UNIDAD 13

Desigualdades

Definiciones

Una desigualdad expresa que una cantidad real, o una expresión, es mayor o menor que otra.

A continuación se indica el significado de los signos de desigualdad.

1) $a > b$ significa que "a es mayor que b" (o bien que a – b es un número positivo).
2) $a < b$ significa que "a es menor que b" (o bien que a – b es un número negativo).
3) $a \geq b$ significa que "a es mayor o igual que b".
4) $a \leq b$ significa que "a es menor o igual que b".
5) $0 < a < 2$ significa que "a es mayor que cero, pero menor que 2"
6) $-2 \leq x < 2$ significa que x "es mayor o igual que –2, pero menor que 2".

Una desigualdad absoluta es aquella que se verifica para todos los valores reales de las letras que intervienen en ella. Por ejemplo $(a-b)^2 > -1$ es cierta para todos los valores reales de a y b ya que el cuadrado de todo número real es un número positivo o cero.

Una desigualdad condicional es aquella que solo es cierta para determinados valores de las letras. Por ejemplo: $x - 5 > 3$ sólo es verdad para x mayor que 8.

Las desigualdades $a > b$ y $c > d$ son del mismos sentido. Las desigualdades $a > b$ y $x < y$ son de sentido contrario.

Teoremas de las Desigualdades

1) El sentido de una desigualdad no se modifica si se suma o se resta, un mismo número real a sus dos miembros. Por consiguiente, para pasar un término de un miembro a otro de una desigualdad, no hay más que cambiarle de signo.

   Por ejemplo: si $a>b$ se tiene $a+c>b+c$ y $a-c>b-c$ y $a-b>0$.

2) El sentido de una desigualdad no se altera si se multiplica, o divide, por un mismo número real sus dos miembros.

   Por ejemplo: si $a > b$ y $k > 0$; se tiene: $ka > kb$ y $\frac{a}{k} > \frac{b}{k}$.

3) El sentido de una desigualdad se invierte cuando se multiplica o divide por un mismo número negativo sus dos miembros.

   Por ejemplo: si $a > b$ y $k < 0$, se tiene $ka < kb$ y $\frac{a}{k} < \frac{b}{k}$.

4) Si: $a > b$ y a, b, n son positivos se tiene $a^n > b^n$. Pero $a^{-n} < b^{-n}$.
   Ejemplos:

   $5 > 4$; se tiene $5^3 > 4^3$ ó $125 > 64$, pero $5^{-3} < 4^{-3}$ ó $\frac{1}{125} < \frac{1}{64}$.

   $16 > 9$; se tiene $16^{1/2} > 9^{1/2}$ ó $4>3$, pero $16^{-1/2} < 9^{-1/2}$ ó $1/4 < 1/3$.

5) Si: $a > b$ y $c > d$, se tiene $(a+c) > (b+d)$.
6) Si: $a>b>0$ y $c>d>0$, se tiene $ac > bd$.

También:

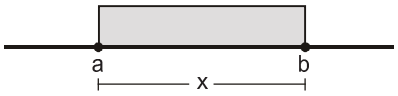
Desigualdades Estrictas

> : Mayor que
< : Menor que

Desigualdades No Estrictas

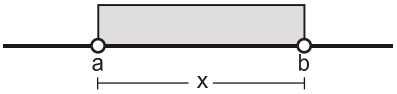
≥ : Mayor o lgual que
≤ : Menor o igual que

Intervalo Cerrado [ ]: Cuando intervienen los extremos: $a < b$.



Luego: $a \le x \le b$

Intervalo Abierto][: < > ; cuando no intervienen los extremos.

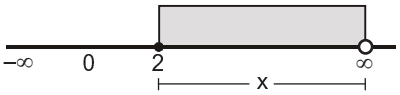


Luego: $a < x < b$

Observación:

El $+\infty$ y el $-\infty$ se escribirán como intervalos abiertos por no conocer su valor.

Ejemplo: $x \in [2; \infty\rangle$



Inecuaciones de 1er. Grado

Son aquellos inecuaciones que presentan la siguiente forma:

$$ax + b > 0 \quad ; \quad (< ; \geq ; \leq)$$

Una inecuación de este tipo se resuelve agrupando los términos que contienen a la incógnita en un sólo miembro y los términos que no la contienen en el otro para luego realizar un despeje.

Inecuación de 2do. Grado (con una incógnita)

FORMA:

$$\boxed{ax^2 + bx + c > 0} \; ; \; (< ; \geq ; \leq)$$

Métodos de Resolución

1. POR FACTORIZACION (ptos. críticos)

a. Se factoriza el poliomio mediante un aspa simple.
   a1. Se hallan los puntos críticos igualando cada factor a cero y se ubican en la recta numérica o eje lineal de coordenadas.
   a2. De derecha izquierda se ubican los signos (+) y menos (–) en forma alternada en cada intervalo.
   a3. Luego, si $P(x) \geq 0$ se tomarán los intervalos (+) positivos y si $P(x) \leq 0$ se tomarán los intervalos (–) negativos.

