+1 = 0 \Rightarrow \alpha = -1$,

En el polinomio $A(x)$.

$A(-1)=(-1)^2-4(-1)+m+1 = 0$

$\Rightarrow 1+4+m+1 = 0 \Rightarrow m = -6$

$\therefore m= -6$

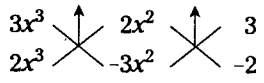
Problema 9

Señalar el factor primo de menor suma de coeficientes de $F(x) = 6x^6-5x^5-6x^4-13x^2-6$

Resolución:

Factorizando por aspa doble :

$$6x^6- 5x^5- 6x^4- 13x^2- 6$$



$$\therefore F(x) = (3x^3+2x^2+3)(2x^3-3x^2-2)$$

ya que los factores cúbicos, si fueran factorizables deben admitir divisores binomios; sin embargo, no es así. Se concluye entonces que $2x^3-3x^2-2$ es el factor primo de menor suma de coeficientes.

Problema 10

Luego de factorizar

$K(a;b) = a(a^2 + ab - 1) - b(b^2 + ab - 1)$

dar la suma de sus factores primos.

Resolución:

Efectuando y agrupando adecuadamente :

$K(a,b) = a^3 + a^2b - a - b^3 - ab^2 + b$

$= a^3-b^3+ab(a-b)-(a-b)$

$= (a-b)(a^2+ab+b^2)+ab(a-b)-(a-b)$

$= (a-b)\{a^2+ab+b^2+ab-1\}$

$= (a-b)\{(a+b)^2 - 1\}$,

por diferencia de cuadrados se obtiene

$K(a,b) = (a-b)(a+b+1)(a+b-1)$

cuyos factores primos son

$a-b\ ;\ a+b+1\ ;\ a+b-1$

$\therefore \Sigma$ fact. primos es $3a+b$

Problema 11

Indicar un factor primo de
$S(a,b,c) = a^2+a+b-b^2-c^2-c+2bc$

Resolución:

Agrupando convenientemente

$S(a,b,c) = a^2-b^2-c^2+2bc + a+b-c$

$= \underbrace{a^2 - (b-c)^2}_{\text{diferencia de cuadrados}} + a + b - c$

$= (a+b-c)(a-b+c)+(a+b-c)$

$= (a+b-c)(a-b+c+1)$

cuyos factores primos son $a+b-c$; $a-b+c+1$

Problema 12

Con respecto al polinomio
$S(a,b,c) = a(a^2+bc) + c(a^2+b^2) - b^3$
Indicar el valor de verdad de cada una de las proposiciones:

I. Un factor primo es $a+c-b$
II. La suma de coeficientes de un factor primo es 2
III. Tiene 3 factores primos lineales.

Resolución:

Efectuando y agrupando adecuadamente :

$S(a,b,c) = a^3 + abc + a^2c + b^2c - b^3$

$= a^3 - b^3 + c(ab+a^2+b^2)$

$= (a-b)(a^2+ab+b^2)+ c(a^2+ab+b^2)$

$= (a^2+ab+b^2)(a-b+c)$

Respondiendo a las proposiciones, tenemos:

I. V II. F III. F

Problema 13

Señalar el factor primo de mayor suma de coeficientes del polinomio
$S(a,b) = (1-ab)^2 - (a^2 + b^2 + 1)$

Resolución:

Efectuando y agrupando de manera adecuada:

$S(a,b) = 1 - 2ab + a^2b^2 - a^2 - b^2 - 1$

$= a^2b^2 - (a^2 + b^2 + 2ab) \equiv \underbrace{(ab)^2-(a+b)^2}_{\text{diferencia de cuadrados}}$

$S(a,b) = (ab+a+b)(ab-a-b)$

Luego el factor primo de mayor suma de coeficiente es $(ab+a+b)$

Problema 14

Señalar la suma de coeficiente de un factor primo del polinomio $S(x) = x^2 - 2b^2x - b^8 - b^4 - 1$

Resolución:

> **Nota** $x^2 - 2b^2x + b^4 \equiv (x - b^2)^2$

Sumando y restando b^4

$S(x) = \underbrace{x^2-2b^2x+b^4}_{} \underbrace{- b^8-2b^4-1}_{}$

$= \underbrace{(x - b^2)^2 - (b^4 + 1)^2}_{\text{diferencia de cuadrados}}$

$S(x) = (x-b^2+b^4+1)(x-b^2-b^4-1)$

Luego, la suma de coeficientes es
$1 - b^2 + b^4 + 1$ ó $1 - b^2 - b^4 - 1$
es decir $b^4 - b^2 + 2$ ó $-b^4 - b^2$

