Capítulo

7 TEOREMA DEL BINOMIO

Trata del desarrollo o expansión de : $(x+a)^n$ para "n" entero y positivo. Previamente estudiaremos algunos conceptos básicos necesarios para este capítulo.

Factorial

El factorial de un número "n" (entero y positivo), es el producto de multiplicar todos los números consecutivos desde la unidad hasta el número "n".

Notación

$n!$, $\underline{|n}$ ⟵ factorial de "n"

Por definición :

$$\boxed{n! = 1\times 2\times 3\times \ldots\ldots\ldots \times n} \quad (n \geq 2)$$

Ej. * $3! = 1\times 2\times 3 = 6$

* $6! = 1\times 2\times 3\times 4\times 5\times 6 = 720$

Definiciones :

Factorial de cero $\boxed{0! = 1}$

Factorial de la unidad $\boxed{1! = 1}$

Propiedad

$$\boxed{n! = (n-1)!n}$$

Ej. $80! = \overbrace{1\times 2\times 3\times \ldots\ldots\times 78\times 79}^{78!}\times 80$

$\underbrace{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad}_{79!}$

$80! = 79!\ 80$

$80! = 78!\ 79\times 80$

Igualdad de Factorial :

I. Si : $a! = 1 \Rightarrow a = 0$ ó $a = 1$

II. Si : $a! = b! \Rightarrow a = b \ (a, b \neq 0, 1)$

Semifactorial

Se representa por : N!! y su definición depende, si "N" es par o impar.

$N = 2n$ (par) $\Rightarrow (2n)!! = 2\times 4\times 6\times \ldots\times 2n$

$$\boxed{(2n)!! = 2^n(n!)}$$

$N = 2n-1$ (impar) $\Rightarrow (2n-1)!! = 1\times 3\times 5\times \ldots\times (2n-1)$

$$\boxed{(2n-1)!! = \frac{(2n)!}{2^n n!}}$$

Observación :

$n!!$ $\rightarrow$ semifactorial de "n".
$(n!)!$ $\rightarrow$ factorial de factorial de "n"

Ej. $(3!)! = 6! = 72$
$3!! = 1\times 3 = 6$

ANÁLISIS COMBINATORIO

PERMUTACIONES

Permutar "n" elementos es formar grupos de "n" elementos cada uno, tal que un grupo se diferencia del otro por el orden :

Ej. Permutar : a, b, c (3 elementos)

Formando grupos

$$\left.\begin{array}{lll} a\ b\ c & & a\ c\ b \\ b\ a\ c & & b\ c\ a \\ c\ a\ b & & c\ b\ a \end{array}\right\} \ \#\text{ de permutas} = 6$$

Número de Permutaciones

Se representa por : P_n y se obtiene por la siguiente fórmula:

$$\boxed{P_n = n!}$$

Ej. $P_3 = 3! = 6$

VARIACIONES

Formar variaciones con "n" elementos tomados de "k" en "k". Es formar grupos de "k" elementos cada uno, de tal manera que un grupo se diferencia del otro en el orden, o en algún elemento.

Ej. : Formar variaciones con : a, b, c, de 2en 2

Tendremos : ab ac bc / ba ca cb } # de variaciones = 6

El número de Variaciones se representa por : V_k^n

Fórmula : $\boxed{V_k^n = \frac{n!}{(n-k)!}}$

Ej. $V_2^3 = \frac{3!}{(3-2)!\,2!} = 6$

COMBINACIONES

Formar combinaciones con "n" elementos tomados de "k" en "k". Es formar grupos de "k" elementos cada uno, tal que un grupo se diferencia del otro por lo menos en un elemento.

