بسم الله الرحمن الرحيم

جامعة السّودان المفتوحة

برنامج الحاسوب

التحليل العددي

رمز المقرر ورقمه: ريض 719

إعداد المادة العلمية: د. حسام ربايعة

التحكيم العلمي: د. محسن حسن عبد الله

تصميم تعليمي : أ. خالد حسنين

التصميم الفني : منى عثمان أحمد النقة

منشورات جامعة السودان المفتوحة، الطبعة الأولى 2007

جميع الحقوق محفوظة لجامعة السودان المفتوحة، لا يجوز إعادة إنتاج أيّ جزء من هذا الكتاب، وبأيّ وجه من الوجوه، إلاّ بعد الموافقة المكتوبة من الجامعة.

مقدمة المقرر

بسم الله والحمد لله الذي خلق الانسان وعلمه بالقلم ما لم يعلم والصلاة والسلام على نبينا محمد نبي الرحمة والهداية والحاث على العلم ولو بالصين وعلى آله وصحبه الميامين . نقدم إليك عزيزي الدارس، هذا المقرر كمدخل للتحليل العددي ذلك العلم الهام والذي يعد من أهم فروع الرياضيات التطبيقية خاصة بعد اقتحام الحاسوب لشتى مجالات حياتنا المعرفية والعملية.

فالتحليل العددي يقدم الينا طرقاً وأساليباً توضع في شكل خوارزميات يقوم باجرائها وتنفيذ أوامرها الحاسوب لحل كثير من المشاكل كالمعادلات الجبرية أو المعادلات التفاضلية .

يحوي هذا الكتاب اربع وحدات أساسية فالوحدة الأولى جذور المعادلات غير الخطية نوضح من خلالها بعض الطرق المتبعة لحل مثل هذه المعادلات أما الوحدة الثانية الاستكمال وتقريب الدوال فقد تناولنا في بدايتها تعريفاً لمعنى الاستكمال ثم تطرقنا لبعض الطرق التي يتم بها استكمال الدوال وتقريبها وفي الوحدة الثالثة والتي اسميناها التكامل والتفاضل العددي فقد شرحنا من خلالها بعض الطرق غير المألوفة لدينا لاجراء تكامل الدوال خاصة الدوال ذات المتغير الواحد ثم تناولنا بعد ذلك طرقاً غير مألوفة لدينا، أيضاً لتقريب المشتقتين الأولى والثانية للدالة.

أما الوحدة الرابعة والأخيرة فقد شرحنا من خلالها كيفية ايجاد الحلول العددية لمسائل القيم الابتدائية للمعادلات التفاضلية العادية حيث تناولنا بعض الصيغ الهامة والمتبعة لإيجاد تلك الحلول.

دارسنا العزيز نأمل أن تكون دراسة هذا المقرر شيقة وممتعة حتى تدرك الفائدة المنشودة من دراسته ولذا ينبغي أن تقوم بحل جميع تدريباته وأسئلته كما يمكنك الرجوع إلى مشرفك الأكاديمي عند مواجهتك لأي صعوبة في حل مسائله.

نرحب بك في هذا المقرر كما نرحب برأيك ومقترحاتك البناءة.

الأهداف العامة للمقرر

الدارس العزيز، نأمل عند فراغك من دراسة هذا المقرر أن تكون قادراً على ان:

1) توحد جذور المعادلة غير الخطية بطريقة مختلفة.
2) تختار أفضل الطرق لحل المعادلة غير الخطية.
3) تقرب الدوال باستخدام طرق الاستكمال.
4) تحل مسائل لإيجاد التكامل العددي.
5) تقرب المشتقة الأولى والثانية.
6) تستخدم بعض الطرق في حل مسائل القيم الابتدائية من عدة رتب.
7) تكتب الخوارزمية المناسبة لحل بعض المسائل.

محتويات المقرر

الوحدة	رقم الصفحة
الوحدة الأولى: جذور المعادلات غير الخطية	**1**
الوحدة الثانية: الاستكمال وتقريب الدوال	**41**
الوحدة الثالثة: التكامل والتفاضل العددي	**75**
الوحدة الرابعة: الحلول العددية لمسائل القيم الابيدائية للمعادلات التفاضلية العادية	**141**


الوحدة الأولى
جذور المعادلات غير الخطيّة

محتويات الوحدة

الموضوع	الصفحة
المقدمة	**3**
تمهيد	3
أهداف الوحدة	4
1. حساب الجذر بطريقة التنصيف	**6**
2. حساب الجذر باستخدام طريقة الخطأين	**11**
3. طريقة نيوتن – رافسن لحساب الجذر	**15**
4. طريقة القاطع	**19**
5. جذور كثيرات الحدود(الحدوديات)	**24**
1.5 ما هي الحدودية؟	26
2.5 الانكماش	29
الخلاصة	**32**
لمحة مسبقة عن الوحدة الدراسية التالية	**33**
إجابات التدريبات	**34**
مسرد المصطلحات	**39**
المراجع	**40**

المقدمة

تمهيد

عزيزي الدارس،

أهلاً بك في هذه الوحدة الأولى من مقرر التحليل العددي، وهي بعنوان: جذور المعادلات غير الخطية.

وقد وجدنا من المناسب أن نبدأ مقرر التحليل العددي بهذه الوحدة، التي ستتمكن بعد دراستك لها من إيجاد حلول عددية لجذور المعادلات غير الخطية في متغير واحد، ومن ضمنها كذلك إيجاد جذور لكثيرات الحدود (الحدوديات) كما سنطلق عليها خلال الوحدة.

إن مثل هذه المسائل لها أهمية تاريخيّة ونظرية كبيرتين، ولا شك أن هذا الموضوع مألوف بالنسبة لك، فقد مارست من قبل طريقة إيجاد المميّز من أجل حل المعادلات التربيعية، بل ربما تكون لديك القدرات على حل معادلات من درجات أعلى، كالمعادلات التكعيبية وكذلك الحدوديات من الدرجة الرابعة. إلاّ أنني اعتقد أن عدداً محدوداً من الدارسين من يمكنهم استخدام القوانين لمعرفة حلول المعادلات من الدرجة الخامسة واكثر.

ونظراً لعدم وجود الصيغ التي تحسب جذور المعادلات عالية الدرجة فإن طرق التحليل العددي تعتبر الأسلوب الأمثل لمعالجة مثل تلك المعادلات.

تتألف هذه الوحدة من خمسة أقسام رئيسة، تتناول مجموعة من الطرق لإيجاد الجذور، منها طريقة التنصيف في القسم الأول، وطريقة الخطأ في القسم الثاني وطريقة نيوتن رافسن في القسم الثالث، وطريقة القاطع في القسم الرابع.

القسم الخامس خصصناه لإيجاد جذور الحدوديات، وستجد فيه طريقة ممتعة للتعامل مع تلك المعادلات. وستتعرف عزيزي الدارس خلال الوحدة كذلك على مفهوم الحل التتابعي الذي تحسب به تلك الجذور، وهو حل يعتمد على إعادة إدخال النتائج في الصيغة الحسابية مرّة أخرى، لذا فإن الحاسوب هنا يكون مفيداً للوصول إلى الحل بطريقة أسرع.

نرجو أن تستمتع بدراسة هذه الوحدة، وأن تجدها وحدة مفيدة لك كمدخل لهذا المقرر. ونحن بانتظار اقتراحاتك وتعليقاتك لتحسين مستوى هذه الوحدة.

ومرحباً بك مرة أخرى.

أهداف الوحدة



عزيزي الدارس،

بعد فراغك من دراسة هذه الوحدة ينبغي أن تكون قادراً على أن:

- **تشرح** معنى جذور المعادلة وتكرارها.
- **توجد** جذور المعادلة بطرق: التنصيف، وطريقة الخطأين، وطريقة نيوتن رافسن، وطريقة القاطع.
- **تقارن** بين الأخطاء الناتجة عن الطرق العددية في هذه الوحدة وكيفيّة حسابها.
- **تقرر** أحسن الطرق التي تعطي أسرع النتائج وأقل الأخطاء.
- **تختار** الطريقة الأفضل لحل معادلة ما.
- **تكتب** خوارزميّة لتمثيل الطرق العددية باستخدام الحاسوب

جذور المعادلات غير الخطيّة

عزيزي الدارس،

لعل أهم الطرق العددية وأقدمها لحساب المسائل الرياضية هي حساب جذور المعادلات الجبرية على الصيغة $f(x) = 0$. حيث f دالة معروفة ويلزم أن نذكر هنا أن جذور المعادلات الجبرية قد يكون له عدد من التكرار وليكن m.

ويحسن بنا البدء بالتعريف التالي:

تعريف:

إذا كان α جذراً للمعادلة الجبرية $f(x) = 0$ بتكرار m فإن:

$f(x) = (x - \alpha)^m g(x)$ حيث $g(x)$ دالة متصلة في جوار α، و $g(\alpha) \neq 0$.

وإذا كان m عدداً فردياً فإن الجذر α يسمى جذراً فردياً، أما إذا كان m عدداً زوجياً فإن الجذر α يسمى جذراً زوجياً.

◄◄ مثال:

ليكن $f(x) = x^3 - 2x^2 + x$ فجد جذور المعادلة وتكرار كل منها.

الحل:

نضع $f(x) = 0$ إذن $f(x) = (x - 1)^2 x = 0$ وهذا يعني أن f له الجذر $\alpha = 1$ بتكرار 2 (زوجي) وله الجذر $\alpha = 0$ بتكرار 1 (فردي).

1. حساب الجذر بطريقة التنصيف (Bisection Method)

عزيزي الدارس،

تعمل هذه الطريقة لإيجاد الجذور الفردية حيثما يقطع رسم $f(x)$ محور السينات.

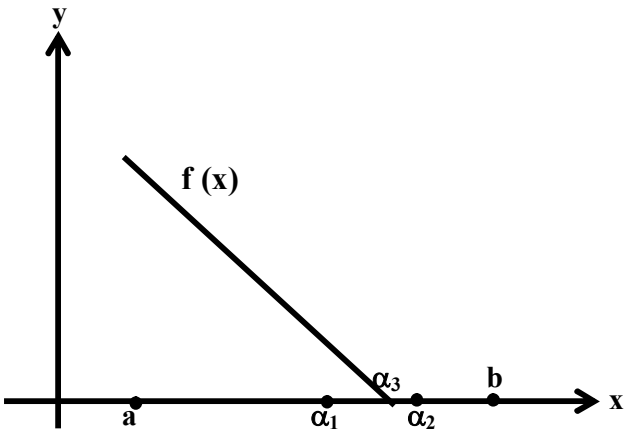
لنفرض أن لدينا دالة $f(x)$ متصلة في الفترة $[a, b]$ حيث $f(a)$, $f(b)$ لهما إشارتان مختلفتان وباستخدام نظرية القيمة الوسطية، فإنه يوجد جذر في الفترة المذكورة بحيث $f(\alpha) = 0$. وتتلخص الطريقة كما يلي:

أولاً دعنا نخصص الآتي $f(a) > 0$ و $f(b) < 0$

لنفرض $a_1 = a$ و $b_1 = b$ ثم كخطوة أولى $\alpha_1 = \frac{a_1 + b_1}{2}$، حينئذ نختبر إشارة الدالة عند α_1: إذا كان $f(\alpha_1) < 0$، فالجذر يقع بين a_1 و α_1، أما إذا كان $f(\alpha_1) > 0$ فالجذر يقع بين α_1 و b_1 أما إذا كان $f(\alpha_1) = 0$ فقد انتهينا من إيجاد الجذر.

لنفرض أن $f(\alpha_1) > 0$ لذلك فالجذر يقع بين α_1 و b_1. وفي الخطوة الثانية نفرض $\alpha_2 = \frac{\alpha_1 + b_1}{2}$ ونختبر إشارة $f(\alpha_2)$، فالإشارة السالبة له (كما في الشكل 1) تعني أن الجذر يقع بين α_1, α_2، والآن نفرض $\alpha_3 = \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2}$ فالإشارة $f(\alpha_3) < 0$ تعني أن الجذر محصور بين α_1 و α_3 وهكذا نكمل باقي الخطوات اللازمة حتى نحصل على متتالية $(x_1, x_2, x_3, \dots)$ من الجذور التقريبية التي تقترب من الجذر الدقيق α.

الشكل (1)



لاحظ أن طول الفترة هو b - a وبعد التنصيف الأول يصبح $\frac{b-a}{2}$، وبعد التنصيف الثاني يصبح $\frac{b-a}{2^2} = \frac{b-a}{4}$ وهكذا فإن طول الفترة بعد n تكرار هو $\frac{b-a}{2^n}$، وللحصول على جذر بخطأ لا يتجاوز $\in > 0$ فإن $\frac{b-a}{2^n} < \in$ أي أن $2^n > \frac{b-a}{\in}$

لذلك فإن أي خطأ في التقريب مقداره $\in$ يعني أن عدد التنصيفات n يجب أن يتجاوز $\frac{\ln\left(\frac{b-a}{\in}\right)}{\ln 2}$ (بتأثير ln للطرفين)

◄◄ مثال:

قرب جذر الدالة $f(x) = x^3 - x - 1$ في الفترة [1, 2] أقرب إلى خانتين عشريتين.

الحل:

عدد التنصيفات n يحقق الشرط $n > \frac{\ln\left(\frac{1}{0.01}\right)}{\ln 2} = 6.64$ أي أن $n \geq 7$

n	a_n	b_n	α_n	$f(\alpha_n)$
1	1	2	1.5	0.875
2	1	1.5	1.25	-0.29688
3	1.25	1.5	1.375	0.224609
4	1.25	1.375	1.3125	-0.05151
5	1.3125	1.375	1.3438	0.08283
6	1.3125	1.3438	1.3282	0.014898
7	1.3125	1.3282	1.3204	-0.01834

ولاحظ أنه لزمنا 7 تنصيفات للفترة حتى نحصل على دقة مكونة من خانتين عشريتين، وهذا واضح من نتيجة آخر قيمتين تقريبيتين للجذر:

$$|\alpha_7 - \alpha_6| = 0.0078 < 0.01$$

ملاحظة:

في المثال السابق نستطيع حساب النسبة المئوية للخطأ النسبي.

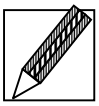
$$\in_a = \left|\frac{\alpha_k - \alpha_{k-1}}{\alpha_k}\right| * 100\%$$

فمثلاً نسبة الخطأ النسبي في الإجابة الأخيرة α_k هو:

$$\in_a = \left|\frac{1.3204 - 1.3282}{1.3204}\right| * 100\% = 0.6\%$$

وهي نسبة مقبولة.

التدريب (1)



باستخدام خمس تصيفات (n = 5) أوجد قيمة تقريبية لجذر الدالة:

$$f(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^2 - \sin x$$

في الفترة [1.5, 2] ثم احسب الخطأ النسبي؟

مثال:

أوجد $\sqrt{2}$ بدقة خانتين عشريتين مستخدماً الفترة [1, 2].