Problema 15

Dar un factor primo del polinomio
$F(a,b) = a(c^4+1) - 2ac^2 + (a+1)^2(c+1)^2c$

Resolución:

Agrupando convenientemente :

$\equiv a\{c^4 + 1 - 2c^2\} + (a+1)^2(c+1)^2c$

$= a(c-1)^2(c+1)^2 + (a+1)^2c(c+1)^2$

$= (c+1)^2[a(c-1)^2 + c(a+1)^2]$,

efectuando

$= (c+1)^2\{\underline{ac^2} - \cancel{2ac} + \underline{a} + \underline{ca^2} + \cancel{2ac} + \underline{c}\}$

$= (c+1)^2\{ac(\underline{a+c}) + (\underline{a+c})\}$

$= (c+1)^2(a+c)(ac+1)$

Luego, un factor primo es $c+1$ ó $a+c$ ó $ac+1$

Problema 16

Demostrar que para todo **k** entero
$P(x) = x^2 + 6kx + 1$ no es factorizable sobre los racionales.

Resolución:

Analicemos su discriminante

$\Delta = (6k)^2 - 4(1) \equiv 36k^2 - 4 \equiv 4(9k^2 - 1)$

Observamos que $9k^2$ es un cuadrado perfecto, entonces $9k^2-1$ no puede ser cuadrado perfecto, ya que no existen dos números consecutivos diferentes de 0 y 1 donde ambos sean cuadrados perfectos.

En consecuencia, $x^2 + 6kx + 1$ no es factorizable en $\mathbb{Q}$.

Problema 17

Factorizar

$$F(a,b,c) = (a+2b+3c)(a+3b+5c)+2bc$$

Resolución:

A la expresión a+2b+3c llamaremos z, es decir $a+2b+3c = z$; luego tenemos $z(z+b+2c) + 2bc$ que es equivalente a $z^2+(b+2c)z+2bc$.

Factorizando por aspa simple :

$$z^2 + (b+2c)z + 2bc$$

$z \rightarrow 2c$

$z \rightarrow b$

$F(z,b,c) = (z+2c)(z+b)$

Reponiendo z:

$F(a,b,c) = (a+2b+3c+2c)(a+2b+3c+b)$

$\therefore F(a,b,c) = (a+2b+5c)(a+3b+3c)$

Problema 18

Señalar la suma de los factores primos de $M(a) = a^4 - 2(b^2+c^2)a^2 + (b^2-c^2)^2$

Resolución:

Por aspa simple

$$=a^4 - 2(b^2+c^2)a^2 + (b+c)^2(b-c)^2$$

$a^2 \rightarrow -(b+c)^2$

$a^2 \rightarrow -(b-c)^2$

Veamos la comprobación

$$-a^2\underbrace{\{(b+c)^2 + (b-c)^2\}}_{\text{Id. de Legendre}} = -a^2[2(b^2+c^2)]$$

$$= -2a^2(b^2+c^2)$$

luego, su forma factorizada es

$$[a^2 - (b+c)^2][a^2 - (b - c)^2]$$

Por diferencia de cuadrados:

$$(a+b+c)(a-b-c)(a+b-c)(a-b+c)$$

de donde la suma de factores primos será

$$a + \not{b} + \not{c} + a - \not{b} - \not{c} + a + \not{b} - \not{c} + a - \not{b} + \not{c} = 4a$$

Problema 19

¿Cuántos factores algebraicos posee el polinomio

$P(x,y,z)=(x^2+y^2+z^2)^3-3(xy+xz+yz)^2$

$(x^2+y^2+z^2)+ 2(xy+xz+yz)^3$?

Resolución:

Haciendo cambio de variable :

$$x^2 + y^2 + z^2 = m$$

$$xy + xz + yz = n$$

se tendrá

$$m^3 - 3n^2m + 2n^3$$

Separando $-3n^2m$ como $-mn^2 - 2mn^2$

$\Rightarrow m^3 - mn^2 - 2mn^2 + 2n^3$

$= m(m^2-n^2) - 2n^2(m-n)$

$= m(m+n)(m-n)-2n^2(m-n)$

$(m-n)(m^2 + mn - 2n^2)$

$m \rightarrow 2n$

$m \rightarrow -n$

$= (m-n)(m+2n)(m-n) \Rightarrow (m-n)^2(m+2n)$

Reponiendo m y n :

$= (x^2+y^2+z^2-xy-xz - yz)^2$

$(x^2+y^2+z^2+2(xy+xz+yz))$

$\Rightarrow P(x,y,z) = (x^2+y^2 + z^2 - xy-xz - yz)^2 (x+y+z)^2$,

de donde el número de factores algebraicos es $(2+1)(2+1) - 1 = 8$

$\therefore$ Tiene 8 factores algebraicos.