Ej.
Formar combinaciones con : a, b, c, d, de 2en 2

Tendremos :

ab ac ad / bc bd cd } # de combinaciones = 6

Número Combinatorio

El número de combinaciones formadas se denominan número combinatorio, se representa por : C_k^n

Fórmula : $\boxed{C_k^n = \frac{n!}{(n-k)!k!}}$

Ej. $C_2^4 = \frac{4!}{(4-2)!\,2!} = \frac{2}{2\times 2} = 6$

Propiedades del Número Combinatorio

1. $\boxed{C_O^n = 1}$ $\boxed{C_n^n = 1}$ $\boxed{C_1^n = n}$

2. Combinatorios Complementarios

$\boxed{C_k^n = C_{n-k}^n}$

3. Suma de Combinatorios

$\boxed{C_k^n + C_{k+1}^n = C_{k+1}^{n+1}}$

4. Degradación de Combinatorios

* $\boxed{C_k^n = \frac{n}{k} C_{k-1}^{n-1}}$
* $\boxed{C_k^n = \frac{n-k+1}{k} C_{k-1}^n}$
* $\boxed{C_k^n = \frac{n}{n-k} C_k^{n-1}}$

FÓRMULA DEL TEOREMA DEL BINOMIO

Esta fórmula atribuida incorrectamente a Newton nos permite obtener el desarrollo de $(x+a)^n$, siendo "n" entero y positivo. (El aporte de Newton fue el desarrollo cuando "n" es negativo y/ó fraccionario).

Fórmula :

$$\boxed{(x+a)^n = C_O^n x^n + C_1^n x^{n-1}a + C_2^n x^{n-2}a^2 + \ldots + C_n^n a^n}$$

Ej. $(x+a)^4 = C_O^4 x^4 + C_1^4 x^3 a + C_2^4 x^2 a^2 + C_3^4 x a^3 + C_4^4 a^4$

$(x+a)^4 = x^4 + 4x^3 a + 6x^2 a^2 + 4x a^3 + a^4$

Observaciones del desarrollo de $(x+a)^n$

1. El número de términos del desarrollo, es el exponente del binomio aumentado en uno. Es decir :

$\boxed{\#\text{ términos} = n+1}$

2. Si el binomio es homogéneo, el desarrollo será homogéneo del mismo grado.

3. Si los coeficientes del binomio son iguales, los coeficientes de los términos equidistantes de los extremos, son iguales.

4. Recordando que la suma de coeficientes se obtiene para x = a = 1, tendremos :

$$\boxed{C_O^n + C_1^n + C_2^n + \ldots + C_n^n = 2^n}$$

FÓRMULA DEL TÉRMINO GENERAL

Se utiliza para obtener un término cualquiera del desarrollo en función del lugar que ocupa.

Se representa por : $\boxed{T_{k+1}}$

Fórmula : En $(x+a)^n$

$$\boxed{T_{k+1} = C_k^n\, x^{n-k} a^k}$$

En donde : $n \rightarrow$ exponente del binomio
$k+1 \rightarrow$ lugar del término
$x, a \rightarrow$ términos del binomio

Ej.

Halle el término de lugar 40 en el desarrollo de:

$$(x^2 - y^3)^{60}$$

tendremos :

$$T_{39+1} = C_{39}^{60}(x^2)^{60-39}(-y^3)^{39}$$

$$T_{40} = -C_{39}^{60} x^{42} y^{117}$$

OTRAS DEFINICIONES Y FÓRMULAS

I. Coeficiente Binónico : Se representa por $\binom{n}{k}$;

$n \varepsilon R; k \varepsilon Z^+$
siendo su desarrollo :

$$\boxed{\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)(n-2).....[n-(k-1)]}{k!}}$$

Observaciones ;

* Si $n \varepsilon Z^+$: $\binom{n}{k} = C_k^n$

* $\binom{n}{0} = 1$

II. Fórmula para :

$$(1+x)^n \rightarrow \begin{cases} n : \text{negativo y/ó fraccionario} \\ -1 < x < 1 \;;\; x \neq 0 \end{cases}$$

$$\boxed{(1+x)^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1}x + \binom{n}{2}x^2 + \binom{n}{3}x^3 + ...}$$

III. Número de términos de :

$(a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_k)^n$ n : entero y positivo.

$$\boxed{\#\text{ de términos} = \frac{(n+k-1)!}{n!(k-1)!}}$$

IV. En : $(a_1 + a_2 + a_3 + ... a_k)^n$ n : entero y positivo.

$$\boxed{\text{Coeficiente de } a_1^{\alpha} a_2^{\beta} a_3^{\gamma} .... a_k^{\phi} = \frac{n!}{\alpha!\,\beta!\,\gamma!\,....\phi!}}$$