الحل:

نكوّن الدالة المناسبة f (x) بحيث يكون $\sqrt{2}$ جذر لها $x = \sqrt{2}$ أو $x^2 = 2$ واضح أن $f(x) = x^2 - 2$ هي الدالة المناسبة. أيضاً f(1) = -1 ، f(2) = 2 أي أن لهما إشارتين مختلفتين من السهل على الدارس حساب عدد الخطوات اللازمة لدقة خانتين عشريتين وهو $n \geq 7$:

n	a_n	b_n	α_n	$f(\alpha_n)$
1	1	2	1.5	0.25
2	1	1.5	1.25	-0.4375
3	1.25	1.5	1.375	-0.109375
4	1.375	1.5	1.4375	0.06640625
5	1.375	1.4375	1.40625	-0.0224609
6	1.40625	1.4375	1.42188	0.021742734
7	1.40625	1.42188	1.414065	-0.00042017

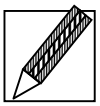
فيكون الجذر التقريبي للدالة هو 1.414065 وهي قيمة تقريبية للقيمة $\sqrt{2}$

لاحظ أن $| \alpha_7 - \alpha_6 | = 0.007815 < 0.01$

ملاحظة:

تمتاز طريقة التنصيف بأنها دائماً تضمن التقارب للجذر الفردي، كما تمتاز بسهولة حساب حدود الخطأ (Error Bounds) لكن يعاب عليها أنها بطيئة التقارب للوصول إلى الحل.كما أنها غير فعالة لحساب الجذور الزوجية

تدريب (2)



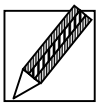
(أ) احسب عدد التنصيفات اللازمة لحل المعادلة $f(x) = x^3 + 4x^2 - 10 = 0$ بدقة 10^{-3} في الفترة $[1, 2]$.

(ب) أوجد جذر للمعادلة $x^3 + 4x^2 - 10 = 0$ في الفترة $[1, 2]$ بدقة 10^{-2}.

(جـ) ليكن $f(x) = x^2 - 4 \sin(x)$ حيث x في الفترة $[1, 3]$

استخدم طريقة التنصيف لإيجاد الجذر إلى أقرب خانتين عشريتين.

تدريب (3)



(أ) اكتب خوارزمية حاسوبية لتنفيذ صيغة التنصيف.

أسئلة تقويم ذاتي

1- ما الفرق بين الجذر الفردي والجذر الزوجي للمعادلة الجبرية.

2- ما المقصود بطريقة التنصيف لإيجاد الجذور للمعادلة الجبرية.

3- عدّد خطوات إيجاد جذر الدالة المتصلة $f(x)$.

4- اذكر ميزات طريقة التنصيف، واذكر عيوبها.

2. حساب الجذر باستخدام طريقة الخطأين (False Position)

عزيزي الدارس،

تتشابه طريقة الخطأين (False Position) مع طريقة التنصيف في حصر الجذر المفرد، لكنها (طريقة الخطأين) أسرع منها. ولتوضيح هذه الطريقة نفرض أن لدينا $f(x) = 0$ في الفترة $[a, b]$، بحيث $f(a)$, $f(b)$ لهما إشارتان مختلفتان. إن معادلة الخط المستقيم المار بالنقطتين: $(a, f(a))$, $(b, f(b))$ هو:

$$\frac{y - f(a)}{x - a} = \frac{f(a) - f(b)}{a - b}$$

وسوف يمر هذا الخط المستقيم بمحور السينات عند النقطة $(x_1, 0)$، وبالتعويض في المعادلة الأخيرة $y = 0$ ، $x = x_1$ يصبح لدينا:

$$\frac{-f(a)}{x_1 - a} = \frac{f(a) - f(b)}{a - b}$$

وبالضرب التبادلي وجعل x_1 في طرف يصبح لدينا:

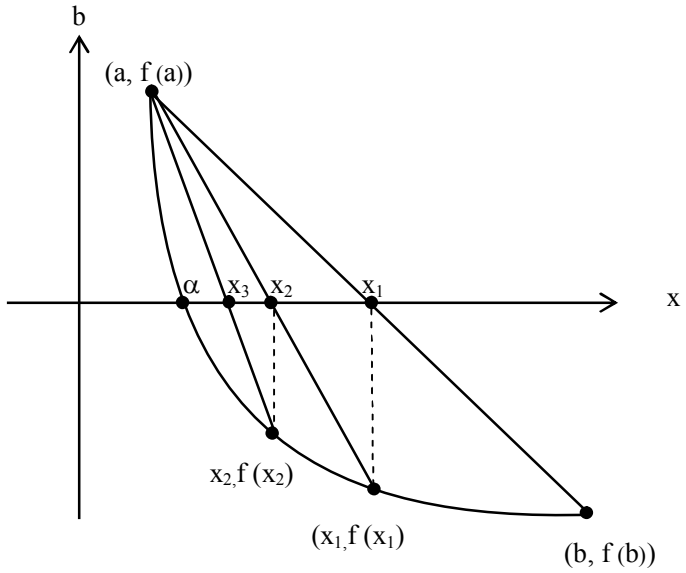
$$x_1 = \frac{a f(b) - b f(a)}{f(b) - f(a)}$$

والآن نبحث في إشارة $f(x_1)$ ولنفرض أنها سالبة (انظر الشكل) فينحصر الجذر بين a , x_1 لذلك نعيد حساب معادلة الخط المستقيم المار بين النقطة $(a, f(a))$, $(x_1, f(x_1))$ ويصبح لدينا:

$$x_2 = \frac{a\, f(x_1) - x_1\, f(a)}{f(x_1) - f(a)}$$

وبتكرار تلك العملية يصبح لدينا متتالية $x_1, x_2, x_3, \ldots$ تقترب أكثر وأكثر من الجذر المطلوب.

الشكل (2)



◄◄ مثال:

أوجد جذر المعادلة $x^3 - 4x + 1 = 0$ بطريقة الخطأين في الفترة $[0, 1]$

الحل:

نفرض: $f(x) = x^3 - 4x + 1$

$f(0) = 1 > 0$, $f(1) = -2 < 0$ لذلك فالجذر موجود في الفترة [0, 1]

الخطوة الأولى:

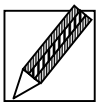
$$x_1 = \frac{a f(b) - b f(a)}{f(b) - f(a)}$$
$$= \frac{(0)(-2) - (1)(1)}{-2 - 1}$$
$$= \frac{-1}{-3} = \frac{1}{3}$$

$$f(x_1) = f\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{27} - \frac{4}{3} + 1 \quad = -\ 0.2963$$

نتابع الخطوات اللاحقة لنحصل على الجدول التالي:

n	a_n	b_n	x_n	$f(x_n)$
1	0	1	0.33333	-0.296296
2	0	0.333333	0.25714	-0.00038225
3	0	0.25714	0.25420	-0.000012546
4	0	0.25420	0.2541018	-0.000000412
5	0	0.25410	0.2541017	

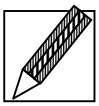
تدريب (4)



(أ) استخدم طريقة الخطأين لحل المعادلة $x \tan x = -1$ باستخدام دقة 3 خانات عشرية في الفترة [2.5, 3]

(ب) استخدم طريقة الخطأين لإيجاد جذر المعادلة $x - \cos x = 0$ في الفترة [0, 1]

التدريب (5)



(أ) طبق طريقة الخطأين في الفترة [0, 1] للدالة $f(x) = x^2 - e^{-x}$ مستخدماً خطوتين اثنتين فقط.

(ب) لتكن $f(x) = x^2 - 6$، استخدم طريقة الخطأين في الفترة [2, 3] لإيجاد x_3.

أسئلة تقويم ذاتي



1- بماذا تتشابه طريقة الخطأين مع طريقة التنصيف؟

2- اشرح طريقة الخطأين بنقاط محددة.

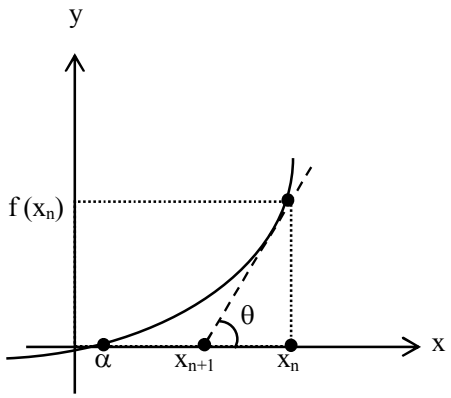
3- ذكرنا في سياق الشرح: "تعتبر طريقة الخطأين أسرع من طريقة التنصيف" فسّر ذلك.

3. طريقة نيوتن–رافسن لحساب الجذر
(Newton - Raphson Iteration)

عزيزي الدارس،،

هذه الطريقة أيضاً تتابعية، لنفرض أن الدالة لها جذر α وأن القيمة التقريبية لها في الخطوة i هي x_n. إن قيمة x_{n+1} يمكن حسابها من خلال إيجاد نقطة تقاطع المماس للدالة f عند النقطة(x_i و$f(x_i)$)مع محور السينات (انظر الشكل التالي).

الشكل (3)



أي أن:

$$f'(x_i) = \frac{f(x_i) - 0}{x_i - x_{i+1}} = \tan(\theta)$$

وبجعل x_{n+1} في طرف، نحصل على:

$$X_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

وهذه المعادلة هي ما يسمى بصيغة نيوتن – رافسن، ويفضل البدء بقيمة ابتدائية x_0 قريبة من الجذر الدقيق α ما أمكن.

◄◄ مثال:

أوجد قيمة تقريبية لجذر المعادلة $x = \cos x$ باستخدام طريقة نيوتن–رافسن في الفترة $[0, .1]$

الحل:

نفرض أن $f(x) = x - \cos x$، نفرض أن $f(x) = x - \cos x$، أيضاً $f(1)\ ,\ f(0)$ لهما إشارتان مختلفتان:

$$(f(1) = 0.459697 \quad , \quad f(0) = -1\ )$$

ونختار x_0 أقرب ما يكون إلى 0 (لماذا ؟)، وليكن $x_0 = 0.7$

$$f'(x) = 1 + \sin x$$

$$f'(x) = 1 + \sin x$$

$$x - \frac{f(x)}{f'(x)} = x - \frac{x - \cos x}{1 + \sin x}$$

$$= \frac{x \sin x + \cos x}{1 + \sin x}$$

إذا: $x_{i+1} = \dfrac{x_i \sin x_i + \cos x_i}{1 + \sin x_i}$

نبدأ بأن تخمين ابتدائي وليكن $x_0 = 0.7$ لنحصل على الجدول التالي:

n	x_{i+1}
0	0.739436499
1	0.739085162
2	0.739085136

تعريف:

رتبة التقارب (Order of Convergence)

ليكن $x_0 , x_1 , \dots , x_n$ متتالية لقيم تقريبية للجذر α ناتجة عن طريقة عددية بحيث $\lim_{n\to\infty} x_n = \alpha$

ليكن $\epsilon_n = \alpha - x_n$، إذا كان: $\lim_{n\to\infty} \frac{|\epsilon_{n+1}|}{|\epsilon_n|^P} = C \neq 0$

فإن الطريقة العددية المنتجة للمتتالية لها رتبة تقارب P و C هو ثابت الخطأ المحاذي (Asymptotic error constant).

من التعريف السابق، نرى أنه كلما كانت قيمة P كبيرة كان التقارب أسرع.

1.3 دراسة الخطأ في طريقة نيوتن رافسون

لنعد الآن عزيزي الدارس إلى طريقة نيوتن – رافسن ونفرض أن $f(x)$ دالة قابلة للاشتقاق مرتين، α هو جذر بسيط، أي ذو تكرار واحد، لـ(f)، إذن وباستخدام متسلسلة تايلور (Taylor Series):

$$f(\alpha) = f(x_i) + (\alpha - x_i) f'(x_i) + \frac{(\alpha - x_n)^2}{2} f''(\varepsilon) = 0$$

حيث ε هو عدد بين α وx_i ، إذن: (بافتراض أن$f(x_I) \neq 0$) نحصل على:

$$\alpha - x_i + \frac{f(x_i)}{f'(x_i)} = \frac{-(\alpha - x_i)^2 f''(\varepsilon)}{2 f'(x_i)}$$

$$\Rightarrow \alpha - x_{i+1} = \frac{-(\alpha - x_i)^2 f''(\varepsilon)}{2 f'(x_i)}$$

ولكن $|\epsilon_{i+1}| = |\alpha - x_{i+1}|$ ، $|\epsilon_i| = |\alpha - x_i|$

إذن:

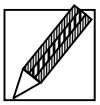
$$\frac{|\epsilon_{i+1}|}{|\epsilon_i|^2} = \frac{|f''(\varepsilon)|}{2|f'(x_i)|}$$

$$\Rightarrow \lim_{i\to\infty} \frac{|\epsilon_{i+1}|}{|\epsilon_i|^2} = \frac{|f''(\alpha)|}{2|f'(\alpha)|}$$

لأن $x_i \to \alpha$ عندما $i \to \infty$

لذلك فإن طريقة نيوتن–رافسن لها الرتبة 2 من التقارب، ولها ثابت الخطأ المحاذي $\frac{|f''(\alpha)|}{2|f'(\alpha)|}$.يجب علينا هنا افتراض أن $f''(0) \neq 0$

التدريب (6)



(أ) إذا كان $f(x) = e^x + 3x$ احسب الجذر بطريقة نيوتن–رافسن مبتدئاً بالقيمة $x_0 = 0$.

(ب) إذا كان $f(x) = x^3 - 4.45x^2 + 9.33x - 5.545$ احسب الجذر بطريقة نيوتن رافسن مبتدئاً بالقيمة $x_0 = 5$ و عدد 7 خطوات تتابعية؟

مثال:

أوجد الجذر التقريبي للدالة $f(x) = e^x - x - 1$

الحل:

لاحظ عزيز الدارس أن $f(0) = e^0 - 0 - 1 = 0$، كذلك $f'(0) = e^0 - 1 = 0$ لكن $f''(0) \neq 0$ ومعنى هذا أن $\alpha = 0$ هو جذر ذو تكرار 2 للدالة $f(x)$ وهذا المثال الأول في هذا الفصل الذي يصادف فيه جذر غير بسيط.

لنفرض أن $x_0 = 1$، وبتطبيق صيغة نيوتن – رافسن، نحصل على الجدول التالي:

n	x_{n+1}	n	x_{n+1}
0	0.58198	4	0.0438
1	0.31906	5	0.02206
2	0.16800	6	0.01107
3	0.08635	7	0.005545

لاحظ أن $x_n \to 0$ ولكن درجة التقارب أقل من لو كان $\alpha = 0$ جذر بسيط.