Problema 20

Indicar el factor primo de mayor suma de coeficientes en

$$H(x,y) = 24x^3y^2+60x^2y^2-6xy^4+6xy^3+ 36xy^2$$

Resolución:

Extrayendo el factor común monomio: $6xy^2$, se tiene $H(x,y) = 6xy^2(4x^2+10x-y^2+y+6)$

Por aspa doble :

$$6xy^2(4x^2 + 0xy - y^2 + 10x + y + 6)$$

$2x \rightarrow y \rightarrow 2$

$2x \rightarrow -y \rightarrow 3$

$\therefore H(x,y) = 6xy^2(2x+y+2)(2x-y+3)$

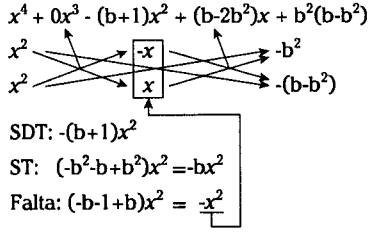
Los factores primos son x, y, $2x + y + 2$, $2x-y+3$ y el de mayor suma de coeficientes es $2x+y+2$

Problema 21

Luego de factorizar
$P(x) = x^4 - (b+1)x^2 + (b-2b^2)x + b^3(1-b)$,
halle el valor numérico entero de un factor primo para $2x = 1 + \sqrt{4b^2+5}$

Resolución:

Factorizando por aspa doble especial :



luego, la forma factorizada es
$P(x) = (x^2 - x - b^2)(x^2 + x - b + b^2)$

evaluando en $2x = 1 + \sqrt{4b^2+5}$

$\Rightarrow 2x-1 = \sqrt{4b^2+5}$

$\Rightarrow 4x^2-4x+1 = 4b^2+5$

$\Rightarrow 4x^2 - 4x - 4b^2 = 4 \Rightarrow x^2 - x - b^2 = 1$

$\therefore$ El valor numérico entero de un factor primo es 1

Problema 22

Señalar un factor primo de
$P(x) = x^3(3x+1)^3 - (6x+1)^2 - 15$

Resolución:

$P(x) = [x(3x+1)]^3 - (6x+1)^2 - 15$
$= (3x^2+x)^3 - (36x^2+12x+1) - 15$
$= (3x^2+x)^3 - 12(3x^2+x) - 16$,
haciendo $3x^2+x = z$ se tiene $P(z) = z^3 - 12z - 16$
Por divisores binómicos, se observa $P(-2)=0$, luego $(z+2)$ es un factor.
Por Ruffini

	1	0	-12	-16
$z=-2$ ↓		-2	4	16
	1	-2	-8	0

$\Rightarrow P(z) = (z+2)(z^2-2z-8)$



$\Rightarrow P(z) = (z+2)^2(z-4)$

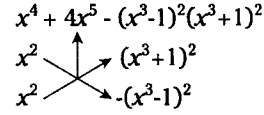
Reemplazando el valor de z
$P(x) = (3x^2 + x + 2)^2 (3x^2+x-4)$
$P(x) = (3x^2 + x + 2)^2 (3x+4)(x-1)$,
de donde un factor primo puede ser
$3x^2 + x + 2$ ó $3x + 4$ ó $x-1$

Problema 23

Obtener el número de factores algebraicos de
$Q(x) = x^4 + 4x^5 - (x^6 - 1)^2$

Resolución

Veamos por aspa simple



Comprobando
$x^2\underbrace{\{(x^3+1)^2 - (x^3-1)^2\}}_{\text{Id. de Legendre}} = x^2\{4x^3\} = 4x^5$

$\Rightarrow Q(x) = [x^2 + (x^3+1)^2][x^2-(x^3-1)^2]$
$= (x^6+2x^3+x^2+1)(x+x^3-1)(x-x^3+1)$,
de donde el número de factores algebraicos es
$(1+1)(1+1)(1+1)-1 = 7$

Problema 24

Hallar la suma de coeficientes de un factor primo de $M(x) = (x-3)^5 + 81x$

Resolución:

Haciendo un cambio de variable $x-3 = z$
$\Rightarrow M(z) = z^5 + 81(z+3) = z^5+81z + 243$

$$\Rightarrow M(z) = 243\left\{\frac{z^5}{243} + \frac{81z}{243} + \frac{243}{243}\right\}$$

$$\Rightarrow M(z) = 243\left\{\left(\frac{z}{3}\right)^5 + \left(\frac{z}{3}\right) + 1\right\},$$

haciendo $\frac{z}{3} = t$

$M(t) = 243(t^5+t+1)$

Recuerde:

$$t^5+t+1 \equiv (t^2+t+1)(t^3-t^2+1)$$

$$\Rightarrow M(z) = 243\left\{\frac{z^2}{9} + \frac{z}{3} + 1\right\}\left\{\frac{z^3}{27} - \frac{z^2}{9} + 1\right\}$$

$M(z) = (z^2+3z+9)(z^3-3z^2+27)$

En x es :

$M(x) = [(x-3)^2+3(x-3)+9]\,[(x-3)^3-3(x-3)^2+27]$

efectuando

$$M(x) = (x^2-3x+9)(x^3-12x^2+33x-27)$$

De donde la suma de coeficientes de un factor primo es 7 ó -5

Problema 25

¿Cuántos factores primos tiene el polinomio

$P(x) = x^7 - 2x^5 - 1$?

Resolución:

Observamos que

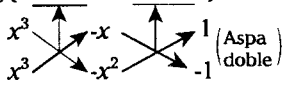
$$P(-1) = (-1)^7 - 2(-1)^5 - 1 = 0$$

$\Rightarrow (x+1)$ es un factor de $P(x)$,

el otro factor por Ruffini

	1	0	-2	0	0	0	0	-1
$x=-1$	↓	-1	1	1	-1	1	-1	1
	1	-1	-1	1	-1	1	-1	0

$$\Rightarrow P(x) = (x+1)(x^6-x^5-x^4+x^3-x^2+x-1)$$



$$\Rightarrow P(x) = (x+1)(x^3-x+1)(x^3-x^2-1)$$

$\therefore$ Tiene 3 factores primos

Problema 26

Señale el factor primo de menor suma de coeficientes en

$$J(x,y) = (x^2 - xy + y^2)^2 - 4xy(x+y)^2$$

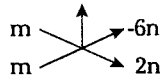
Resolución:

De $J(x,y) = (x^2+y^2-xy)^2 - 4xy(x^2+y^2+2xy)$,

haciendo $x^2+y^2 - xy = m$ ∧ $xy = n$

$$\Rightarrow J(m,n) = m^2 - 4n(m+3n)$$

$$= m^2 - 4mn - 12n^2$$



$$\Rightarrow J(m,n) = (m-6n)(m+2n)$$

Reponiendo m ∧ n

$$J(x,y) = (x^2+y^2-xy-6xy)(x^2+y^2-xy+2xy)$$

$$\Rightarrow J(x,y) = (x^2+y^2-7xy)(x^2+y^2+xy)$$

Luego el factor de menor suma de coeficientes es $x^2 + y^2 - 7xy$.

Problema 27

Indique el valor de verdad con respecto al polinomio

$P(x) = x^6-9x^5+30x^4-45x^3+30x^2-9x+1$

I. Tiene un solo factor primo mónico

II. Un factor primo es $x^2 + 3x + 1$

III. El término lineal de un factor primo es $-3x$

Resolución:

Por polinomios recíprocos

$$P(x) = x^3\left\{x^3-9x^2+30x-45+\frac{30}{x}-\frac{9}{x^2}+\frac{1}{x^3}\right\}$$

$$= x^3\left\{\left(x^3+\frac{1}{x^3}\right)-9\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+30\left(x+\frac{1}{x}\right)-45\right\},$$

haciendo $x + \frac{1}{x} = z$

$$\Rightarrow x^2 + \frac{1}{x^2} = z^2 - 2 \quad ; \quad x^3+\frac{1}{x^3} = z^3-3z$$

reemplazando obtenemos

$$P(x;z) = x^3\{z^3-3z-9(z^2-2)+30z-45\}$$

$$= x^3(z-3)^3$$

Reponiendo z

$$P(x) = x^3\left(x+\frac{1}{x}-3\right)^3 = x^3\left(\frac{x^2-3x+1}{x}\right)^3$$

$$P(x) = (x^2 - 3x + 1)^3$$

$\therefore$ I) V II) F III) V

Problema 28

Factorizar

$G(a,b,c)=(a+b+c)^5-(b+c-a)^5-(c+a-b)^5$
$-(a+b-c)^5$

Resolución:

Haciendo

$$\left.\begin{array}{l} b + c - a = x \\ c + a - b = y \\ a + b - c = z \end{array}\right\} \quad (+)$$

$$\Rightarrow a + b + c = x + y + z$$

$$\Rightarrow G(x,y,z) = (x+y+z)^5 - x^5 - y^5 - z^5$$

El polinomio es simétrico, puesto que si

$x = -y \Rightarrow G(-y, y, z) = 0$

$\Rightarrow$ $(x+y)$ es un factor, así mismo $(x+z)$, $(y+z)$ son factores

Comparando los grados

$$\underbrace{(x+y+z)^5 - x^5 - y^5 - z^5}_{\text{5to. grado}} \equiv \underbrace{(x+y)(x+z)(y+z)}_{\text{3er. grado}} \cdot \underbrace{Q(x,y,z)}_{\text{2do. grado}}$$

como

$$Q(x,y,z) = A(x^2+y^2+z^2) + B(xy + xz + yz)$$

Por ser polinomios idénticos, para conocer A y B asignaremos

$x=1, y=1, z=0 \Rightarrow 2A+B = 15$

$x=1, y=1, z=1 \Rightarrow A+B = 10$

de donde se obtiene $A = 5$, $B = 5$

$G(x,y,z) = (x+y)(x+z)(y+z)5(x^2+y^2+z^2)+ 5(xy+xz+yz)\}$

Reponiendo los valores de $x, y, z,$ en términos de a,b,c

$$\therefore G(a,b,c) = 80abc(a^2+b^2+c^2)$$

Problema 29

Factorizar

$A(x,y,z) = x^2(y-z)^3 + y^2(z-x)^3+z^2(x-y)^3$

Resolución:

El polinomio es alternado, ya que si

$x=y \Rightarrow A(x,y,z)=0 \Rightarrow (x-y)$ es un factor, del mismo modo son factores $(y-z),(z-x)$

$$\Rightarrow \underbrace{x^2(y-z)^3 + y^2(z-x)^3 + z^2(x-y)^3}_{\text{5to. grado}}$$

$$\equiv \underbrace{(x-y)(y-z)(z-x)}_{\text{3er. grado}} \cdot \underbrace{Q(x,y,z)}_{\text{2do. grado}}$$

$\Rightarrow A(x,y,z)=(x-y)(y-z)(z-x)[M(x^2+y^2+z^2) + N(xy+xz + yz)]$

siendo $Q(x,y,z)$ un polinomio simétrico.

Luego, por ser polinomios idénticos:

Para $x=0,\ y=1, z=-1 \Rightarrow 2M-N = -1$

Para $x=1,\ y=-1, z=2 \Rightarrow 6M-N = -1$

de donde $M = 0 \ \wedge \ N = 1$

Entonces

$$A(x,y,z) = (x-y)(y-z)(z-x)(xy+xz+yz)$$

Problema 30

En base al polinomio

$M(x) = x^7-8x^6+21x^5-15x^4-15x^3+21x^2-8x+1$,

establecer el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

I. Tiene 4 factores primos

II. x^3-2x+1 es uno de sus factores

III. x^2-3x+1 es un factor primo

Resolución:

$M(x)$ polinomio recíproco de grado impar

$M(-1) = 0$, luego, por divisores binómicos :

	1	*-8*	*21*	*-15*	*-15*	*21*	*-8*	*1*
$x=-1$	↓	*-1*	*9*	*-30*	*45*	*-30*	*9*	*-1*
	1	*-9*	*30*	*-45*	*30*	*-9*	*1*	*0*

$$M(x) = (x+1)\underbrace{(x^6 - 9x^5+30x^4-45x^3+30x^2-9x+1)}_{Q(x)}$$

Como $Q(x)$ es un polinomio recíproco de grado par, factorizado (x^3) se tiene :

$$x^3\left\{x^3 - 9x^2 + 30x - 45 + \frac{30}{x} - \frac{9}{x^2} + \frac{1}{x^3}\right\}$$

$$x^3\left\{\left(x^3 + \frac{1}{x^3}\right) - 9\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + 30\left(x + \frac{1}{x}\right) - 45\right\},$$