EJERCICIOS PROPUESTOS

01. Reducir :

$$M=\left[\frac{6!+5!}{5!+4!}\right]^{10}$$

a) 1 b) 2 c) $\frac{35}{3}$

c) $\frac{35}{6}$ e) $\frac{1}{8}$

02. Calcular "x", si :

$$\frac{(3x+4)(3x+4)!\,(3x+6)!}{(3x+5)!-(3x+4)!}=72!$$

a) 12 b) 30 c) 22
d) 21 e) 18

03. Resolver :

$$x\left[\frac{x!+2(x-1)!}{x!+(x+1)!}\right]=x!-23$$

a) 3 b) 4 c) 5
d) 6 e) 7

04. Calcular "x" que verifique :

$$C_3^{x-8}=220$$

a) 17 b) 18 c) 21
d) 23 e) 20

05. Resolver :

$$\frac{(x!)^2}{(2x)!}C_{x+1}^{2x+1}=\frac{17}{9}$$

a) 5 b) 7 c) 8
d) 9 e) 6

06. Determinar "x" que verifica la ecuación :

$$\frac{22}{x-8}C_8^{x-1}=C_7^x$$

a) 8 b) 10 c) 11
d) 12 e) 13

07. En la suma combinatoria :

$$S=\binom{n}{2}+\binom{n-1}{2}$$

donde : $n\in N$, $n\geq 3$.

Al simplificar, se obtiene siempre.

a) Un número primo.
b) Un cuadrado perfecto.
c) Un número impar.
d) Un número par.
e) Un múltiplo de 4.

08. Determinar el término de lugar 10 en la expansión de:

$$\left(27x^5+\frac{1}{3x}\right)^{12}$$

a) $220x^5$ b) $220x^7$ c) $220x^6$
d) $330x^6$ e) $320x^6$

09. Para qué valor de "n" en el tercer término del desarrollo de $(x^{-1}+\sqrt{2}x^{17})^n$ el coeficiente es igual al exponente de x :

a) 5 b) 6 c) 7
d) 9 e) 18

10. Calcular "n", si en el desarrollo de :

$(x^2+0,5x^{-1})^n$ el onceavo término es de grado 20.

a) 5 b) 15 c) 10
d) 25 e) 20

11. Calcular (n + k), si se sabe que el cuarto término del desarrollo de $(x+2)^n$ es $80x^k$.

a) 5 b) 9 c) 6
d) 10 e) 7

12. Hallar el lugar que ocupa un término del desarrollo de: $(x^3-2x^{-2})^{13}$ que tiene como parte literal a x^{14}.

a) 9 b) 5 c) 6
d) 7 e) 2

13. Calcular el término independiente del desarrollo de :

$$(x^2+\sqrt[5]{x^{-3}})^{13}$$

a) 297 b) 384 c) 286
d) 354 e) 374

14. Al desarrollar $(5x^{17}-y^{15})^n$ la suma de todos los exponentes de "x" e "y" es "n" veces la suma d coeficientes, hallar "n".

a) 3 b) 4 c) 5
d) 6 e) 7

15. El producto de las sumas de coeficientes de los desarrollos de : $(x+6y-4)^{n+1}$; $(4x+5y)^{n-2}$ es 3^{n+7}. Halle el número de términos del desarrollo de: $(9x^2-y)^{n+3}$.

a) 6 b) 7 c) 8
d) 9 e) 10

16. Si : $(x+1)! - x! = 18$
El valor de : $(x+1)! + x!$ es :

a) 24 b) 36 c) 30
d) 54 e) 60

17. Resolver :

$$3.6.9.\ldots.(3n-3).(3n) = 9^{n-12}n!$$

a) 12 b) 18 c) 24
d) 8 e) 36

18. La suma de "n" y el menor valor de "k", que satisfacen las siguientes condiciones :

$n! = 720$ y $\binom{n+2}{k} = 56$ es :

a) 8 b) 6 c) 11
d) 9 e) 7

19. Determinar "a" y "b" en la igualdad :

$$\frac{a!.b!}{4} = (3!)^2$$

a) $a = 7, b = 3$ b) $a = 8, b = 9$
c) $a = 4, b = 3$ d) $a = 2, b = 1$
e) $a = 5, b = 6$