4. طريقة القاطع (Secant Method)

عزيزي الدارس،،،

لعل أحد عيوب طريقة نيوتن – رافسن هو الحاجة إلى حساب المشتقة للدالة f والذي قد يكون حسابها صعباً من الناحية العملية. ونعلم أن:

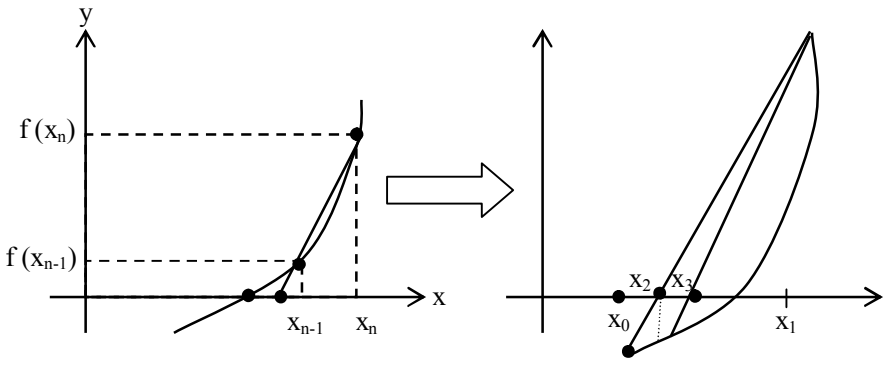
$$f'(x_n) \cong \frac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}}$$

اذا كانت x_n قريبة من x_{n-1}.

لذلك بتعويض قيمة $f'(x_n)$ في صيغة نيوتن – رافسن يصبح لدينا:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{(x_n - x_{n-1}) f(x_n)}{f(x_n) - f(x_{n-1})}, \quad n = 1, 2, \ldots$$

وهذه الصيغة الأخيرة تسمى طريقة القاطع (Secant method). ونلاحظ عزيزي الدارس أن الطريقة تحتاج إلى قيمتين ابتدائيتين قبل البدء باستخدامها: x_0, x_1 والشكل المقابل يمثل رسماً توضيحياً لطريقة القاطع:



والطريقة كما هو واضح من الرسم تبدأ من النقطتين x_0 , x_1 فيكون x_2 هو نقطة تقاطع المستقيم الواصل بين $(x_0, f(x_0))$و $(x_1. f(x_1))$ مع محور السينات و x_3 هو نقطة تقاطع المستقيم الواصل بين $(x_1, f(x_1))$ و $(x_2, f(x_2))$ مع محور السينات، وهكذا.

مثال:

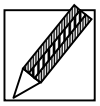
احسب جذر $f(x) = x^3 + 4x^2 - 10 = 0$

الحل:

لنأخذ $x_0 = 1.5$, $x_1 = 1.3733$ فإننا سنحصل على الجدول التالي:

n	0	1	2	3	4
x_n	1.50	1.3733	1.3657	1.3652	1.3652

تدريب (7)



(أ) احسب الجذر للدالة $f(x) = e^x + 3x$ بطريقة القاطع لأقرب 3 خانات عشرية.

(ب) احسب الجذر بطريقة القاطع للدالة $f(x) = \cos x - x$ لأقرب 3 خانات عشرية.

لاحظنا فيما سبق، أنه في حال كان الجذر مكرراً فإن تقارب الحل في طريقة نيوتن رافسن (وكذلك طريقة القاطع) يكون خطياً وليس ثنائياً. ولحل تلك المشكلة فإننا نفرض أن عدد تكرار الجذر المراد تقريبه هو m، ولنأخذ الصيغة:

$$x_{n+1} = x_n - m\,\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

كما اقترحها رالستون وزميله Ralston & Rabinowitz، ولكن هذه الصيغة تتطلب معرفة m وهذا قد يكون شاقاً في بعض الأحيان. اقترح العالمان صيغة أخرى لطريقة نيوتن – رافسن حيث: $u(x) = \frac{f(x)}{f'(x)}$ لها نفس جذور $f(x)$.

ثم اقترحا: $$x_{n+1} = x_n - \frac{u(x_i)}{u'(x_i)}$$

وباشتقاق $u(x)$ وتعويضها في المعادلة السابقة:

$$u'(x) = \frac{f'(x)f'(x) - f(x)f''(x)}{[f'(x)]^2}$$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)[f'(x_n)]}{[f'(x_n)]^2 - f(x_n)f''(x_n)}$$

وهذه الصيغة هي طريقة نيوتن – رافسن المعدلة.

◄◄ مثال:

قارن بين طريقتي نيوتن – رافسن العادية والمعدلة لحساب جذور المعادلة

$f(x) = (x - 3)(x - 1)(x - 1) = x^3 - 5x^2 + 7x - 3$

الحل:

صيغة نيوتن – رافسن العادية هي:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^3 - 5x_n^2 + 7x_n - 3}{3x_n^2 - 10x_n + 7}$$

(نقيس الفرق بين الطريقتين باستخدام الخطأ النسبي المئوي $\in_1 = \left|\frac{\alpha - x_n}{\alpha}\right|$

نحصل على الجدول (لاحظ أن $\in_t = \left|\frac{\alpha - x_n}{\alpha}\right| 100$ حيث α هو جذر المعادلة).

الجدول يوضح الناتج من طريقة نيوتن – رافسون العادية في تقريب الجذر α وذلك بأختيار $x_0 = 1$

n	x_n	$\in_t$ **(%)**
0	0	100
1	0.4285714	57
2	0.6857143	31
3	0.8328654	17
4	0.9133290	8.7
5	0.9557833	4.4
6	0.9776551	2.2

(لاحظ أن التقارب بطئ).

أما باستخدام طريقة نيوتن – رافسن المعدلة ذات الصيغة:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{(x_n^3 - 5x_n^2 + 7x_n - 3)(3x_n^2 - 10x_n + 7)}{(3x_n^2 - 10x_n + 7)^2 - (x_n^3 - 5x_n^2 + 7x_n - 3)(6x_n - 10)}$$

فينتج عنها:

n	x_n	ϵ_t (%)
0	0	100
1	1.105263	11
2	1.003082	0.31
3	1.000002	0.00024

(لاحظ سرعة التقارب).

أما التقريب $\alpha = 3$ فنختار $x_0 = 4$ والجدول التالي يمثل الحل باستخدام الطريقتين.

n	x_n العادية	ϵ_t (%) العادية	x_n المعدلة	ϵ_t (%) المعدلة
0	**4**	**33**	**4**	**33**
1	3.4	13	2.636364	12
2	3.1	3.3	2.820225	6.0
3	3.008696	0.29	2.961728	1.3
4	3.000075	0.0025	2.998479	0.051
5	3.000000	$2 * 10^{-7}$	2.999998	$7.7 * 10^{-5}$

مما يعكس ان الطريقة المعدلة تفيد في حالة كون الجذر مكرراً.

وبنفس ايجاد طريقة نيوتن – رافسن المعدّلة، يمكننا استنتاج طريقة القاطع المعدّلة (Modified secant Method):

يجب تعريف u صراحة بدلالة f .

$$x_{n+1} = x_n - \frac{u(x_n)(x_{n-1} - x_n)}{u(x_{n-1}) - u(x_n)}$$

أسئلة تقويم ذاتي

1- اكتب الصيغة الرياضية لطريقة القاطع، واشرحها.

2- كيف عالجنا التقارب الخطي وليس الثنائي للحل في حال كون الجذر مكررا.

3- ما هي طريقة نيوتن – رافسن المعدلة.

4- ما هي طريقة القاطع المعدّلة.

5. جذور كثيرات الحدود (الحدوديات)

(Roots of Polynomials)

عزيزي الدارس،

قبل دراسة جذور الحدوديات (كثيرات الحدود)، سوف نتعلم بعض المفاهيم من خلال المثال التالي.

مثال:

ليكن $f(x) = x^2e^{-x} - 0.5$ ، إن المعادلة $f(x) = 0$ لها ثلاثة جذور عند

$x = -0.539835$ ، $x = 1.48796$ ، $x = 2.61786$

ونستطيع عمل مايعرف بانكماش (deflation) للدالة f من خلال تعريف:

$$f_1(x) = \frac{f(x)}{(x-1.48796)}$$

حيث $f_1(x)$ هي دالة جديدة لها نفس جذور $f(x)$ (عدا $x = 1.48796$) وكذلك نعرف

$$f_2(x) = \frac{f_1(x)}{(x+0.539835)} \quad , \quad f_3(x) = \frac{f_2(x)}{(x-2.61786)}$$

مثال:

في المثال السابق أوجد الجذور الثلاثة بطريقة نيوتن – رافسن

الحل:

نفرض: $x_0 = 1$ كذلك:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = \frac{2x_n^2(1-x_n)+e^{x_n}}{2x_n(2-x_n)}$$

ويصبح لدينا:

n	0	1	2	3	4	5
$\mathbf{x_n}$	1	1.3591	1.4730	1.4877	1.4880	1.4880

وهنا بعد أن وجدنا الجذر الأول نعرّف: $f_2(x) = \frac{f(x)}{(x-1.488)}$

ثم نختار $x_0 = 1$ كذلك:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f_2(x_n)}{f_2'(x_n)}$$

n	0	1	2	3	4	5
$\mathbf{x_n}$	1	2.3601	2.5955	2.6177	2.6179	2.6179

وهنا بعد أن وجدنا الجذر الثاني نعرف:

$$f_3(x) = \frac{f(x)}{(x-1.488)(x-2.6179)}$$

ثم نختار $(x_0 = 1)$ كذلك:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f_3(x_n)}{f_3'(x_n)}$$

ويصبح لدينا:

n	0	1	2	3
$\mathbf{x_n}$	1	9.5356	13.4071	19.0849

لعلك لاحظت أن المتتالية x_n تبتعد عن الجذر الثالث، ويعود ذلك إلى أسباب تتعلق بالدالة f_3 لا مجال لذكرها هنا، وربما اختيار $x_0 = -1$ سيؤدي إلى متتالية متقاربة كما هو موضح في الجدول التالي:

n	0	1	2	3	4	5
$\mathbf{x_n}$	-1	-0.6664	-0.5517	-0.5399	-0.5398	-0.5398

ملاحظة:

الأرقام الواردة في الجدول في هذا المثال تم حسابها بواسطة الحاسوب، ومن الصعب حسابها باستخدام الآلة الحاسبة.

1.5 ما هي الحدودية؟

الحدودية من الدرجة n هي دالة لها الصيغة العامة التالية:

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$$

حيث $\alpha_n \neq 0$

إذا كان α_1 هو أحد جذور $P_n(x)$ فإن $P_n(\alpha_1) = 0$ ولذلك فإن $(x - \alpha_1)$ هو أحد عوامل $P_n(x)$ أي أن $P_n(x) = (x - \alpha_1)q_{n-1}(x)$ حيث $q(x)_{n-1}(x)$ هي حدودية

من الدرجة $n - 1$، كذلك إذا كان α_2 جذرا للحدودية $P_n(x)$ فإن $q_{n-1}(\alpha_2) = 0$ أو $(x - \alpha_2)$ هو عامل للحدودية $q_{n-1}(x)$ أي أن:

$$P_n(x) = (x - \alpha_1)\, q_{n-1}(x)$$
$$= (x - \alpha_1)(x - \alpha_2)\, r_{n-2}(x)$$

حيث r_{n-2} حدودية من الدرجة $n-2$. وبتكرار تلك العملية n من المرات:

$$P_n(x) = (x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \ldots (x - \alpha_{n-1})(x - \alpha_n)$$

أي أن الحدودية من الدرجة n لها n من الحدود سواء أكانت حقيقية أم مركبة، بسيطة أم مكررة، ولكن كيف نستطيع معرفة جذور الحدودية؟ لنفرض أن:

$$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

وبالقسمة على العامل $(x - z)$ يصبح لدينا:

$$P_n(x) = (x - z)\, q_{n-1}(x) + b_0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \; *$$

حيث:

$$q_{n-1}(x) = b_n x^{n-1} + b_{n-1} x^{n-2} + \ldots + b_2 x + b_1$$

و b_0 هو الباقي.

لذلك:

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = (x - z)(b_n x^{n-1} + b_{n-1} x^{n-2} + \ldots + b_2 x + b_1) + b_0$$

وبمقارنة المعاملات في طرفي المعادلة:

نجد ما يلي:

$b_n = a_n$		$: x^n$
$b_{n-1} = a_{n-1} + z b_n$	$\Leftarrow a_{n-1} = b_{n-1} - z\, b_n$	$: x^{n-1}$
$b_{n-2} = a_{n-2} + z\, b_{n-1}$	$\Leftarrow a_{n-2} = b_{n-2} - z\, b_{n-1}$	$: x^{n-2}$
	$\vdots$	
$b_2 = a_2 + z\, b_3$	$\Leftarrow a_2 = b_2 - z\, b_3$	$: x^2$
$b_1 = a_1 + z\, b_2$	$\Leftarrow a_1 = b_1 - z b_2$	$: x$
$b_0 = a_0 + z\, b_1$	$\Leftarrow a_0 = b_0 - z\, b_1$	$: 1$

إذن: $b_n = a_n$ و $b_k = a_k + z\, b_{k+1}$ حيث $k = n\text{-}1, n\text{-}2, \ldots .1, 0$

وإذا استبدلنا x بالمتغير z في المعادلة (*) يصبح لدينا:

$$P_n(z) = (z - z)\, q_{n-1}(z) + b_0 = b_0$$

ومعنى هذا أننا نحصل على قيمة دقيقة عندما $x = z$ أي أن الطريقة لها O (n).

والآن، لنحسب المشتقة $P'_n(z)$ عن طريق اشتقاق المعادلة (*):

$$P'_n(x) = q_{n-1}(x) + (x - z)\, q'_{n-1}(x)$$

فعند $x = z$ ؛ $P'_n(z) = q_{n-1}(z)$ ولحساب $q_{n-1}(z)$ فإننا نقسم على $(x - z)$ لنحصل على حدودية من الدرجة $n - 2$:

$$r_{n-2}(x) = d_n x^{n-2} + d_{n-1} x^{n-3} + \ldots + d_3 x + d_2$$

مع الباقي $d_1 = q_{n-1}(z) = P'_n(z)$. ويمكن تعريف d_k كما يلي:

$d_n = b_n$ ، $d_k = b_k + d_{k+1} x_j$ حيث $k = n\text{-}1, n\text{-}2, \ldots .1$.

◄◄ مثال:

أوجد جذر الحدودية $P_4(x) = x^4 - 10x^3 + 35x^2 - 50x + 24$ القريب من $x = 0.5$ بمساعدة صيغة نيوتن – رافسن.

الحل:

نطبق الصيغة العامة لنحصل على الجدول:

$x_0 = 0.5$	k	4	3	2	1	0	
	a_k	1	-10	35	-50	24	
	b_k	1	-9.5	30.25	-34.88	6.56	$= P_4(0.5)$
	d_k	1	-9	25.75	-22.01		$= P'_4 = (-0.5)$

$$x_1 = x_0 - \frac{P_4(0.5)}{P'_4(0.5)} = 0.5 - \frac{6.56}{-22.01} = 0.80$$

$x_1 = 0.80$	k	4	3	2	1	0	
	b_k	1	-9.2	27.64	-27.89	1.69	$= P_4(0.80)$
	d_k	1	-8.4	20.92	-11.15		$= P'_4(0.80)$

$$x_2 = x_1 - \frac{P_4(0.08)}{P'_4(0.80)} = 0.80 - \frac{1.69}{-11.15} = 0.95$$

$x_2 = 0.95$	k	4	3	2	1	0	
	b_k	1	-9.05	26.40	-24.92	0.33	$= P_4(0.95)$
	d_k	1	-8.10	18.71	-7.15		$= P'_4 = (0.95)$

$$x_3 - x_2 - \frac{P_4(0.95)}{P'_4(0.95)} = 0.95 - \frac{0.33}{-7.15} = 1.00$$

$x_3 = 1.00$	k	4	3	2	1	0	
	b_k	1	-9	26	-24	0	$= P_4(1.00)$

إذن $P_4(1.0) = 0$ إذن $x = 1.5$ هو جذر للمعادلة $P_4(x) = 0$.