Ejemplo:

Resolver: $x^2 - x - 6 \leq 0$

1er. Paso: Factorizar: $x^2 - x + 6 \leq 0$

$x \quad -3$

$x \quad 2 \qquad \Rightarrow (x-3)(x+2) \leq 0$

2do. Paso: Ptos. críticos: $x - 3 = 0 \quad ^ \quad x + 2 = 0$

$\{3; -2\}$

3er. Paso: Ubicamos los puntos críticos en la recta numérica y hacemos la distribución de signos.



4to. Paso: Como $P(x) \leq 0$ tomamos el intervalo negativo.

$$x \in [-2; 3]$$

PROBLEMAS

01. Resolver:

$$\frac{3x-4}{2}+\frac{5x-6}{4}\geq\frac{8-7x}{2}$$

Señale un valor que la verifica

a) 0 b) 1 c) 2
d) -1 e) -3

02. Resolver; siendo a<b:

$$a(x-b)-b(x-a)\leq a^2-b^2$$

Señale el menor valor que puede tomar "x"

a) a b) a+b c) 0
d) –a e) -b

03. Resolver la ecuación:

$$x-8+\left(\frac{12}{x-6}\right)\geq 4-x+\left(\frac{12}{x-6}\right)$$

Indique la menor solución entera que asume "x"

a) 4 b) 5 c) 6
d) 7 e) 8

04. Determinar el número de soluciones enteras que verifican la inecuación:

$$2<\frac{3x+1}{2}<4$$

a) 1 b) 2 c) 3
d) 4 e) 5

05. Resolver:

$$x-7\leq 3x+1<x+15$$

Indique la suma de las soluciones enteras

a) 15 b) 11 c) 12
d) 5 e) 6

06. Determinar el menor valor entero de "x" si:

$$\frac{1}{7}\leq\frac{1}{2x+1}<\frac{1}{3}$$

a) 1 b) 2 c) 3
d) 4 e) 5

07. Si x ∈ [7;9] , calcule el mayor valor de "x":

$$\frac{x+3}{x-2}$$

a) 1 b) 0 c) 2
d) 12/7 e) 3

08. Resolver:

$$x^2-x-20<0$$

a) $x\in R$ b) $\langle -4;5\rangle$ c) $\langle -5;4\rangle$
d) $x\in\phi$ e) $\langle -4;\infty\rangle$

09. Resolver:

$$x^2+x-72\geq 0$$

Indique el menor valor entero positivo que se verifica.

a) 5 b) 6 c) 7
d) 8 e) 9

10. Resolver:

$$x^2+8x+20\leq 0$$

a) $x\in R$ b) $\langle -\infty;1\rangle$ c) $\langle -1;1\rangle$
d) $x\in\phi$ e) $\langle 4;\infty\rangle$

11. Resolver:

$$x^2+10x+27\geq 0$$

a) $x\in R$ b) $\langle -\infty;2\rangle$ c) $\langle -2;2\rangle$
d) $x\in\phi$ e) $\langle 2;\infty\rangle$

12. Resolver:

$$x^4 - x^2 - 12 < 0$$

Indique la suma de las soluciones enteras.

a) 0 b) 1 c) 2
d) 3 e) 4

13. Resolver:

$$\frac{1}{x^2 - 25} > 0$$

Indique la mayor solución entera negativa.

a) -4 b) -5 c) -6
d) -7 e) -8

14. Resolver:

$$\frac{x}{x^2 - 16} \leq 0$$

Indique la mayor solución entera.

a) 4 b) 5 c) 6
d) 0 e) 3

15. Si " x ⊠ R:

$$x^2 + bx + 4 > 0$$

El mayor valor natural de "b" es:

a) 0 b) 1 c) 2
d) 3 e) 4

16. Resolver:

$$x^4 - 8x^2 - 9 \geq 0$$

El menor valor positivo de "x" es:

a) 0 b) 1 c) 2
d) 3 e) 4

17. Indicar el menor valor natural que puede tomar "n" para que la inecuación:

$$x^2 - 5x + (n - 3) > 0$$

Se verifique para todo valor real de "x".

a) 9 b) 10 c) 11
d) 12 e) 13

18. Hallar la suma de todos los valores enteros obtenidos al resolver:

$$8 \leq \sqrt[4]{16^{x+5}} < 64^3$$

a) 71 b) 72 c) 73
d) 74 e) 75

19. Resolver:

$$\left|x^2 - 3\right| \leq 6$$

Dar como respuesta la suma de los valores enteros que se verifican.

a) 0 b) 1 c) 2
d) 3 e) 4

19. Calcular el menor valor de "n":

$$4x - x^2 - 10 \leq n \quad ; \text{Si } \forall x \in R$$

a) -4 b) -5 c) -6
d) -7 e) -8

CLAVES				
01c	02b	03d	04a	05b
06b	07c	08b	09d	10d
11a	12a	13a	14a	15d
16d	17b	18e	19a	20c