20. Calcular "n" en la ecuación :

$$n!+5-22\frac{(n!+1)}{(n!-5)} = \frac{1}{(n!-5)}$$

a) 6 b) 3 c) 2
d) 4 e) 5

21. Determinar el penúltimo término en el desarrollo de : $(3x^2-y^3)^{12}$.

a) $36x^2y^{11}$ b) $-24x^3y^2$ c) $24x^3y^2$
d) $-36x^2y^{33}$ e) $-12xy^2$

22. Proporcionar el coeficiente del término de grado 7 en el desarrollo de $(x^7+x^{-7})^7$.

a) 21 b) 35 c) 42
d) 70 e) 14

23. ¿Qué lugar ocupa el término que contiene x^{29} en el desarrollo de $(2x^2+3x^{-1})^{22}$?

a) 5to. b) 6to. c) 8vo.
d) 4to. e) 12vo.

24. Si en el desarrollo de :

$$B(x) = \left(3x^3 + \frac{y^2}{x}\right)^n$$

existe un término cuyos exponentes de "x" é "y" son respectivamente 5 y 8. Halle el número de términos del desarrollo.

a) 8 b) 7 c) 9
d) 6 e) 10

25. El término independiente de "x", en :
$(\frac{2}{5}x^2+\frac{1}{2x})^9$ es :

a) 0,018 b) 0,002 c) 0,084
d) 0,001 e) 0,025

26. Deteminar el término racional en el desarrollo de :

$$(\sqrt{2}+\sqrt[3]{2})^5$$

a) 10 b) 20 c) 30
d) 40 e) 50

27. En el desarrollo de $(2x-y)^{10}$, el coeficiente de x^6y^4 es :

a) 13 380 b) 13 450 c) 13 460
d) 13 440 e) 13 455

28. Indicar el lugar que ocupa el término que sólo depende de "x" :

$$\left(x^4y + \frac{1}{xy^4}\right)^{100}$$

a) 13 b) 14 c) 19
d) 21 e) Es imposible determinarlo.

29. Calcular "n", si al desarrollar :
$(x^6-1)^4.(x^4+x^2+1)^{2n}(x^2-1)^{2n}$, se obtiene 25 términos.

a) 10 b) 18 c) 8
d) 20 e) 12

30. Dos términos consecutivos del desarrollo de $(x+n)^n$ tienen igual coeficiente; luego estos términos son :

a) Primero y segundo.
b) Segundo y tercero.
c) Tercero y cuarto.
d) Antepenúltimo y penúltimo.
e) Penúltimo y último.

31. ¿Cuántos términos irracionales presenta el desarrollo de : $\left(\sqrt[4]{x}+\sqrt[3]{x}\right)^{48}$?

a) 44 b) 32 c) 34
d) 42 e) 26

32. Cuántos términos fraccionarios hay en el desarrollo de:

$$\left(2x^3+\frac{3}{x}\right)^{100}$$

a) 18 b) 21 c) 24
d) 25 e) 27

33. El desarrollo de $(a+b+c+d+e)^n$, posee 14 términos más que el desarrollo de $(a+b+c+d)^{n+1}$. Calcular : C_{n-1}^{n+1}.

a) 6 b) 10 c) 15
d) 21 e) 28

34. Calcular : a + b, si :

$$(30^{a!}.24^{a!})^{a+1}=((b!)!)^{720}$$

a) 5 b) 6 c) 7
d) 8 e) 9

35. Determinar el valor de "m" en la expresión :

$$\frac{(2m)!}{2^m.m!.1.3.5....(2m+1)}=\frac{1}{9}$$

a) 256 b) 3125 c) 4
d) 27 e) 7776

36. Calcular "n+k", en :

$$C_{k+1}^{n+1}+C_k^n+\left(\frac{n-k+2}{n+1}\right)C_{k-1}^{n+1}=C_{13}^{30}$$

a) 40 b) 44 c) 47
d) 50 e) Hay 2 correctas

37. Sabiendo que :

$$\frac{C_{n+1}^{m+1}}{m+n+x}=\frac{C_n^m}{m+n}=\frac{C_{n-1}^{m-1}}{m+n-x}$$

Calcular el valor de "m-n", siendo : $x\neq 0$.