2.5 الانكماش (Deflation)

يمكن استخدام الانكماش لإيجاد جذور أخرى للحدوديات، مثلاً إذا كان $x = \alpha_1$ هو أحد جذور الحدودية فإن $b_0 = b_n(\alpha_1) = 0$ و

$$P_n(x) = (x - \alpha_1)\, q_{n-1}(x)$$

ويمكننا تكرار إيجاد الجذور للحدودية q_{n-1} كما فعلنا سابقاً مع $P_n(x)$

مثال:

أوجد جذر ثان للحدودية في المثال السابق مستخدماً $x_0 = 0.5$

$$q_3(x) = \frac{P_4(x)}{(x-1)} = x^3 - 9x^2 + 26x - 24$$

$x_0 = 0.5$	k	3	2	1	0	
	a_k	1	-9	26	-24	
	b_k	1	-8.5	21.75	-13.13	$= q_3(0.5)$
	d_k	1	-8	17.75		$= q_3^1 = (0.5)$

$$x_1 = x_0 - \frac{q_3(0.5)}{q_3'(0.5)} = 0.5 - \frac{-13.13}{17.75} = 1.24$$

$x_1 = 1.24$	k	3	2	1	0	
	b_k	1	-7.76	16.38	-3.69	$= q_3(1.24)$
	d_k	1	-6.52	8.30		$= q_3^1 = (1.24)$

$$x_2 = x_1 - \frac{q_3(1.24)}{q_3'(1.24)} = 1.24 - \frac{-3.69}{8.30} = 1.68$$

$x_2 = 1.68$	k	3	2	1	0	
	b_k	1	-7.32	13.70	-0.98	$= q_3(1.68)$
	d_k	1	-5.64	4.22		$= q_3^1 = (1.68)$

$$x_3 - x_2 - \frac{q_3(1.68)}{q_3'(1.68)} = 1.68 - \frac{-0.98}{4.22} = 1.91$$

$x_3 = 1.91$	k	3	2	1	0	
	b_k	1	-7.09	12.46	-0.20	$= q_3(1.91)$
	d_k	1	-5.18	2.57		$= q'_3(1.91)$

$$x_4 = x_3 - \frac{q_3(1.91)}{q_3'(1.91)} = 1.91 - \frac{-0.20}{2.57} = 1.99$$

$x_4 = 1.99$	k	3	2	1	0	
	b_k	1	-7.01	12.05	-0.02	$= q_3(1.99)$
	d_k	1	-5.02	2.06		$= q'_3(1.99)$

$$x_5 = x_4 - \frac{q_3(1.99)}{q_3'(1.99)} = 1.99 - \frac{-0.20}{2.06} = 2.00$$

$x_5 = 2.00$	k	3	2	1	0	
	b_k	1	-7	12	0	$= q_3(2.00)$

إذن الجذر الثاني للحدودية هو $x = 2$ (جذر للحدوديتان $q_3(x)$ و $P_4(x)$).

أسئلة تقويم ذاتي

1- عرّف ما هي الحدودية؟

2- اشرح كيف يمكننا معرفة جذور الحدودية.

3- ماذا نعني بالانكماش، ولماذا نستخدمه؟

الخلاصة

عزيزي الدارس،،

في نهاية الوحدة الأولى نأمل أن تكون قد حققت الأهداف التي وردت في بدايتها، وفيما يلي ملخص لأهم النقاط التي وردت في الوحدة:

- ركزت الوحدة على المعادلة غير الخطيّة بمتغير واحد، وشرحت عدداً من الطرق لإيجاد جذور تلك المعادلة (أو حلولها)، سواء أكانت جذوراً بسيطة أم مكررة.
- قمنا في الوحدة بحل المعادلات وإيجاد جذورها باستخدام طرق عدة، هي: طريقة التنصيف، وطريقة الخطأين، وطريقة نيوتن – رافسن، وطريقة القاطع. وناقشنا كيفيّة تحليل الأخطاء الناتجة عن بعض الطرق العددية. ودرسنا كذلك رتبة التقارب لبعض الطرق ومحاسن تلك الطرق. ومزاياها.
- طريقة التنصيف: هي طريقة لحساب الجذر بصورة تقريبية، وذلك بتحديد فترة أولى لحصر الجذر، ثم تنصيف تلك الفترة بناءً على إشارة الدالة عند حدود الفترة. وهكذا حتى نتمكن من محاصرة الجذر إلى أقرب دقة ممكنة.
- تتميّز طريقة التنصيف بأنها مضمونة للوصول إلى الجذر الفردي، وسهلة الحساب. ولكنها بطيئة التقارب، وغير فعالة في حالة الجذور الزوجيّة. وتبلغ رتبة التقارب فيها $\frac{1}{2}$.
- تتميّز طريقة الخطأين عن طريقة التنصيف في أنها ذات رتبة خطية، وإذا كان معدّل التقارب فيها أقل من $\frac{1}{2}$ فهي أسرع من طريقة التنصيف، وإلاّ فإن طريقة التنصيف أسرع.
- أبرز حسنات طريقة نيوتن – رافسن هي: سرعة التقارب، سهولة الحساب والبرمجة. أما أبرز عيوبها فيكمن في أن تقاربها يعتمد على حسن اختيار x_0، كما أن التقارب

يقل في حال الجذر المكرر، وقد نواجه مشاكل في حال $\boxed{f'(x_0) = 0}$، ويجب أن نعرف $f(x)$ ، $f'(x)$ معاً.

- طريقة القاطع لا تحتاج إلى معرفة $f'(x)$ على عكس طريقة نيوتن رافس، ولذلك فإن طريقة القاطع اقتصادية في الوقت بالمقارنة مع نيوتن – رافسن، بالرغم من أنها تحتاج إلى عدد من الخطوات أكثر من نيوتن – رافسن للوصول إلى دقة الحل نفسها.

لمحة مسبقة عن الوحدة الدراسيّة التالية

عزيزي الدارس،،

نعالج في الوحدة التالية موضوع تقريب الدوال من خلال استكمال بيانات مجدولة لتلك الدوال عن طريق حدوديات تمر بالأزواج المرتبة المجدولة.

وستقدم لك الوحدة أساليب متنوعة لحساب حدوديات الاستكمال، ومنها حدودية لاجرانج ونيوتن المتقدمة والرجعيّة.

نأمل أن تكون وحدة مفيدة وممتعة لك.

إجابات التدريبات

التدريب (1)

n	a_n	b_n	α_n	$f(\alpha_n)$
1	1.5	2	1.75	-
2	1.75	2	1.875	-
3	1.875	2	1.9375	+
4	1.875	1.9375	1.90625	-
5	1.90625	1.9375	1.921875	

$$\in_a = \left|\frac{1.921875-190625}{1.921875}\right| * 100\% = 0.8\%$$

التدريب (2)

(أ) $$n > \frac{\ln\left(\frac{2-1}{10^{-3}}\right)}{\ln 2} \cong 9.96$$

إذن $n = 10$

(ب) $f(1) = -5 < 0$, $f(2) = 14 > 0$ ويلزمنا $n = 7$ لدقة 10^{-2} (خانتين عشريتين)

n	a_n	b_n	α_n	$f(\alpha_n)$
1	1	2	1.5	+
2	1	1.5	1.25	-
3	1.25	1.5	1.375	+
4	1.25	1.375	1.3125	-
5	1.3125	1.375	1.3438	-
6	1.3438	1.375	1.3594	-
7	1.3594	1.375	1.3672	+

(جـ) نطبق صيغة التنصيف فنحصل على الجدول:

a	f(a)	b	f(b)
1.0000	-2.36588	3.00000	8.43552
1.0000	-2.36588	2.00000	0.36281
1.5000	-1.73998	2.00000	0.36281
1.7500	-0.87344	2.00000	0.36281
1.8750	-0.30072	2.00000	0.36281
1.8750	-0.30072	1.93750	0.019849
1.9063	-0.14326	1.93750	0.019849
1.9219	-0.06241	1.93750	0.019849
1.9297	-0.02145	1.93750	0.019849
1.9336	-0.00085	1.93750	0.019849

لذلك فيكون الجذر التقريبي: 1.93

التدريب (3)

(أ) نفترض أن الدالة f متصلة على الفترة $[a,b]$ وتتغير اشارتها على تلك الفترة، وستجد عزيزي الدارس في الخوارزمية الحاسوبية التالية طريقة تقريب النقطة P^* إلى النقطة P بحيث تكون قيمة الدالة عند النقطة P تساوي صفرا.

```
for j = 1, 2, ... do
    p_j = (a + b)/2
    if f(p_j) = 0 or b − a is sufficiently small then
        p* = p_j
        return p*
    end
    if f(a)f(p_j) < 0 then
        b = p_j
    else
        a = p_j
    end
end
```

التدريب (4)

(أ) نفرض: $f(x) = x \tan x + 1$

$$f(3) = 3 \tan 3 + 1$$
$$= 0.572360$$
$$f(2.5) = 2.5 \tan (2.5) + 1$$
$$= -0.867556$$

لذا فإن الجذر موجود في الفترة [3 ,2.5]. نعوض في معادلة الخط المستقيم بالخطوات المتتابعة ونحصل على:

n	a_n	b_n	x_n	$f(x_n)$
1	2.5	3	2.801252	+
2	2.5	2.801252	2.806513	+
3	2.5	2.806513	2.798683	+
4	2.5	2.798683	2.7981	

لاحظ عزيزي الدارس سرعة التقارب في الحل، كما ونلاحظ هنا أننا توقفنا بعد 4 خطوات ولذلك لأن $|x_4 - x_3| < 10^{-3}$ (ولكن $|x_3 - x_2| \not< 10^{-2}$).

(ب) نفرض $f(x) = x - \cos x$، ونوجد قيم الدالة عند حدود الفترة:

نكوّن الجدول التالي: $f(0) = 0 - \cos 0 = -1$, $f(1) = 1 - \cos 1 = 0.459698$

n	a_n	b_n	x_n	$f(x_n)$
1	0	1	0.685078	-
2	0.685078	1	0.736299	-
3	0.736299	1	0.738945	-
4	0.738945	1	0.739079	

وهذه القيمة الأخيرة $x_4 = 0.739079$ هي دقيقة بمقدار أربع خانات عشرية.

التدريب (5)

(أ) $f(0) < 0$, $f(1) > 0$ لذلك هناك جذر في الفترة [0, 1].

نطبق الصيغة التتابعية ونحصل على الجدول

k	x_{k-2}	f_{k-1}	f_{k-2}	f_{k-1}	x_k	f_k
2	0	1	-1	0.6321	0.6127	-0.1665
3	1	0.6127	0.6321	-0.1665	0.6680	-0.0666

(ب) $f(2) < 0$, $f(3) > 0$ حيث $x_0 = 2$, $x_1 = 3$

$$x_2 = \frac{2f(3)-3f(2)}{f(3)-f(2)} = \frac{12}{5} = 2.4$$

لاحظ أن $f(2.4) = -0.24 < 0$، لذلك فإن الحل موجود في الفترة [3 , 2.4]

$$x_3 = \frac{(2.4)f(3)-3f(2.4)}{f(3)-f(2.4)} = 2.444$$

التدريب (6)

(أ) نستخدم الصيغة لنحصل على الجدول التالي:

k	**f(x)**	**f'(x)**	**x(k+1)**
0	1.000e+000	4.000e+000	-0.250000000000000
1	2.880e-002	3.779e+000	-0.257621672780536
2	2.256e-005	3.773e+000	-0.257627653046074
3	1.382e-011	3.773e+000	-0.257627653049737
4	1.110e-016	3.773e+000	-0.257627653049737

(ب) نحصل على الجدول التالي:

k	f(x)	f'(x)	x(k+1)
0	5.485e+001	3.983e+001	3.622771780065277
1	1.740e+001	1.646e+001	2.565801919827111
2	5.990e+000	6.244e+000	1.606601014662056
3	2.105e+000	2.775e+000	0.847866258882024
4	-2.239e-001	3.941e+000	0.904684599791607
5	-5.971e-003	3.734e+000	0.906283844764428
6	-4.436e-006	3.728e+000	0.906285034568648
7	-2.450e-012	3.728e+000	0.906285034569305

فيكون الجذر التقريبي 0.906285

التدريب (7)

(أ)

n	0	1	2	3	4
x_n	$\frac{-1}{2}$	0	-5.264066	0.257808−	-0.257622

(ب)

n			2	3	4	5
x_n	0	1	0.6850733	0.7362984	0.7391192	0.7390850

مسرد المصطلحات

الانكماش (Deflation)

عملية تخفيض درجة الحدودية درجة واحدة عن طريق معرفة أحد جذورها α بقسمة الحدودية على العامل $(x - \alpha)$.

ثابت الخطأ المحاذي (Asymptotic Error Constant)

وهو قيمة ثابت C يكون نتيجة النهاية للخطأ النسبي لطريقة عددية ما.

حدود الخطأ (Error Bound)

وهو الحد الأعلى للخطأ الناتج عن استخدام طريقة عددية ما.

المراجع

- J. H. Mathews and K. D. Fink, **Numerical Methods Using MATLAB**, 3rd ed., Prentice-Hall, 1999.
- G. Strang, **Introduction to Linear Algebra**, 2nd ed., Wellesley-Cambridge, 1998.
- C. Van Loan, **Introduction to Scientific Computing: A Matrix-Vector Approach Using MATLAB**, 2nd ed., Prentice-Hall, 1999.
- James L. Buchanan and Peter R. Turner. **Numerical Methods and Analysis**. McGraw-Hill: 1992.
- R. L. Burden and J. D. Faires, **Numerical Analysis**, 6th ed., Brooks/Cole, 1997.
- E. W. Cheney and D. Kincaid, **Numerical Mathematics and Computing**, 3rd ed., Brooks/Cole, 1994.
- L. V. Fausett, **Applied Numerical Analysis Using MATLAB**, Prentice-Hall, 1999.
- G. H. Golub, ed., **Studies in Numerical Analysis, MAA Studies in Math.**, v. 24, Mathematical Association of America, 1984.
- R. W. Hamming, **Introduction to Applied Numerical Analysis**, McGraw-Hill.
- F. B. Hildebrand, **Introduction to Numerical Analysis**, Dover, 1987.
- L. W. Johnson and R. D. Riess, **Numerical Analysis**, 2nd ed.
- G. Lindfield and J. Penny, **Numerical Methods Using MATLAB**, 2nd ed., Prentice-Hall, 1999.
- J. H. Maindonald, **Statistical Computation**, Wiley, 1984.


