UNIDAD 8

Binomio de Newton

Definición

Dado un número entero positivo "n", se define su factorial al producto de los factores consecutivos desde la unidad hasta dicho número propuesto.

Notación

Existen dos notaciones: $n!$ y $\lfloor n$

Ejemplos:

$1! = \lfloor 1 = 1$

$2! = \lfloor 2 = 1 \times 2 = 2$

$3! = \lfloor 3 = 1 \times 2 \times 3 = 6$

$4! = \lfloor 4 = 1 \times 2 \times 3 \times 4 = 24$

En general:

$$n! = \lfloor n = 1 \times 2 \times 3 \times \ldots \times n \qquad n \in N$$

Coeficiente Binómico

Concepto

Es un operador matemático que se utiliza para representar los coeficientes que se obtienen al desarrollar la potencia de un binomio.

Notación

Un coeficiente binómico se representa $\binom{m}{n}$ que se lee: "coeficiente binómico m sobre n".

Elementos

1) **Indice superior o base**.- es el número que se ha representado con "m" y que tiene valor arbitrario.
2) **Indice inferior u orden**.- es el número entero y positivo, designado con "n", que indica el total de factores que hay en el desarrollo.

Desarrollo general del Coeficiente Binomico

$$\binom{m}{n} = \frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1)}{n(n-1)(n-2)\ldots 1}$$

Ejemplo:

$$\binom{12}{5} = \frac{12\cdot 11\cdot 10\cdot 9\cdot 8}{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1} = 792$$

Propiedades del Coeficiente Binomico

1) Si el índice es cero, el coeficiente vale uno.

$$\binom{m}{0} = 1$$

2) Si el índice inferior es la unidad, el coeficiente es igual al índice superior.

$$\binom{m}{1} = m$$

3) Suma de coeficientes binómicos:

$$\binom{m}{n} + \binom{m}{n+1} = \binom{m+1}{n+1}$$

4) Las propiedades siguiente se cumplen cuando los elementos son números naturales, debiendo ser la base mayor o igual que el orden. Estos operadores también se les denomina números combinatorios y se les representa por:

$$C_n^m = \binom{m}{n}$$

a) $C_n^m = \binom{m}{n} = \frac{m!}{n!\,(m-n)!}$

b) $C_n^m = C_{m-n}^m$ ó $\binom{m}{n} = \binom{m}{m-n}$

c) $C_n^m = \binom{m}{m} = 1$

d) $C_n^m = \binom{m}{n} = 0$; si $m < n$

Binomio de Newton

Concepto

Se dá este nombre a la potencia indicada de un binomio.

Ejemplo:

$$(a+b)^5 \;;\; (a-b)^{-2} \;;\; (1+x)^{-1/3}$$

DESARROLLO DEL BINOMIO $(a+b)^n$

Regla práctica.- Un coeficiente cualquiera del desarrollo se obtiene multiplicando el coeficiente anterior al que deseamos calcular, por el exponente de "a" y luego dividiendo entre el exponente de "b" aumentado en la unidad.

Ejemplo:

$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$

$(a+b)^{-2} = a^{-2} - 2a^{-3}b + 3a^{-4}b^2 - 4a^{-5}b^3 + ...$

Observación:

Si el exponente es entero negativo o fraccionario el desarrollo admite infinidad de términos.

TÉRMINO GENERAL DEL DESARROLLO DE $(a+b)^n$:

$$T_{k+1} = \binom{n}{k} a^{n-k}\, b^k$$

en donde: (k+1) es la posición del término.

PROPIEDADES DEL DESARROLLO DE $(a+b)^n$, $n \in Z^+$

1. El número de términos que resultan es: n + 1
2. Los signos de los términos se definen del esquema:

   $(a+b)^n$: +, +, +, + , ... , +

   $(a-b)^n$: +, –, +, –, + ..., ±

   $(-a-b)^n$: $\begin{cases} \text{Si n par}: +,+,+,+,\ldots,+ \\ \text{Si n impar}: -,-,-,\ldots,- \end{cases}$
3. La suma de los coeficientes del desarrollo de:
   $(\alpha\, a + b\, \beta)^n$ es $S = (\alpha + \beta)^n$ (en el particular a = b = 1) resulta $S = 2^n$)
4. La suma de los exponentes del desarrollo de: $(a^\alpha + b^\beta)^n$ es:

$$S_{exp.} = \frac{(\alpha+\beta)\, n(n+1)}{2}$$

5. La posición del término central o medio del desarrollo se calculará con las relaciones:
   a) Si n par: $\frac{n+2}{2}$
   b) Si n impar: $\frac{n+1}{2}$; $\frac{n+3}{2}$