a) 1 b) 2 c) 4
d) x e) 3x

38. Si :

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^k=(a+b)^n$$

$$\binom{n}{k}=\frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Calcular : $2\sum_{k=3}^{n}\binom{n}{k}$

a) $2^{n+1}-n^2+n-2$ b) $2^{n+1}+n^2+n-2$
c) $2^{n-1}-n^2+n+2$ d) $2^{n+1}-n^2-n-2$
e) $2^{n+1}-n^2-n+2$

39. Calcular "n", si $n\varepsilon Z^+$ en :

$$F(x;y)=\left(\frac{y^6}{x^4}+\frac{x^6}{y^4}\right)^n$$

para que en el desarrollo de dicha potencia dos términos consecutivos del mismo sean independientes de "x" e "y" respectivamente.

a) 1 b) 2 c) 3
d) 5 e) 10

40. En el desarrollo de : $(2+3x^2)^n$, el coeficiente de x^{24} es 4 veces el coeficiente de x^{22}. Calcular el término independiente del desarrollo.

a) 2^{19} b) 2^{23} c) 2^{43}
d) 2^{25} e) 2^{21}

41. Hallar el término central del desarrollo de :

$$B(x;y)=(x^{-2}+y^n)^{2n}$$

si dicho término central es de grado "n".

a) $10x^{-6}y^9$ b) $20x^{-6}y^9$ c) $11x^{-9}y^6$
d) $30x^{-6}y^5$ e) $10x^{-6}y^4$

42. Los coeficientes de los términos centrales de los desarrollos de : $(a+b)^{n+2}$ y $(a+b)^n$; $n\varepsilon Z^+$; son entre sí como 15 es a 4. Calcular "n".

a) 1 b) 2 c) 3
d) 14 e) Hay dos correctas.

43. Dado los términos semejantes uno del desarrollo de $x(x^a+y^b)^a$ y otro de $y(x^b+y^a)^b$ ambos ocupan la misma posición en cada polinomio. Determinar el valor de :

$$\frac{(a^2+b^2)^2}{1+a^2b^2}$$

a) 2 b) 4 c) 6
d) 9 e) 12

44. Si en el desarrollo de $(ax^a + bx^b)^n$, los términos de lugares $a+3$ y $b-1$ equidistan de los extremos; además la suma de todos los coeficientes es 27. Hallar la suma de todos los exponentes de variable "x" en su desarrollo.

a) 20 b) 18 c) 16
d) 14 e) 15

45. Calcular : $\frac{(a^2+b^2)^2}{(ab)^2+1}$; $ab \neq 0$.

Sabiendo que dos términos cualesquiera del desarrollo de :

$$F(x,y) = (ax^{a^2-1} + by^{b^2+1})^{ab}$$

presentan el mismo grado absoluto.

a) 1 b) 2 c) 4
d) 6 e) 8

46. El mínimo entero "m", tal que :

$(xy - 7x + 9y - 63)^m$ tenga al menos 1998 términos es:

a) 40 b 41 c) 42
d) 43 e) 44

47. Simplificar :

$$\frac{1+(1+x)+(1+x)^2+(1+x)^3+\ldots+(1+x)^{n-1}}{C_1^n + C_2^n x + C_3^n x^2 + C_4^n x^3 + \ldots + C_n^n x^{n-1}}$$

a) 1 b) $\frac{x}{x+1}$ c) x

d) $\frac{x-1}{x}$ e) -1

48. Determinar el coeficiente de x^n en el desarrollo de :

$$(1 - 2x + 3x^2 - 4x^3 + \ldots)^n \; ; \; (|x| < 1)$$

a) C_{n+1}^{2n+1} b) C_{2n+1}^{3n+1}

c) $(-1)^n C_{2n-1}^{3n}$ d) $(-1)^n C_{n+1}^{2n+1}$

e) $(-1)^n C_{2n-1}^{3n-1}$

49. Si : $n \in Z^+$, calcular :

$$M = \binom{n}{1} x(1-x)^{n-1} + 2\binom{n}{2} x^2(1-x)^{n-2} + \ldots$$
$$\ldots + k\binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} + \ldots + n\binom{n}{n} x^n$$

a) n + x b) n c) x
d) nx e) n - x

50. Calcular : a+b, si un término de $(x+y+z)^7$ es $ax^2y^3z^b$.

a) 215 b) 342 c) 148
d) 212 e) 510

51. Hallar el coeficiente de x^4y^2 en el desarrollo de :

$(1 + 2xy + 3x^2)^7$.