الوحدة الثانية
الاستكمال وتقريب
الدوال

محتويات الوحدة

الموضوع	الصفحة
المقدمة	**43**
تمهيد	43
أهداف الوحدة	44
1. الاستكمال و الحدوديات	**45**
2. طريقة لاجرانج للاستكمال	47
3. تحليل الخطأ في التقريب بالاستكمال بالحدوديات	51
4. طريقة نيوتن للفروق المقسومة	**54**
1.4 تمهيد	54
2.4 الفروق المقسومة	57
5. الاستكمال على فترات متساوية	**62**
1.5 مؤثر الفروق المتقدمة	63
2.5 صيغة نيوتن للفروق المتقدمة	66
الخلاصة	**71**
لمحة مسبقة عن الوحدة الدراسية التالية	**72**
المراجع	**73**

المقدمة

تمهيد

عزيزي الدارس،،

مرحباً بك إلى الوحدة الثانية من وحدات هذا المقرر، وهي بعنوان " الاستكمال و تقريب الدوال".

إن أكثر الطرق رواجا في تقريب الدوال هي التقريب من خلال الحدوديات (كثيرات الحدود)، وأشهر الأساليب المتبعة هو أسلوب الاستكمال، لذا سنتعرف بالتفصيل في هذه الوحدة إلى مفهوم الاستكمال وكيفيّة إجرائه.

إن حدوديات الاستكمال لها عدّة استخدامات مهمّة كما سنرى في وحدات قادمة ، فهو يمهد الطريق لحسابات عددية تقريبيّة للتكاملات العددية والاشتقاقات العددية والحلول العددية للمعادلات التفاضليّة.

وبناءً على مفهوم الاستكمال سنعرّف حدودية لاجرانج ونستخدمها في حسابات التقريب لعدد من الدوال، وبالتالي ننتهي من القسم الرئيسي من أقسام هذه الوحدة، ويبقى لدينا قسمان آخران مهمان، الثاني حول: استكمال الفروق المقسومة، حيث نعرّف من خلاله حدودية الفروق المقسومة (حدودية نيوتن)، والتي سنستخدمها في عمليات التقريب.

وفي القسم الأخير نستعرض الاستكمال على فترات متساوية، ونتطرق من خلاله إلى شرح معامل الفروق المتقدمة.

وقد زودنا الوحدة بعدد من الأمثلة والأسئلة والتدريبات التي ستساهم معاً في توضيح المفاهيم الواردة بدقة.

نرجو أن تكون وحدة مفيدة لك، وأن تساهم معنا في نقدها وتقويمها.

أهداف الوحدة



عزيزي الدارس،

بعد فراغك من دراسة هذه الوحدة ينبغي أن تكون قادراً على أن:

- **تشرح** معنى الاستكمال.
- **تميّز** بين طرق الاستكمال المختلفة.
- **تقرّب** الدوال باستخدام طرق الاستكمال.

1. الاستكمال و الحدوديات

عزيزى الدارس، إن مفهوم الاستكمال جد بسيط. سنقوم بشرحه بالتالى: لنفرض أن لدينا البيانات التالية، المبينة فى الجدول، لقيم الدالة $y = f(x)$ عند النقاط المختلفة $x_n, \cdots\cdots, x_1, x_0$:

x_i	x_0	x_1	.....	x_n
$y_i = f(x_i)$	y_0	y_1	.....	y_n

يمكن التعبير عن تلك البيانات بـ (x_i, y_i) ، $i = 0,1,.....,n$.

نقول إن الدالة $p(x)$ تكمل تلك البيانات إذا كان $p(x_i) = y_i$ ، $i = 0,1,.....,n$. كذلك نقول إن الدالة $p(x)$ تكمل $f(x)$ عند تلك النقاط. و يمكننا القول بأن p تقرب f بالاستكمال. إذن فالاستكمال يعنى إيجاد دالة p تقرب دالة ما f معرفة فى شكل بيانات. الدالة p يمكن أن تنتمى لأى مجموعة من الدوال، غير أننا فى هذه الوحدة لنكتفى فقط بالاستكمال باسخدام الحدوديات (كثيرات الحدود).

نقول إن $p(x)$ حدودية ذات درجة n فى المتغير x إذا كانت على الصورة:

$p(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i = a_0 + a_1 x + ... + a_n x^n$ حيث a_i ثابت لكل i و $a_n \neq 0$. و إذا أهمل الشرط $a_n \neq 0$ فإن p حدودية درجتها لا تزيد عن n. يرمز لمجموعة الحدوديات التى لا تزيد درجتها عن n بـ IP_n.

مثال:

$p(x) = x^3 - 2x + 5$ حدودية درجتها 3 و فيها $a_0 = 5$ ، $a_1 = -2$ ، $a_2 = 0$ و $a_3 = 1$

المبرهنة التالية تعد الأساس للاستكمال بالحدوديات.

توجد حدودية فريدة درجتها لا تزيد عن n تكمل البيانات (x_i, y_i) ، $i = 0,1,.....,n$

الإثبات:

عرف الدالة $L_{n,i}(x)$ بـ:

$$L_{n,i}(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j} = \frac{(x - x_0).....(x - x_{i-1})(x - x_{i+1}).....(x - x_n)}{(x_i - x_0).....(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1}).....(x_i - x_n)}$$

واضح أن:

$$\begin{aligned} L_{n,i}(x_i) &= 1 \\ L_{n,i}(x_j) &= 0, \qquad i \neq j \end{aligned} \tag{2.1}$$

الآن، عرف الحدودية $p(x)$ بـ: $p(x) = \sum_{k=0}^{n} y_k L_{n,k}(x)$. إذن باستخدام (2.1) فإن $p(x_i) = \sum_{k=0}^{n} y_k L_{n,k}(x_i) = y_i$ لكل i. بما أن $p \in IP_n$ فهذا يثبت وجود الحدودية التى لا تزيد درجتها عن n و تكمل البيانات المعطاة.

بقى علينا إثبات أن p فريدة. لنفرض أن $q \in IP_n$ و تحقق $q(x_i) = y_i$ لكل i. عرف $w(x)$ بـ : $w(x) = p(x) - q(x)$. واضح أن $w \in IP_n$. الآن:

$$w(x_i) = p(x_i) - q(x_i) = y_i - y_i = 0, \quad i = 0,1,.....,n$$

إذن w لها على الأقل $n+1$ جذر. هذا لا يمكن إلا إذا كان $w(x) = 0$ لكل x. إذن $p \equiv q$ ، و هذا يثبت أن p فريدة■

الإثبات أعلاه لم يكن فقط إثبات لوجود الحدودية المكملة الفريدة، بل يمكن به إيجاد الحدودية المكملة، بما يعرف بطريقة لاجرانج Lagrange.

2. طريقة لاجرانج للاستكمال

تعرف طريقة لاجرانج لتكميل البيانات :

x_i	x_0	x_1	.....	x_n
$y_i = f(x_i)$	y_0	y_1	.....	y_n

بأنهـا تعمـل علـى إيجـاد الحدوديـة $p \in IP_n$ ، المكملـة للبيانـات، بالـصيغة $p(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i L_{n,i}(x)$ ، حيث $L_{n,i}(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$ لكل i.

الآن، عزيزى الدارس، إليك بعض الأمثلة لتطبيق طريقة لاجرانج:

◄◄ مثال:

اسـتخدم $x_0 = 0.0$ ، $x_1 = 1.2$ لإيجـاد $p \in IP_1$ ، التـى تقـرب $f(x) = \cos x$ بالاستكمال.

الحل:

$$y_0 = \cos 0.0 = 1.000000$$
$$y_1 = \cos 1.2 = 0.362358$$
$$p(x) = y_0 L_{1,0}(x) + y_1 L_{1,1}(x)$$
$$= 1.000000 \frac{x - 1.2}{0.0 - 1.2} + 0.362356 \frac{x - 0.0}{1.2 - 0.0}$$
$$= -0.833333(x - 1.2) + 0.301965x$$

◄◄ **مثال:**

استخدم الجدول التالي لتقريب قيمة $f(0.5)$ باستخدام طريقة لاجرانج.

x_i	1	-1	2
$y_i = f(x_i)$	0	-2	3

الحل:

هنا $n = 2$.

$$L_{2,0}(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} = \frac{(x+1)(x-2)}{(2)(-1)} = \frac{-x^2+x+2}{2}$$

$$L_{2,1}(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} = \frac{(x-1)(x-2)}{(-2)(-3)} = \frac{x^2-3x+2}{6}$$

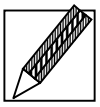
$$L_{2,2}(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} = \frac{(x-1)(x+1)}{(1)(3)} = \frac{x^2-1}{3}$$

إذن $p \in IP_2$ تعطى بـ:

$$\begin{aligned} p(x) &= y_0 L_{2,0}(x) + y_1 L_{2,1}(x) + y_2 L_{2,2}(x) \\ &= (0)\frac{-x^2+x+2}{2} + (-2)\frac{x^2-3x+2}{6} + (3)\frac{x^2-1}{3} \\ &= \frac{2x^2+3x-5}{3} \end{aligned}$$

إذن $f(0.5) \approx p(0.5) = \frac{2(0.5)^2+3(0.5)-5}{3} = -1$

تدريب (1)



كوّن حدودية لاجرانج $p \in IP_1$ لتحسب $p(1.6)$ ، $p(1.8)$ حيث

x	1.1	1.2
y	2.3	3.1

◄◄ مثال:

في إحدى التجارب الكيميائية حصل باحث على المعلومات التالية:

x	-2	0	2
y	4	2	8

فاحسب حدودية مناسبة لتقريب العلاقة بين x و y.

الحل:

نستخدم صيغة لاجرانج لايجاد $y \approx p(x)$ ، حيث $p \in IP_2$.

$$p(x) = (4)\frac{(x-0)(x-2)}{(-2-0)(-2-2)} + (2)\frac{(x-(-2))(x-2)}{(0-(-2))(0-2)} + (8)\frac{(x-(-2))(x-0)}{(2-(-2))(2-0)}$$

$$= (4)\frac{x(x-2)}{8} + (2)\frac{(x+2)(x-2)}{-4} + (8)\frac{x(x+2)}{8} = x^2 + x + 2$$

إذن $y \approx x^2 + x + 2$.

◄◄ مثال:

في المثال السابق حصل الباحث بعد إجراء المزيد من التجارب على معلومات إضافية ليصبح لديه خمسة أزواج من النقاط هي:

x	-2	0	-1	1	2
y	4	2	-1	1	8

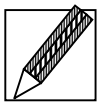
فأوجد الحدودية المناسبة لإيجاد العلاقة التقريبية بين x و y.

الحل:

ستتوصل عزيزي الدارس بعد حسابات مطولة إلى حدودية لاجرانج التالية:

$$y \approx \frac{1}{24}x(x+1)(x-1)(x-2) - \frac{1}{4}(x+2)(x+1)(x-1)(x-2)$$
$$-\frac{1}{6}(x+2)x(x-1)(x-2) - \frac{1}{6}(x+2)x(x+1)(x-2)$$
$$+\frac{1}{24}(x+2)x(x+1)(x-1)$$

تدريب (2)



أعطيت الجدول التالى:

x	-1	0	2	3
y	4	1	0	2

مستخدماً طريقة لاجرانج جد الحدودية المناسبة لتقريب العلاقة بين x و y

◄◄ مثال:

استخدم حدودية لاجرانج لتقريب الدالة $f(x)=e^x$ باستخدام النقاط الثلاث $x_0=0$ ، $x_1=0.5$ و $x_2=1$. ثم أوجد قيمة تقريبية للمقدار $f(0.25)$.

الحل:

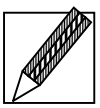
$$p(x)=\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}f(x_0)+\frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}f(x_1)+\frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}f(x_2)$$

بالتعويض المباشر بقيمة $x=0.25$ نحصل على:

$$f(0.25)\approx p(0.25)=\frac{(-0.25)(-0.75)}{(-0.5)(-1)}\left(e^0\right)+\frac{(0.25)(-0.75)}{(0.5)(-0.5)}(e^{0.5})+\frac{(0.25)(-0.25)}{(1)(0.5)}(e^1)$$

$$=0.375000-1.236541+0.339785=1.271756$$

تدريب (3)



باستخدام طريقة لاجرانج أوجد الحدودية فى IP_2 التى تمر بالنقاط (4,5) , (2,1) , (1,8)

3. تحليل الخطأ في التقريب بالاستكمال بالحدوديات

عزيزي الدارس،،

من الضروري معرفة مقدار الخطأ عند تطبيق حدوديات الاستكمال لتقريب الدالة المستمرة $f(x)$. فى الحقيقة لا يمكن معرفة مقدار الخطأ بالضبط، و لكننا سنعمل على إيجاد صيغة للخطأ تعطينا فكرة مفيدة عن الخطأ.

لتكن $p \in IP_n$ الحدودية المقربة لـ f باستخدام البيانات:

x_i	x_0	x_1	.....	x_n
$y_i = f(x_i)$	y_0	y_1	.....	y_n

الخطأ، $E_n(x)$ ، عند تقريب $f(x)$ بـ $p(x)$ يعطى بـ $E_n(x) = f(x) - p(x)$. واضح أن $E_n(x_i) = 0$ لكل i من $i = 0$ إلى $i = n$. المبرهنة التالية تعطى صيغة لـ E_n .

مبرهنة

لتكن $[a,b]$ الفترة المغلقة التى تضم النقاط x_0 ، x_1 ، ..... ، x_n . إذا كانت f قابلة للاشتقاق باتصال فى الفترة $[a,b]$ حتى المشتقة $n+1$ و كانت $t \in [a,b]$ فإن:

$$E_n(t) = \frac{(t-x_0)(t-x_1).....(t-x_n)}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi)$$

حيث $\xi = \xi(t) \in [a,b]$

الإثبات:

عرف الدالة φ بـ $\varphi(x) = (x-x_0)(x-x_1).....(x-x_n)$. و عرف الدالة G بـ :

$$G(x) = E_n(x) - \frac{\varphi(x)}{\varphi(t)} E_n(t) \qquad (2.2)$$

الآن $G(x_i) = E_n(x_i) - \frac{\varphi(x_i)}{\varphi(t)} E_n(t) = 0 - 0 = 0$ ، $i = 0,1,.....,n$. و أيضاً $G(t) = E_n(t) - \frac{\varphi(t)}{\varphi(t)} E_n(t) = E_n(t) - E_n(t) = 0$. إذن G لها على الأقل $n+2$ حذر في $[a,b]$. باستخدام مبرهنة رول فإن $G^{(1)}$ لها على الأقل $n+1$ حذر في $[a,b]$. بصورة عامة $G^{(j)}$ لها على الأقل $n+2-j$ حذر في $[a,b]$, حيث $j = 0.1.....,n+1$. إذن $G^{(n+1)}$ لها على الأقل حذر واحد في $[a,b]$. أي أنه يوجد $\xi \in [a,b]$ بحيث:

$$G^{(n+1)}(\xi) = 0 \qquad (2.3)$$

الآن بتفاضل طرفي (2.2) $n+1$ مرة نحصل على:

$$G^{(n+1)}(x) = E_n^{(n+1)}(x) - \frac{\varphi^{(n+1)}(x)}{\varphi(t)} E_n(t)$$

$$= f^{(n+1)}(x) - \frac{(n+1)!}{\varphi(t)} E_n(t)$$

بالتعويض في (2.3) نحصل على $E_n(t) = \frac{\varphi(t)}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi)$ ■

◄◄ مثال:

ما هو أكبر خطأ مطلق متوقع عند تقريب $f(x) = \sin x$ باستكمال بيانات تقع نقاطها x_0، x_1، ..... x_n في الفترة $[0, \frac{\pi}{2}]$.