PROBLEMAS

1. Hallar el valor de "n"

$$\frac{(2n+1)!(2n)!}{(2n+1)!-(2n)!} = 99 \lfloor (2n-2)$$

a) 5 b) 6 c) 7 d) 4 e) 3

2. Hallar x en:

$$(2x-1)!=120$$

a) 5 b) 6 c) 7 d) 4 e) 3

3. Siendo:

$$\frac{10!}{a!b!} = 42$$

Calcular: ab

a) 12 b) 15 c) 20 d) 30 e) 42

4. Calcular (n +m)

Si: $\frac{\lfloor 8}{\lfloor n \lfloor m} = 14$

a) 9 b) 12 c) 10 d) 13 e) 15

5. Dado el binomio:

$(x^2+y)^{19}$ Calcular :

$$\frac{T_9}{T_{12}} = ?$$

a) x^6y^{-3} b) x^2y^5 c) 20

d) 30 e) 42

6. Calcular el valor de "n" para que el décimo Término del desarrollo de:

$\left(x^3+\frac{1}{x^2}\right)^n$, contenga x^{15}

a) 12 b) 15 c) 20 d) 30 e) 42

7. Dado el binomio $(x + a)^4$.

Calcular: $T_2 \cdot T_4$

a) $16x^4a^4$ b) $4x^4a^4$

c) $16x^3a^3$ d) $4x^3a^3$

e) 4xa

8. En el desarrollo del binomio

$(x^5+x^3)^{10}$

Calcular el séptimo término.

a) $210x^{32}$ b) $210x^{34}$

c) $210x^{36}$ d) $210x^{38}$

e) $200x^{32}$

9. ¿Qué lugar ocupa el término cuya suma de exponentes de x e y sea 48 en el desarrollo del binomio.

$(x^2+y^3)^{18}$

a) 10 b) 11

c) 12 d) 13

e) 14

10. Dado el binomio $(\sqrt[4]{x}+x^{-1})^n$.

Hallar "n" para que el 5to término.

Resulte de1er grado.

a) 12 b) 16

c) 18 d) 20

e) 24

11. Calcular el quinto términos del desarrollo de:

$$\left(\frac{\sqrt{x}}{4}+\frac{4}{\sqrt{x}}\right)^8$$

a) 59 b) 69

c) 70 d) 71

e) 19

12. Indicar el término independiente de "x" en el desarrollo de:

$$\left(\frac{0,5}{x^2}+\frac{x^2}{0,5}\right)^9$$

a) 72 b) 84
c) 96 d) 112

13. Indicar el valor de "m" en $(x^7+y^m)^{25}$ si el término de lugar 14 es de la forma:

$$\alpha\, x^{84}y^{39}.$$

a) 2 b) 3 c) 4 d) 5 e) 6

14. Dado el binomio $\left[\frac{1}{x^2}+\sqrt{x}\right]^n$ el término de lugar 17 es de la forma $T_{17} = C_{16}^{n}\, x^2$.

Calcular n.

a) 19 b) 20 c) 21
d) 22 e) 23

15. Si en el desarrollo del binomio $(3x^3 + 2x^{-1}y^2)^n$ existe un término cuyas potencias de "x" e "y" son respectivamente 5 y 8 encontrar el número de términos del desarrollo.

a) 7 b) 8 c) 9
d) 10 e) 11

16. ¿Qué lugar ocupa el Término que tiene como grado absoluto 17 ; en el desarrollo de:

$$(x^2+2y)^{14}$$

a) 7 b) 12 c) 13
d) 14 e) 6

17. Si los coeficientes de los Términos 3ro y 2do del desarrollo de $(a+b)^n$ Suman 78.

Calcular el número de términos del desarrollo.

a) 7 b) 8 c) 9
d) 13 e) 6

18. Hallar $(n+k_1,)$ si $T_3= 405X^{K1}$ al desarrollar :

$$(x^2-3)^n$$

a) 10 b) 11 c) 12
d) 13 e) 26

19. Halla el valor de "n"

$$1 + 2\lfloor 2 + 3\lfloor 3 + \ldots + n\lfloor n = 5039$$

a) 7 b) 5 c) 6
d) 8 e)10

CLAVES				
1 A	2 E	3 D	4 A	5 A
6 C	7 A	8 D	9 D	10 E
11C	12 B	13 B	14 A	15 B
16B	17D	18 B	19 A	