haciendo $x + \frac{1}{x} = z$

entonces $x^2 + \frac{1}{x^2} = z^2-2$, $x^3 + \frac{1}{x^3} = z^3-3z$

Reemplazando tenemos

$$x^3\{z^3-3z-9(z^2\ 2) + 30z-45\}$$

$$x^3\{z^3-9z^2+27z-27\} = x^3(z-3)^3$$

reponiendo z :

$$M(x) = x^3\left(x + \frac{1}{x} - 3\right)^3 = (x^2-3x+1)^3$$

$$\therefore M(x)=(x+1)(x^2-3x+1)^3$$

I. F II. F III. V

Problemas Propuestos

1. Indicar el número de factores irreductibles de

$$P(x,y,z) = x^4y^2z^7 + xy^2z^7 + 3x^3y^2z^7 + 3x^2y^2z^7$$

A) 5 B) 2 C) 3
D) 4 E) 1

2. Factorizar
$M(a,b) = a^2-4+2ab+b^2$ e indique un factor primo.

A) a+b+2 B) b-2 C) a+b-4
D) a+2 E) b+2

3. Señalar un factor primo, luego de factorizar
$P(x)=x^2+(b+c+2d)x+d^2+(b+c)d+bc$

A) $x+b+c$ B) $x+2d$ C) $x+d+b+c$
D) $x+c$ E) $x-2c$

4. Señalar un factor primo de
$H(x)=(2x^2+x-1)^2-(x^2-3x-5)^2$

A) $3x^2+2x-6$ B) $(x-2)^2$ C) $3x^2-2x-6$
D) $(x+2)^2$ E) $(x-2)$

5. ¿Cuántos divisores primos posee
$T(a,b)=(a^2-6ab+b^2)^2-4ab(a+b)^2$?

A) 2 B) 5 C) 4
D) 3 E) 6

6. Factorizar
$P(a,b,c) = a(b-c)^2 + b(c-a)^2 + c(a-b)^2 + 8abc$

A) $(a^2+b^2+c^2)(a+b+c)$
B) $(ab+ac+bc)(a+b+c)$
C) $(a+b)(b+c)(c+a)$
D) $(a-b)(b-c)(c-a)$
E) $(ab+ac+bc)(a-b+c)$

7. Indicar un factor primo de
$P(x;y;z)=[(x-y+z)(x-y-z)+1]^2-4(x-y)^2$

A) $x+y+z+1$ B) $x-y+z+1$
C) $x-y+z$
D) $x-y+z+2$ E) $z+y-x+2$

8. ¿Cuál de las siguientes expresiones no es término de un factor primo de
$F(x,y)=1+2x^2-(6x^2y^2+4x^3y+y^4+4xy^3)$?

A) $-x^2$ B) $2xy$ C) y^2
D) $2x^2$ E) $-y^2$

9. Indicar el factor primo cuadrático de mayor suma de coeficientes, después de factorizar
$M(x) = x^4+4x^2+16$

A) x^2+x-2 B) x^2+2x-4 C) x^2+x-8
D) x^2+8 E) x^2+2x+4

10. Factorizar los polinomios
$P(x,y) = 6x^2+19xy+15y^2-11x-17y+4$
$F(x,y) = x^2+y^2-4+2xy+3x+3y$
y señalar como respuesta el factor primo no común de mayor suma de coeficientes.

A) $3x+5y-4$ B) $2x+3y-1$ C) $x+y+4$
D) $x+y-1$ E) $2x+y+4$

11. Señalar el factor primo cuadrático de mayor suma de coeficientes en
$P(x) = x^4-4x^3+11x^2-14x+10$

A) x^2+3x+2 B) x^2-2x+5 C) x^2-4x-2
D) x^2+4x+2 E) x^2-2x+2

12. Hallar la suma de coeficientes de un factor primo de
$P(x) = (1+x^2)(1-x^2)^2+(x-x^2)^2$

A) 2 B) 4 C) 3
D) 0 E) 5

13. Factorizar
$M(z)= z^2(z^8+1)+z^6+(z^2-1)(1+z^2+z^4)$
y dar como respuesta el número de factores primos.

A) 2 B) 4 C) 5
D) 3 E) 6

14. Obtener la suma de coeficientes de un factor primo del polinomio
$H(x) = x^3-x^2-17x+33$

A) -3 B) -6 C) -7
D) -5 E) -8

15. Hallar un factor primo de
$P(a,b)=ab-(ab-1)(1+a-ab)(b+1)b$

A) 1+ab B) ab C) 1-ab
D) 1 E) a+b

16. Factorizar y dar como respuesta la suma de coeficientes de un factor primo de
$P(x,y) = 6x^{2n} - 4y^{2n} + 7 + 5x^ny^n + 3y^n - 17x^n$