الحل

واضح أن $f^{(n+1)}(x) = \pm \sin x$ إذا كانت n فردية و أن $f^{(n+1)}(x) = \pm \cos x$ إذا كانت n زوجية. في الحالتين نجد أن $\left|f^{(n+1)}(x)\right| \le 1$، لكل $x \in [0, \frac{\pi}{4}]$. إذن:

$$|E_n(t)| = \left| \frac{(t-x_0).....(t-x_n)}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi) \right|$$
$$= \frac{|t-x_0|.....|t-x_n|}{(n+1)!} \left| f^{(n+1)}(\xi) \right|$$
$$\leq \frac{\left(\frac{\pi}{4}\right)^{n+1}}{(n+1)!} \times 1$$

أسئلة تقويم ذاتي



1- حدد متى تستكمل الدالة p الدالة f عند نقاط محددة.

2- اكتب صيغة حدودية لاجرانج، واشرح كيف توصلنا إلى تلك الصيغة.

3- علل لماذا تكون حدودية لاجرانج من الدرجة الأولى على شكل خط مستقيم؟

5- أعد كتابة مبرهنة التقريب باستخدام الحدوديات.

4. طريقة نيوتن للفروق المقسومة

Newton Divided Difference Method

1.4 تمهيد

عزيزي الدارس،،،

نلاحظ أنه عند تكميل البيانات:

x_i	x_0	x_1	.....	x_k
$y_i = f(x_i)$	y_0	y_1	.....	y_k

باستخدام طريقة لاجرانج فإننا نقوم بإيجاد $L_{k,0}(x)$ ، $L_{k,1}(x)$ ، ..... ، $L_{k,k}(x)$ أولاً ثم نحصل على $p_k(x)=\sum_{i=0}^{k} y_i L_{k,i}(x)$. فإذا أضيفت النقطة (x_{k+1}, y_{k+1}) لتلك البيانات فإننا نكرر نفس المحهود لإيجاد $p_{k+1}(x)=\sum_{i=0}^{k+1} y_i L_{k+1,i}(x)$ ، دون الاستفادة من $p_k(x)$. من هنا جاءت فكرة طريقة نيوتن للفروق المقسومة. فهى بنيت أساساً على كيفية إيجاد $p_{k+1}(x)$ من $p_k(x)$. فبمعرفة $p_0(x)=y_0$ يمكن إيجاد $p_1(x)$ و من ثم إيجاد $p_2(x)$ و هكذا إلى الحصول على $p_n(x)$ ، الحدودية المكملة للبيانات المعطاة.

يتم إيجاد $p_{k+1}(x)$ من $p_k(x)$ بالآتى:

ضع $p_{k+1}(x)=p_k(x)+\psi(x)$.الآن $p_k(x_i)=p_{k+1}(x_i)=y_i$ ، $i=0,1,.....,k$.

إذن: $y_i=y_i+\psi(x_i)$ ، $i=0,1,.....,k$. عليه فإن:

$$\psi(x_i)=0, \quad i=0,1,.....,k$$

إذن $\psi(x) = c_{0,k+1}(x-x_0)(x-x_1).....(x-x_k)$، حيث $c_{0,k+1}$ ثابت، و ذلك لأن $p_{k+1} \in IP_{k+1}$. إذن $p_{k+1}(x) = p_k(x) + c_{0,k+1}(x-x_0)(x-x_1).....(x-x_k)$.
يمكننا الحصول على الثابت $c_{0,k+1}$ بـ:

$$y_{k+1} = p_{k+1}(x_{k+1}) = p_k(x_{k+1}) + c_{0,k+1}(x_{k+1}-x_0)(x_{k+1}-x_1).....(x_{k+1}-x_k)$$

إذن $$c_{0,k+1} = \frac{y_{k+1} - p_k(x_{k+1})}{(x_{k+1}-x_0)(x_{k+1}-x_1).....(x_{k+1}-x_k)}$$

عليه يمكننا إيجاد $p_{k+1}(x)$ من $p_k(x)$ بإضافة الحد $c_{0,k+1}(x-x_0)(x-x_1).....(x-x_k)$، كما يوضح المثال التالى:

◄◄ مثال:

جد الحدوية $p_2 \in IP_2$ التى تكمل البيانات:

x_i	1	2	3
y_i	1	4	9

استخدم p_2 لإيحاد p_3 التى تكمل البيانات:

x_i	1	2	3	4
y_i	1	4	9	2

الحل

باستخدام طريقة لاحرانج يمكن الوصول إلى أن $p_2(x) = x^2$. الآن

$p_3(x) = p_2(x) + c_{0,3}(x-1)(x-2)(x-3)$ ، حيث:

$$c_{0,3} = \frac{y_3 - p_2(x_3)}{(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2)}$$
$$= \frac{2-(4)^2}{(4-1)(4-2)(4-3)} = \frac{-14}{(3)(2)(1)} = -\frac{7}{3}$$

إذن $p_3(x) = x^2 - \frac{7}{3}(x-1)(x-2)(x-3)$

لنعد الآن لطريقة نبوتن لاستكمال البيانات: $(x_0, f(x_0))$، $(x_1, f(x_1))$، ..... ، $(x_n, f(x_n))$.

الحدودية $p_0(x) = c_{0,0} = f(x_0)$ تكمل $(x_0, f(x_0))$.

الحدودية $p_1(x) = p_0(x) + c_{0,1}(x - x_0)$، حيث $c_{0,1} = \frac{f(x_1) - p_0(x_1)}{(x_1 - x_0)}$، تكمل البيانات $(x_0, f(x_0))$، $(x_1, f(x_1))$.

لاحظ أن $p_1(x) = c_{0,0} + c_{0,1}(x - x_0)$.

الحدودية $p_2(x) = p_1(x) + c_{0,2}(x - x_0)(x - x_1)$، حيث $c_{0,2} = \frac{f(x_2) - p_1(x_2)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)}$، تكمل البيانات $(x_0, f(x_0))$، $(x_1, f(x_1))$، $(x_2, f(x_2))$.

لاحظ أن $p_2(x) = c_{0,0} + c_{0,1}(x - x_0) + c_{0,2}(x - x_0)(x - x_1)$.

و هكذا لنصل إلى أن الحدودية، p_n، المطلوبة تعطى بـ:

$$p_n(x) = c_{0,0} + c_{0,1}(x - x_0) + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + c_{0,n}(x - x_0)(x - x_1)\ldots\ldots(x - x_{n-1})$$

حبث $c_{0,k}$، لكل k، تعطى بـ:

$$c_{0,k} = \frac{f(x_k) - p_{k-1}(x_k)}{(x_k - x_0)(x_k - x_1)\ldots\ldots(x_k - x_{k-1})} \qquad (2.4)$$

ما يجب ملاحظته هنا أن $c_{0,k}$ هو معامل x^k فى الحدودية $p_k(x)$، و يعتمد فى إيجاده على x_0، x_1، ..... ، x_k و على قيم الدالة عند تلك النقاط، مما يجعلنا نرمز لـ $c_{0,k}$ بـ: $c_{0,k} = f[x_0, x_1, \ldots\ldots, x_k]$، و يسمى بالفرق المقسوم من الرتبة k لـ f عند x_0، x_1، ..... ، x_k.

الآن يمكننا كتابة $p_n(x)$ باستخدام الفروق المقسومة كما يلى:

$$p_n(x) = f[x_0] + f[x_0, x_1](x - x_0) + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + f[x_0, x_1, \ldots\ldots, x_n](x - x_0)(x - x_1)\ldots\ldots\ldots(x - x_{n-1}) \qquad (2.5)$$

وهذا ما يعرف بصيغة نيوتن للفروق المقسومة. لكى نتمكن من وصف أسهل لخوارزمية للتحسيب بهذه الطريقة سندرس، بشئ من التفصيل، الفروق المقسومة.

2.4 الفروق المقسومة

من التمهيد، يرمز للفرق المقسوم ذى الرتبة k للدالة f عند النقاط x_r ، x_{r+1} ،...، x_{r+k} بـ $f[x_r, x_{r+1}, \ldots\ldots, x_{r+k}]$ و هو معامل x^k فى الحدودية $p_k \in IP_k$ ، المكملة للبيانات:

x_i	x_r	x_{r+1}	.....	x_{r+k}
$y_i = f(x_i)$	y_r	y_{r+1}	.....	y_{r+k}

أول ملاحظة جديرة بالاهتمام هى أن معامل x^k لا يتغير بتغير ترتيب البيانات فى الجدول، مما ينتج عنه $f[x_r, x_{r+1}, \ldots\ldots, x_{r+k}] = f[x_{i_0}, x_{i_1}, \ldots\ldots, x_{i_k}]$ ، حيث $i_0, i_1, \ldots, i_k$ تبديلة لـ $r, r+1, \ldots, r+k$. أى أن ترتيب النقاط لا يغير من قيمة الفرق. فمثلاً $f[2,5,7] = f[5,2,7] = f[7,2,5]$.

جدول الفروق المقسومة للدالة f عند النقاط x_0 ، x_1 ، ... ، x_n يعرف بـ:

x_i	$f[x_i]$	$f[x_i, x_{i+1}]$	$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}]$	.....	$f[x_i, x_{i+1}, \ldots\ldots, x_{i+n}]$
x_0	$f[x_0]$	$f[x_0, x_1]$	$f[x_0, x_1, x_2]$	.....	$f[x_0, x_1, \ldots\ldots, x_n]$
x_1	$f[x_1]$	$f[x_1, x_2]$	$f[x_1, x_2, x_3]$		
x_2	$f[x_2]$	$f[x_2, x_3]$	$f[x_2, x_3, x_4]$		
.	.	.	.		
.	.	.	.		
x_{n-2}	$f[x_{n-2}]$	$f[x_{n-2}, x_{n-1}]$	$f[x_{n-2}, x_{n-1}, x_n]$		
x_{n-1}	$f[x_{n-1}]$	$f[x_{n-1}, x_n]$			
x_n	$f[x_n]$				

الجدول يتكون من $n+2$ عمود. الأول يحوى النقاط، الثانى يحوى الفروق المقسومة ذات الرتبة الصفرية و عددها $n+1$، الثالث يحوى الفروق المقسومة ذات الرتبة الأولى و عددها n، الرابع يحوى الفروق المقسومة ذات الرتبة الثانية و عددها $n-1$، و هكذا ..، الأخير يحوى الفرق المقسوم (الوحيد) ذا الرتبة n. لاحظ أن الفروق المقسومة الموجودة فى الصف الأول هى معاملات صيغة نيوتن للفروق المقسومة. يستفاد من الجدول فى إيجاد تلك الفروق لاستخدامها فى طريقة نيوتن للفروق المقسومة.

◄◄ مثال:

أكتب جدول الفروق المقسومة للدالة f عند النقاط x_0، x_1، x_2، x_3

الحل:

الجدول هو:

x_i	$f[x_i]$	$f[x_i,x_{i+1}]$	$f[x_i,x_{i+1},x_{i+2}]$	$f[x_i,x_{i+1},x_{i+2},x_{h+3}]$	$f[x_i,x_{i+1},x_{i+2},x_{h+3},x_{h+4}]$
x_0	$f[x_0]$	$f[x_0,x_1]$	$f[x_0,x_1,x_2]$	$f[x_0,x_1,x_2,x_3]$	$f[x_0,x_1,x_2,x_3,x_4]$
x_1	$f[x_1]$	$f[x_1,x_2]$	$f[x_1,x_2,x_3]$	$f[x_1,x_2,x_3,x_4]$	
x_2	$f[x_2]$	$f[x_2,x_3]$	$f[x_2,x_3,x_4]$		
x_3	$f[x_3]$	$f[x_3,x_4]$	.		
x_4	$f[x_4]$	.	.		

المبرهنة التالية تستخدم فى إيجاد جدول الفروق المقسومة.

مبرهنة

إذا كان $r \le s$ فإن:

$$f[x_r, x_{r+1}.....,x_s, x_{s+1}] = \frac{f[x_{r+1},.....,x_{s+1}] - f[x_r,.....,x_s]}{x_{s+1} - x_r}$$

الإثبات

لنفرض أن $p_{r,s} \in IP_{s-r}$ تكمل بيانات الدالة f عند x_r، x_{r+1}، ..... ، x_s و أن $p_{r+1,s+1} \in IP_{s-r}$ تكمل بيانات الدالة f عند x_{r+1}، ..... ، x_{s+1}. إذن:

$$p_{r,s}(x_r) = f(x_r)$$
$$p_{r,s}(x_i) = p_{r+1,s+1}(x_i) = f(x_i); \quad i = r+1, r+2, ..., s$$
$$p_{r+1,s+1}(x_{s+1}) = f(x_{s+1})$$

يمكن بسهولة إثبات أن الحدودية $p_{r,s+1} \in IP_{s+1-r}$ المعرفة بـ:

$$p_{r,s+1}(x) = \frac{(x - x_r)p_{r+1,s+1}(x) - (x - x_{s+1})p_{r,s}(x)}{x_{s+1} - x_r}$$

تكمل بيانات الدالة f عند x_r، x_{r+1}، ..... ، x_s، x_{s+1}. معامل x^{s+1-r} فى الطرف الأيسر هو $f[x_r, x_{r+1}, ..., x_s, x_{s+1}]$ و معامل x^{s+1-r} فى الطرف الأيمن هو $\frac{f[x_{r+1}, ..., x_{s+1}] - f[x_r, ..., x_s]}{x_{s+1} - x_r}$ (تأكد من ذلك بنفسك). بتساوى المعاملين نحصل على المطلوب■

المبرهنة السابقة تعطى الصيغة التى تمكننا من إيجاد الفروق المقسومة فى الجدول من الفروق المقسومة ذات الرتب التى تقل عنها بواحد. فمثلاً

$$f[x_0, x_1] = \frac{f[x_1] - f[x_0]}{x_1 - x_0} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$

$$f[x_2, x_3, x_4] = \frac{f[x_3, x_4] - f[x_2, x_3]}{x_4 - x_2}$$

◄◄ مثال:

جد $f[3,4,6]$ إذا كان

x_i	0	1	3	4	6	7
$f(x_i)$	2	4	5	4	-3	3

الحل:

$$f[3,4,6]=\frac{f[4,6]-f[3,4]}{6-3}=\frac{1}{3}\left(\frac{f[6]-f[4]}{6-4}-\frac{f[4]-f[3]}{4-3}\right)$$
$$=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\left(f(6)-f(4)\right)-\left(f(4)-f(3)\right)\right)$$
$$=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\left(-3-4\right)-\left(4-5\right)\right)=-\frac{5}{6}$$

◄◄ مثال:

جد جدول الفروق المقسومة للبيانات :

x_i	0	1	3	4
$f(x_i)$	2	4	5	4

الحل:

0	2	2	$-\frac{1}{2}$	0
1	4	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	
3	5	-1		
4	4			

تفاصيل الحل:

العمودان الأول و الثانى يتم الحصول عليهما مباشرة من البيانات. العمود الثالث، و يمثل الفروق المقسومة ذات الرتبة الأولى و يتم الحصول عليها، بالترتيب، كما يلى:

$\frac{4-2}{1-0}=2$ ، $\frac{5-4}{3-1}=\frac{1}{2}$ ، $\frac{4-5}{4-3}=-1$.