a) 1260 b)105 c) 1420
d) 120 e) 1480

52. Determínese el coeficiente del término en x^{10} del desarrollo de :

$$(1 + 3x^2 + 3x^4)^7$$

a) 807 b) 918 c) 19 278
d) 15 362 e) 1254

53. Determinar la suma de todos los términos cuyo grado relativo a "x" sea 3 en el desarrollo de :

$$(1 + x + y)^5$$

a) $(1 + 20y)x^3$ b) $10(1 + y^3)x^3$

c) $5(1 + y^2)x^3$ d) $5(y^2 + 2y)x^3$

e) $10(y+1)^2x^3$

54. En el desarrollo de : $(x^2 + y - x)^8$, determinar los coeficientes de los términos de la forma : $x^{10}y^m$, donde "m" es par no nulo.

a) 28; 56 b) 420 c) -420
d) 1 e) 6

55. El coeficiente del término x^n en el desarrollo de : $(1 + x + x^2)^{-1}$; es :

I. 1 ; si : $n = 3k$; $k \in Z^+$

II. 0; si : $n = 3k-1$; $k \in Z^+$

III. -1; si : $n = 3k+1$; $k \in Z^+$

a) Sólo I b) Sólo II c) Sólo III
d) II y III e) Todas

56. Determinar el coeficiente del término del desarrollo de $(a+4b+c)^n(a-2b+c)^n$ en el cual el grado de $(a+b+c)$ excede en 14 unidades al lugar que ocupa y éste es un tercio del valor de "n".

a) $200(13)$ b) $-220(3^6)$
c) $210(3^2)$ d) 230
e) $110(3^3)$

57. Dado el binomio : $(x-3y^2)^{12}$, si un término de su desarrollo es contado desde el final. ¿En qué posición se ubica, si en dicho término el G.R.(y) = 2G.R.(x)?

a) 6 b) 7 c) 8
d) 9 e) 10

58. Hallar el equivalente numérico de :

$$E = 2[3^{70}C_0^{70} + 3^{68}C_2^{70} + 3^{66}C_4^{70} + ... + 1]$$

a) $3^{70}(3^{70}+1)$ b) $4^{70}(2^{70}+1)$
c) $3^{70}(2^{70}+1)$ d) $2^{70}(2^{70}+1)$
e) $2^{70}(3^{70}+1)$

59. Al expandir : $\left(y\sqrt[6]{x} + x\sqrt[6]{y}\right)^{84}$, se obtiene un término cuya parte literal es $(xy)^n$. Calcular "n".

a) 42 b) 44 c) 78
d) 49 e) 88

60. Indicar el grado del producto de los términos centrales obtenidos al efectuar :

$$(x^{39} + 39x^{38} + C_2^{39}x^{37} + ... + 39x + 1)^3$$

a) 114 b) 117 c) 58
d) 78 e) 123

Claves

01.	c
02.	c
03.	b
04.	c
05.	c
06.	c
07.	b
08.	c
09.	b
10.	d
11.	e
12.	c
13.	c
14.	a
15.	d
16.	c
17.	c
18.	c
19.	c
20.	d
21.	d
22.	b
23.	b
24.	a
25.	c
26.	d
27.	d
28.	d
29.	a
30.	e

31.	a
32.	d
33.	b
34.	d
35.	c
36.	e
37.	a
38.	d
39.	d
40.	c
41.	b
42.	d
43.	b
44.	b
45.	c
46.	e
47.	a
48.	e
49.	d
50.	d
51.	a
52.	c
53.	e
54.	b
55.	e
56.	b
57.	b
58.	d
59.	d
60.	b