A) 0 B) 2 C) 12
D) 1 E) 6

17. Factorizar e indicar el factor primo cúbico de
$P(x)=x^5-x^4+2x^2-2x+1$

A) x^3+x+1 B) x^3+x^2+1
C) x^3+x+x^2-1
D) x^3-x+1 E) x^3-x^2+1

18. Obtener el número de factores algebraicos de $Q(x) = x^4+4x^5-(x^6-1)^2$

A) 7 B) 6 C) 8
D) 9 E) 5

19. Factorizar
$F(a,b,c) = (a+b+c)^2+(a+b-c)^2 + 4c(a+b)-5(a+b+c)+2$
e indicar el factor primo del mayor término independiente.

A) 2a+2b+2c+1 B) a+b+c-2
C) 2a+2b+c-1
D) a+b+c+2 E) 2a+2b+2c-1

20. Factorizar y obtener la suma de factores primos del polinomio
$P(x,y) = (x+2y)^2-2xy(3x-4xy+6y)$

A) x^2+4y^2 B) $2x^2+2xy+8y^2$
C) x^2-4y^2
D) $2x+4y-6xy$ E) $2x^2-2xy+8y^2$

21. Con respecto al polinomio
$P(a,b,c) = b^3(a-c^2) + c^3(b-a^2) + a^3(c-b^2) + abc(abc-1)$
Señalar el valor de verdad o falsedad de cada una de las proposiciones siguientes:
I. Un factor primo es $a^2 - b$
II. Un factor primo es $a^2 + b$
III. $a - c^2$ no es un factor primo

A) VVF B) VFV C) VFF
D) VVV E) FFF

22. Mencionar un factor primo del polinomio
$Q(x) = \alpha^2x^3 + (2\alpha\beta+\alpha^3\beta)x^2 + (\beta^2+2\alpha^2\beta^2)x+\alpha\beta^3$

A) $\beta x + \alpha$ B) $x + \alpha\beta$ C) $\alpha x + \beta^2$
D) $\beta x + \alpha^2$ E) $x + \alpha$

23. Del polinomio
$P(a,b) = a^4+5bc^2-a^2b-a^2c^2-2b^2-2c^4$
Decir si es verdadero o falso con respecto a la proposiciones siguientes:
I. Tiene 3 factores primos
II. Tiene 2 factores primos cuadráticos
III La mayor suma de coeficientes de un factor primo es $2 - 2c^2$; $0 < c < 1$

A) VVV B) VFF C) FVF
D) FVV E) VVF

24. Si $x^2 - 5x + 6$ es un factor de $P(x) = x^4 - 9x^2 + mx + n$.

Hallar el valor de $\frac{n}{m}$

A) 1 B) -3 C) 10
D) -5 E) 3

25. Luego de factorizar
$P(x) = (2x + 1)^7 + 4x(x+1) + 2$
Indicar un factor primo cuadrático

A) $4x^2 + x + 1$ B) $x^2 - 5x + 1$
C) $4x^2 + x + 3$
D) $2x^2 + x + 2$ E) $4x^2 + 6x + 3$

26. Indicar un factor de
$S(x) = (1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5)^2 - x^5$

A) $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$ B) $x^9 + 1$
C) $x^5 + 1$
D) $x^3 + x^2 + x + 1$ E) $x^4 + 1$

27. Indicar aquel polinomio que no es factor de
$Q(x,y) = x^3 + 2x^2y - 4xy^2 - 8y^3 - x + 2y$

A) $x - 2y$ B) $x + 2y + 1$
C) $x - 1 + 2y$
D) $x + 2y$ E) $x^2 - 1 + 4y(x+y)$

28. Con respecto al polinomio
$P(z) = z^6 - 9z^4 + 16z^3 - 9z^2 + 1$, indicar el valor de verdad de cada una de las proposiciones:

I. Un factor primo es $z^2 + 4z + 1$
II. Un factor algebraico es $(z-1)^3$
III Tiene sólo 2 factores primos mónicos

A) VVV B) FVF C) VVF
D) VFV E) FFF

29. Siendo $b+1 \wedge a-1$ cuadrados perfectos. Factorizar
$M(x) = x^6 - (a+b+1)x^4 + (ab+2a-1)x^2 - a + b - ab + 1$
y señale aquel que no es factor de $M(x)$