العمود الرابع يمثل الفروق المقسومة ذات الرتبة الثانية، و تفاصيلها:

$\frac{\frac{1}{2}-2}{3-0}=-\frac{1}{2}$ ، $\frac{-1-\frac{1}{2}}{4-1}=-\frac{1}{2}$.

أما العمود الأخير فيعطى الفرق الوحيد ذا الرتبة الرابعة و قيمته $\frac{-\frac{1}{2}-(-\frac{1}{2})}{4-0}=0$.

◄◄ مثال:

استخدم طريقة نيوتن للفروق المقسومة لاستكمال البيانات فى المثال السابق.

الحل:

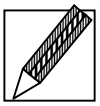
من الصيغة فى (2.5):

$$p_3(x)=f[x_0]+f[x_0,x_1](x-x_0)+f[x_0,x_1,x_2](x-x_0)(x-x_1)$$
$$+f[x_0,x_1,x_2,x_3](x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)$$

و من جدول الفروق المقسومة:

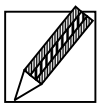
$$p_3(x)=(2)+(2)(x-0)+(-\tfrac{1}{2})(x-0)(x-1)+(0)(x-0)(x-1)(x-3)$$
$$=2+2x-\tfrac{1}{2}x(x-1)$$

تدريب (4)



أوجد الفروق المقسومة للدالة $f(x)=x^2+x+2$ عند النقاط -1، 1، 3، 6.

لتدريب (5)



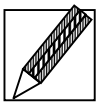
(أ) استخدم طريقة نيوتن للفروق المقسومة للاستكمال لإيجاد $y(6)$

x	1	2	7	8
y	1	5	5	4

(ب) استخدم طريقة نيوتن للفروق المقسومة للاستكمال للجدول التالي لإيجاد $y(0)$.

x	-1	1	2	3
y	-21	15	12	3

التدريب (6)



(أ) اكتب حدودية نيوتن للجدول التالي:

x	-1	0	1
y	-2	3	2

(ب) اكتب حدودية نيوتن للجدول التالي:

x	0	1	2	3
y	0	1	0	-1

أسئلة تقويم ذاتي



1- بماذا تتميز طريقة الفروق المقسومة عن طريقة لاجرانج؟

2- اكتب الصيغة العامّة للفروق المقسومة.

3- عدد ميزات استخدام طريقة نيوتن للفروق المقسومة.

5. الاستكمال على فترات متساوية

عزيزي الدارس،

لاحظت في القسمين السابقين أننا أجرينا الاستكمال على نقاط قد لا تبتعد مسافات متساوية عن بعضها البعض، ولنفرض هنا أن x_0، x_1، ....، x_n تبتعد عن بعضها بمسافة ثابتة h أي أن: $x_{i+1} - x_i = h; i = 1,2,.....,n-1$. سنتطرق إلى الفروق المتقدمة.

1.5 الفروق المتقدمة

تعريف:

لتكن h ثابتة. مؤثر الفروق المتقدمة (Forward difference operator)، ويرمز له بالرمز Δ، المؤثر على الدالة f يعرف بـ $\Delta f(x) = f(x+h) - f(x)$

الفرق $\Delta f(x)$ يعرف بالفرق المتقدم لت f ذى الرتبة الأولى. يمكن تعريف الفرق المتقدم ل f ذى الرتبة k بـ: $\Delta^k f(x) = \Delta(\Delta^{k-1} f(x))$، $k = 2,3,.....$. من هنا يمكننا كتابة:

$$\Delta f(x) = f(x+h) - f(x)$$

$$\Delta^2 f(x) = \Delta(f(x+h) - f(x))$$

$$= (f(x+2h) - f(x+h)) - (f(x+h) - f(x))$$

$$= f(x+2h) - 2f(x+h) + f(x)$$

$$\Delta^3 f(x) = \Delta(f(x+2h) - 2f(x+h) + f(x))$$
$$= f(x+3h) - 3f(x+2h) + 3f(x+h) - f(x)$$

بصورة عامة يمكن الوصول إلى:

$$\Delta^k f(x) = \sum_{i=0}^{k} (-1)^i \binom{k}{i} f(x + (k-i)h) \qquad (2.6)$$

حيث $\binom{k}{i} = \frac{k(k-1).....(k-i+1)}{i!}$

يعرف جدول الفروق المتقدمة للدالة $f(x)$ عند النقاط x_0، x_1، ....، x_n، حيث $x_{i+1} - x_i = h; i = 1,2,.....,n-1$ بـ:

f_i	Δf_i	$\Delta^2 f_i$	.....	$\Delta^n f_i$
f_0	Δf_0	$\Delta^2 f_0$		$\Delta^n f_0$
f_1	Δf_1	$\Delta^2 f_1$		$\therefore$
f_2	Δf_2	$\Delta^2 f_2$		
f_3	Δf_3	$\Delta^2 f_3$		
$\vdots$	$\vdots$	$\therefore$		
f_{n-1}	Δf_{n-1}			
f_n				

حيث $f_i = f(x_i)$.

◄◄ مثال

اكتب جدول الفروق المتقدمة للدالة f عند النقاط x_0 ، x_1 ، .... ، x_4

الحل

f_0	Δf_0	$\Delta^2 f_0$	$\Delta^3 f_0$	$\Delta^4 f_0$
f_1	Δf_1	$\Delta^2 f_1$	$\Delta^3 f_1$	
f_2	Δf_2	$\Delta^2 f_2$		
f_3	Δf_3			
f_4				

◄◄ مثال

جد جدول الفروق المتقدمة للبيانات:

x_i	1	2	3	4	5
f_i	3	−2	4	7	8

الحل

3	−5	11	−14	13
−2	6	−3	−1	
4	3	−4		
7	−1			
8				

◄◄ مثال:

اكتب جدول الفروق للحدودية $p(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 3$ عند النقاط $x = 2,4,6,8,10$.

الحل

p_i	Δp_i	$\Delta^2 p_i$	$\Delta^3 p_i$	$\Delta^4 p_i$
3	6	48	48	0
9	54	96	48	
63	150	144		
213	294			
507				

المبرهنة التالية تعطى العلاقة بين الفروق المقسومة و الفروق المتقدمة للدالة $f(x)$ عند النقاط x_0 ، x_1 ، .... ، x_n.

مبرهنة

$$f[x_0, x_1, ..., x_n] = \frac{\Delta^n f_0}{h^n n!}$$

الإثبات:

نثبت المبرهنة بالاستقراء الرياضى. النتيجة صحيحة عند $n = 1$ لأن

$$f[x_0, x_1] = \frac{f_1 - f_0}{x_1 - x_0} = \frac{\Delta f_0}{h} = \frac{\Delta^1 f_0}{h^1 1!}$$

نفرض صحة النتيجة عند $n=k$. أى $f[x_0,x_1,.....,x_k]=\frac{\Delta^k f_0}{h^k k!}$ و أيضاً $f[x_1,x_1,.....,x_{k+1}]=\frac{\Delta^k f_1}{h^k k!}$. الآن:

$$f[x_0,x_1.....,x_k,x_{k+1}]=\frac{f[x_1,.....,x_{k+1}]-f[x_0,.....,x_k]}{x_{k+1}-x_0}$$

$$=\frac{\frac{\Delta^k f_1}{h^k k!}-\frac{\Delta^k f_0}{h^k k!}}{(k+1)h}=\frac{\Delta^k f_1-\Delta^k f_0}{h^{k+1}(k+1)!}=\frac{\Delta^{k+1} f_0}{h^{k+1}(k+1)!}$$

إذن النتيجة صحيحة لـ $n=k+1$ ■

الآن يمكننا تعريف صيغة نيوتن للقروق المتقدمة. هذه الطريقة تعرف فقط عندما تكون النقاط متساوية البعد.

2.5 صيغة نيوتن للفروق المتقدمة

بتطبيق نتيجة المبرهنة (2.4) فى صيغة نيوتن للفروق المقسومة (2.5) نحصل على:

$$p_n(x)=f_0+\frac{\Delta f_0}{h}(x-x_0)+\frac{\Delta^2 f_0}{h^2 2!}(x-x_0)(x-x_1)+.....+\frac{\Delta^n f_0}{h^n n!}(x-x_0)(x-x_1).....(x-x_{n-1}) \quad (2.7)$$

الآن ضع $x=x_0+uh$. إذن $x-x_j=x-x_0-(x_j-x_0)=(u-j)h$. عليه فإن:

$$\begin{aligned}
x-x_0 &= uh \\
(x-x_0)(x-x_1) &= uh\times(u-1)h = u(u-1)h^2 \\
(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2) &= uh\times(u-1)h\times(u-2)h = u(u-1)(u-2)h^3 \\
&\vdots \quad \vdots \quad \vdots
\end{aligned}$$

بصورة عامة $(x-x_0)(x-x_1).....(x-x_{k-1})=u(u-1)(u-2).....(u-k+1)h^k$.

الآن، بوضع $x(u)=x_0+uh$ ، يمكننا كتابة (2.7) بالصورة:

$$p_n(x(u)) = f_0 + \frac{\Delta f_0}{h}uh + \frac{\Delta^2 f_0}{h^2 2!}u(u-1)h^2 + \ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$+ \frac{\Delta^n f_0}{h^n n!}u(u-1)\ldots\ldots\ldots(u-n+1)h^n$$

أو

$$p_n(x(u)) = f_0 + \Delta f_0 u + \frac{\Delta^2 f_0}{2!}u(u-1) + \ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$+ \frac{\Delta^n f_0}{n!}u(u-1)\ldots\ldots\ldots(u-n+1)$$

أو

$$\boxed{p_n(x(u)) = f_0 + \sum_{i=1}^{n}\binom{u}{i}\Delta^i f_0} \qquad (2.8)$$

حيث $\binom{u}{i} = \frac{u(u-1)\ldots\ldots\ldots(u-i+1)}{i!}$. (2.8) تعرف بصيغة نيوتن للفروق المتقدمة. لتطبيق الصيغة (2.8) نستخدم الصف الأول فى حدول الفروق المتقدمة للدالة $f(x)$.

◄◄ مثال:

أوجد قيمة تقريبية للمقدار $e^{1.2}$ باستخدام صيغة نيوتن للفروق المتقدمة مستخدماً النقاط $x = 1, 1.5, 2, 2.5$.

الحل:

$1.2 = x_0 + uh = 1 + 0.5h$. إذن $u = 0.4$. جدول الفروق المتقدمة هو:

f_i	Δf_0	$\Delta^2 f_0$	$\Delta^3 f_0$
2.7183	1.7634	1.1440	0.7421
4.4617	2.9074	1.8861	
7.3891	4.7934		
12.1825			

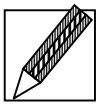
الآن $p_3(x(u)) = f_0 + \sum_{i=1}^{3} \binom{u}{i} \Delta^i f_0$ تكمل البيانات. عند $x = 1.2$، و التى تقابل $u = 0.4$ نحصل على:

$$e^{1.2} \approx p_3(1.2) = \left[f_0 + \Delta f_0 u + \frac{\Delta^2 f_0}{2!} u(u-1) + \frac{\Delta^3 f_0}{3!} u(u-1)(u-2) \right]_{u=0.4}$$

$$= [2.7183 + 1.7634(0.4) + 1.1440(0.4)(-0.6) + 0.7421(0.4)(-0.6)(-1.6)]$$

$$= 3.3339$$

تدريب (7)



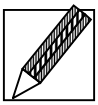
(أ) جد جدول الفروق المقسومة للاقتران $f(x) = x^2 e^{-\frac{x}{2}}$ ، و ذلك عند النقاط:

1.10، 2.00، 3.50، 5.00

(ب) استخدم الفروق المتقدمة لحساب قيمة تقريبية لكل من $f(1.1)$ و $f(1.95)$ مستخدماً الجدول

x	1	1.2	1.4	1.6	1.8	2
$f(x)$	0.0	0.1813	0.3302	0.4529	0.5545	0.6390

التدريب (8)



(أ) الجدول التالي يمثل:

x	45	50	55	60	65
y	114.84	96.16	83.32	74.48	68.48

أوجد قيمة y عند $x = 46$, $x = 63$

(ب) انظر الجدول التالي:

الحرارة(T)	140	150	160	170	180
الضغط(P)	3.685	4.854	6.302	8.076	10.225

أوجد الضغط عندما تكون الحرارة $T = 142$, $T = 175$

◄◄ مثال:

(أ) اكتب خوارزمنية لاجرانج للاستكمال.

(ب) اكتب خوارزمية نيوتن للاستكمال.

الحل:

(أ)

1. *Input* $\{x_i, f_i\}$ *and* x^*
2. $y^* = 0$
3. *For* $i = 1, 2, \ldots, n-1$,
   - 3.1 $p \leftarrow 1$
   - 3.2 *For* $j = 1, 2, \ldots, n+1$,
     - *if* $j \neq i$,
       - $p \leftarrow p(x^* - x_j)/(x_i - x_j)$;
       - $y^* \leftarrow y^* + f_i p$
4. *Output* $\{x^*, y^*\}$

(ب)

To compute $f[x_1, \ldots x_k]$, $k - 1, 2, \ldots, n+1$:

1. *Input* $\{x_i, f_i\}$, $i = 1, \ldots, n+1$
2. *For* $j = 1, 2, \ldots, n+1$

   $d_i \leftarrow f_j$.
3. *For* $k = 1, 2, \ldots, n$

   For $j = n \quad 1, n, \ldots, k \mid 1$

   $d_j \leftarrow (d_j - d_{j-1})/(x_i - x_{j-k})$
4. *Output* $\{d_i\}$, $i = 1, 2, \ldots, n+1$.

أسئلة تقويم ذاتي



1- عرّف: الفروق المتقدمة.

2- ماذا نعني بالفروق من الرتبة الأولى والثانية والثالثة، وكيف نستخرجها؟

3- اكتب صيغة حدودية نيوتن للفروق المتقدمة للاستكمال، واشرح كيف توصلنا إليها.