A) $x + \sqrt{b+1}$ B) $x - \sqrt{a-1}$
C) $x - \sqrt{b-1}$
D) $x^2 - 1$ E) $x^2 + 1 - a$

30. Luego de factorizar
$P(x) = x^5 + x^4 + x^2 + x + 2$
Indique el valor de verdad o falsedad de cada una de las proposiciones:

I. Un factor primo es $x^3 + x + 1$
II. Un factor primo es $x^2 - x + 1$
III La suma de coeficientes de un factor primo mónico es 1

A) VVV B) VFV C) FFV
D) FFF E) VFF

31. Señale aquel que no es factor
$P(x) = 6x^5 + 41x^4 + 97x^3 + 97x^2 + 41x + 6$

A) $x+1$ B) $x-2$ C) $2x + 1$
D) $3x^2 + 7x + 2$ E) $3x + 1$

32. Indicar un factor primo de
$P(a,b,c) = (ab)^5 + (bc)^5 + (ac)^5 + abc[a^5 + b^5 + c^5 + abc(a^2b^2c^2 + 1)]$

A) $a^3 + bc$ B) $b^4 + a$ C) $c^4 + ab$
D) $a^2 + bc$ E) $b^2 + ac$

33. Luego de factorizar
$S(x,y,z) = (3x + y - 5z)^5 + (2z - y - 2x)^5 + (3z - x)^5$

Indique el valor de verdad de cada una de las siguientes proposiciones:

I. Un factor primo es $2x+y-2z$
II. La suma de 2 factores primos es $x-3z$
III. Un factor primo es $3x + y + 5z$

A) FFF B) VVF C) FFV
D) VFV E) VVV

34. Indicar el valor de verdad con respecto al polinomio $P(x) = x(x-1)(x+2)(x-3)+8$

I. Tiene 2 ceros racionales
II. Tiene 3 factores primos mónicos
III. Tiene 2 factores cuadráticos

A) VVV B) VVF C) VFV
D) VFF E) FVF

35. Luego de factorizar un polinomio $P(x)$ en los racionales por el criterio del aspa simple se obtuvo:

$P(x) = 8x^a + bx^2 - (2+d)$

cx^2 — 1
$4x^2$ — d

Determinar uno de sus factores primos.

A) $4x^2 - x + 3$ B) $2x^2 + 1$
C) $4x^2 + x - 1$
D) $2x^2 - 1$ E) $4x^2 + 1$

36. Luego de factorizar por aspa doble especial al polinomio $P(x)$ se obtiene el siguiente esquema

$R(x) = x^4 + 3x^3 - 5x^2 + mx - 2$

x^2 — ax — -2
x^2 — bx — 1

Dar el valor de $a + b + m$; $a < b$

A) 5 B) -5 C) 6
D) 7 E) -6

37. Si los trinomios
$f(x) = x^2 + ax + 6$ ∧ $g(x) = x^2+bx+3$
admiten un factor común de la forma $2x+c$.
Hallar el valor de $ac-bc$.

A) 6 B) -6 C) 4
D) -4 E) 2

38. Sea el polinomio $P(x) = x^4 - 3x^2 - 6x - 8$
Determinar el valor numérico de un factor primo cuando:

$$x = \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{21}{4}}$$

A) 0 B) 1 C) 2
D) 3 E) 4

39. Luego de factorizar
$S(a,b,c) = (2a^2 + ab + ac + bc)^2 + a^2(b\ c)^2$
Señale el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

I. Tiene 2 factores primos cuadráticos
II. Un factor primo es: $2a^2 - 2ab + b^2$
III. Tiene 2 factores primos lineales

A) VVV B) VFV C) VFF
D) FVF E) FFV

40. Indicar el valor de verdad de cada una de las proposiciones con respecto a este polinomio:
$P(x) = x^5 - 5x^4 - x^3 + 16x^2 - 11x + 2$

I. Un factor primo es cúbico de término independiente 2
II. $-5x$ es un término de un factor primo
III. $-3x$ es un término de un factor primo cuadrático

A) VVV B) VFF C) VVF
D) FVF E) FVV

1 A	11 B	21 C	31 E
2 A	12 E	22 B	32 C
3 A	13 B	23 D	33 B
4 C	14 E	24 B	34 A
5 A	15 C	25 E	35 B
6 C	16 A	26 A	36 E
7 B	17 D	27 D	37 A
8 A	18 A	28 A	38 B
9 E	19 E	29 C	39 C
10 C	20 D	30 D	40 D

Claves