الخلاصة

عزيزي الدارس،،،

في نهاية هذه الوحدة دعنا نقوم معاً بتلخيص أهم ما ورد فيها من نقاط.

- الاستكمال يستخدم فى تقريب الدوال .
- شرحنا بعد ذلك الحدوديات و أهميتها فى الاستكمال.
- بدأنا بصيغة لاجرانج، و قمنا بإجراء أمثلة عليها.
- تناولنا بعد ذلك عملية التقريب باستخدام الاستكمال، وضربنا عدّة أمثلة على عمليّة التقريب للدوال، وكيفيّة تحليل الخطأ في هذه الحالة.
- عرفنا الفروق المقسومة، و برتبها المختلفة.
- انتقلنا بعد ذلك إلى حدودية نيوتن (حدودية الفروق المقسومة)، و عرفنا كيف يمكن ايجادها باستخدام جدول الفروق المقسومة.
- و أخيراً تناولنا الاستكمال على فترات متساوية، واستعرضنا مؤثر الفروق المتقدمة (Δ)، و من ثم قمنا بالتعريف بطريقة نيوتن للفروق المتقدمة.
- وحتى نضمن توضيح الأفكار الواردة فقد عرضنا عدداً كبيراً من الأمثلة المحلولة، والتدريبات التي ستساهم بكل تاكيد في توضيح الأفكار الواردة بشكل جلي.

لمحة مسبقة عن الوحدة الدراسيّة التالية

عزيزي الدارس،،،

تبحث الوحدة الثالثة في التكاملات العددية والتفاضل العددي، وسنبدأ بأهمية التكاملات العددية وطرق مختلفة لحسابها وأهم المزايا والمساوئ لكل طريقة ومدى دقة تلك الطرق، كذلك سنعرّج على التفاضل العددي والطرق العددية المختلفة لحله.

نأمل أن تكون وحدة مفيدة لك.

المراجع

- Kincaid and Cheney, **Numerical Analysis: Mathematics of Scientific Computing**. 3rd ed., 2002.
- Schilling and Harris, **Applied Numerical Methods for Engineers: Using Matlab and C**. 1st ed., 2000.
- Atkinson and Han, **Elementary Numerical Analysis**. 3rd ed., 2004
- Mathews and Fink, **Numerical Methods Using Matlab**. 4th ed., 2004.
- Faires and Burden, **Numerical Methods**. 3rd ed., 2003.
- Epperson, **An Introduction to Numerical Methods and Analysis**. 1st ed., 2002.
- Hornbeck, **Numerical Methods**. 1st ed., 1975.
- Acton, **Numerical Methods that *Usually* Work**. 1st ed., 1970.
- Burden and Faires, **Numerical Analysis**. 8th ed., 2005.
- J. H. Ahlberg et al., **The Theory of Splines and Their Applications, Math. in Sci. and Eng**. 38, Acad. Press, 1967.
- Philip J. Davis, **Interpolation and Approximation**, Dover, 1963.
- C. de Boor, **A Practical Guide to Splines, Appl. Math. Sci. 27**, Springer-Verlag, 1978.
- G. G. Lorentz, **Approximation of Functions**, 2nd ed., Chelsea, 1986.
- T. J. Rivlin, **An Introduction to the Approximation of Functions**, Dover [reprint], 1981.


الوحدة الثالثة
التكامل والتفاضل
العددي

محتويات الوحدة

الموضوع	الصفحة
المقدمة	**77**
تمهيد	77
أهداف الوحدة	79
1. التكامل العددي	**80**
1.1 طرق نيوتن كوتكس	**80**
2.1 قاعدة سمبسون	**83**
3.1 قوانين نيوتن كوتس المركبة	**88**
4.1 صيغة سمبسون المركبة	**90**
5.1 تكاملات رومبيرج	**95**
3. التفاضل العددي	**100**
1.3 حساب الفروق المنتهية	100
2.3 استخدام متسلسلة تايلر	101
3.3 أفضل اختيار للقيمة h	107
4.3 صيغة الثلاث نقاط لتقريب لمشتقة الثانية	111
5.3 استكمال ريتشاردسون	113
4. أمثلة عامة على الوحدة	**118**
الخلاصة	**129**
لمحة مسبقة عن الوحدة الدراسية التالية	**131**
إجابات التدريبات	**132**
مسرد المصطلحات	**139**
المراجع	**140**

المقدمة

تمهيد

عزيزي الدارس،

مرحبا بك إلى الوحدة الثالثة من مقرر التحليل العددي، والتي سنتناول خلالها موضوع "التكاملات والتفاضلات العددية".

ربما يكون موضوع التكامل مألوفا لك في مراحل دراستك السابقة، إلاّ أننا سنظهر في هذه الوحدة أهميّة إيجاد حلول عددية للتكاملات، وسنركز على التكاملات ذات المتغيّر الواحد، وسنعرض الموضوع عبر ستة أقسام رئيسة، ثم ننتقل بعد ذلك إلى موضوع التفاضل العددي في القسم السابع.

وجدنا أن أنسب مدخل لهذه الوحدة أن نبدأ بشرح طريقة نيوتن كوتس في إيجاد التكامل العددي، حيث تمثل هذه الطريقة ركنا أساسيا للإحاطة بموضوع الوحدة، ثم انتقلنا في القسم الثاني إلى استعراض طريقة محدة من تلك الطرق، ألا و هى قاعدة سمبسون وتعريفها وبعض الأمثلة عليها، وعند نهاية هذا القسم ستجد نفسك قادرا على الغوص بعمق في قسمين مشابهين لما سبق ولكن بمستوى أعلى، فالقسم الثالث يعتمد على القسم الأول، ويتناول قوانين نيوتن كوتس المركبة، والقسم الرابع يستعرض طريقة سمبسون المركبة.

في القسم الخامس نتناول تكاملات رومبيرج، ونشرحها شرحا وافيا مع ما يلزم ذلك من أمثلة، ثم ننتقل إلى تكاملات جاوس في القسم السادس، وبالتالي ننتهي من التكامل العددي، ونكون جاهزين للانتقال إلى القسم الأخير المتعلق بالتفاضل العددي.

سنتناول في القسم الأخير كيفية حساب الفروق المنتهية، واستخدام متسلسلة تايلر في هذا السياق، وكيف نستخدم صيغة النقاط الثلاث لتقريب المشتقة الثانية، وأخيرا استكمال ريتشاردسون.

وتكمن أهميّة هذه الوحدة في أنها تقدم حلولاً عددية لتكاملات يصعب معالجتها بالطرق التحليلية العادية، ويعتبر التحليل العددي الأسلوب الأمثل للتعامل معها. وقد

زودناك عزيزي الدارس بكل ما يلزم من امثلة وشروحات واشكال ستساهم بإذن الله في تقريب الصور المجردة إلى ذهنك ليسهل التعامل معها بيسر.

نأمل أن تعزز فهمك للموضوعات الواردة في الوحدة عبر الرجوع إلى بعض المراجع الواردة في نهاية كل وحدة، وهو ما سيؤهلك للاستدراك على بعض ما ورد في الوحدة من نقص هو من صفة البشر، فنأمل عندئذ أن لا تبخل علينا بأي نصح يساهم في إنضاج الوحدة وتطويرها مستقبلا. ومرحبا بك مرة أخرى.

أهداف الوحدة



عزيزي الدارس،

بعد فراغك من دراسة هذه الوحدة ينبغي أن تكون قادراً على أن:

- ⌘ **تشرح** أهميّة التكامل العددي والتفاضل العددي.
- ⌘ **تحل** مسائل على طرق التكامل العددي، وخصوصاً طريق نيوتن كوتس.
- ⌘ **تشرح** معنى قاعدة سمبسون، وتحل مسائل عليها.
- ⌘ **تعدد** قوانين نيوتن كوتس المركبة، وتشرح علاقتها بطريقة شبه المنحرف المركبة.
- ⌘ **تشرح** مفهوم تكامل رومبيرج، وتحل مسائل عليه.
- ⌘ **تعطي** أمثلة على تكاملات جاوس.
- ⌘ **تشرح** مفهوم التفاضل العددي وكيفية حساب الفروق المنتهية.
- ⌘ **تستخدم** متسلسلة تايلر في حساب التفاضلات العددية.
- ⌘ **تحل** مسائل على صيغ الثلاث نقاط والخمس نقاط لتقريب المشتقة الثانية.
- ⌘ **تشرح** مفهوم استكمال ريتشاردسون وتحل مسائل عليه.

1. التكامل العددي

عزيزي الدارس،،

إن حساب التكامل بطرق عددية من العمليات المهمة في الرياضيات، حيث تقضي دراسة مواد التفاضل والتكامل (Calculus) وقتاً طويلا لتعلم طرق ومهارات حساب هذا التكامل. وتكمن الحاجة لتعلم المهارات اللازمة لتقديم حلول عددية للتكاملات في الاستفادة من تلك المهارات في حل المعادلات التفاضلية والتكاملية. كذلك تكمن أهمية دراسة التكامل العددي في إيجاد حلول تقريبية لتكاملات معقدة لا يمكن حلها بسهولة بالطرق التحليلية الاعتيادية، ومثال ذلك التكامل $\int_a^b e^{-x^2}\,dx$ الذي لا يمكن حله بسهولة.

حالات أخرى تلزمنا في حساب التكامل بطرق عددية وليس بطرق تحليلية هي وجود بيانات مجدولة فقط عن الدالة المراد حساب تكاملها و دون معرفة بصيغة مباشرة للدالة.

1.1 طرق نيوتن كوتس (Newton - Cotes Methods)

عزيزي الدارس،

هذه مجموعة من الطرق تعتمد فى تقريبها للتكامل المحدود:

$$I(f) = \int_a^b f(x)\,dx \tag{3.1}$$

باستخدام الاستكمال بالحدوديات لتقريب الدالة $f(x)$ بواسطة $p \in IP_n$ مستخدماً البيانات: $(x_i, f(x_i)); i = 0,1,.....n$، حيث $x_i = a + ih$، و $h = \frac{b-a}{n}$. أى أن النقاط $x_0 = a$، x_1، ....، $x_n = b$ متساوية البعد. من ثم يقرب التكامل (3.1) بالتكامل:

$$I_n(f) = \int_a^b p(x)\,dx$$

(3.2)

باستخدام صيغة لاجرانج $p(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i)\,L_{n,i}(x)$. إذن:

$$I_n\ (f) = \int_a^b \sum_{i=0}^{n} f(x_i)\,L_{n,i}(x)\,dx = \sum a_{n,i} f(x_i)$$

(3.3)

حيث $a_{n,i} = \int_a^b L_{n,i}\ (x)\ dx \quad : \quad 0 \le i \le n$

(3.4)

المبرهنة التالية تعطى صيغة لـ $a_{n,i}$ تستفيد من تسوى البعد بين نقاط البيانات:

مبرهنة

$$a_{n,i} = \frac{(-1)^{n-i} h}{i!(n-i)!} \int \frac{u(u-1).....(u-n)}{u-i}\,du$$

الإثبات:

$$a_{n,i} = \int_a^b L_{n,i}\ (x)\ dx = \int_a^b \frac{(x-x_0)....(x-x_{i-1})(x-x_{h+1})....(x-x_n)}{(x_i-x_0)....(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{h+1})....(x_i-x_n)}dx$$

(3.5)

الآن، ضـــع $x = a + uh$. إذن $dx = h\,du$ و عنـــد $x = a$ ، $u = 0$. و عنـــد $x = b$ ، $u = n$. أيضاً بتبسيط جبرى يمكن الوصول إلى أن:

إذن بالتعويض فى (3.5) نحصل على الصيغة المطلوبة■

تختلف الطرق باختلاف قيمة n . المثال الثالى يوضح ما يعرف بقاعدة شبه المنحرف Trapezoidal Rule، و هى طريقة نيتوتن – كوتس التى تقابل $n = 1$.

◄◄ مثال:

جد طريقة نيوتن– كوتس المقابلة لـ $n=1$.

الحل:

$$I_1(f)=a_{1,0}f(x_0)+a_{1,1}f(x_1)$$

$$a_{1,0}=\frac{(-1)^{1-0}h}{0!(1-0)!}\int_0^1\frac{u(u-1)}{u-0}du=\frac{-h}{1\times1}\left[\frac{u^2}{2}-u\right]_0^1=-h\left[\frac{1}{2}-1\right]=\frac{h}{2}$$

$$a_{1,1}=\frac{(-1)^{1-1}h}{1!(1-1)!}\int_0^1\frac{u(u-1)}{u-1}du=\frac{h}{1\times1}\left[\frac{u^2}{2}\right]_0^1=h\left[\frac{1}{2}\right]=\frac{h}{2}$$

إذن $I_1(f)=\frac{h}{2}f(x_0)+\frac{h}{2}f(x_1)=\frac{h}{2}(f(x_0)+f(x_1))$. لاحظ أن:

$x_0=a$ ، $x_1=b$ ، و أن $h=\frac{b-a}{1}=b-a$. عليه يمكننا كتابة:

$$\int_a^b f(x)\,dx\approx\frac{b-a}{2}[f(a)+f(b)]\ .$$

◄◄ مثال:

ليكن $f(x)=2+5x$ ، استخدم طريقة شبه المنحرف لحساب تكامل تقريبي للمقدار $\int_0^3(2+5x)dx$.

الحل:

$$\int_0^3 f(x)\,dx\approx\frac{3-0}{2}[f(0)+f(3)]=\frac{3}{2}[2+17]=28.5$$

◄◄ مثال:

استخدم طريقة شبه المنحرف لحساب تكامل تقريبي للمقدار $\int_1^2\ln x\,dx$.

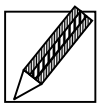
الحل:

$$I_2(f) = \frac{1}{2}[In1 + In2] = 0.3465736$$

بينما القيمة الدقيقة للتكامل:

$$\int_1^2 In\,x\,dx = [x\,Inx - x]_1^2 = 0.3862943$$

تدريب (1)



استخدام قاعدة شبه المنحرف لحساب قيمة تقريبية $\int_0^2 x^2 dx$ ثم أوجد قيمة الخطأ الناتج عن التقريب.

عزيزى الدارس، سنتطرق بشئ من التفصيل لطريقة خاصة من طرق نيوتن–كوتس، و التى تعرف عادة بطريقة سمبسون، و هى طريقة نيوتن–كوتس المقابلة لـ $n = 2$.

2.1 قاعدة سمبسون (Simpson's Rule)

عزيزي الدارس، كما أسلفنا فإن قاعدة سمبسون هى طريقة نيتوتن–كوتس المقابلة لـ $n = 2$. إذن:

$$I(f) \approx a_{2,0} f(x_0) + a_{2,1} f(x_1) + a_{2,2} f(x_2)$$

$$a_{2,0} = \frac{(-1)^{2-0} h}{0!(2-0)!}\int_0^2 \frac{u(u-1)(u-2)}{u-0} du = \frac{h}{1\times 2}\int_0^2 (u^2 - 3u + 2) du$$

$$= \frac{h}{2}\left[\frac{u^3}{3} - \frac{3u^2}{2} + 2u\right]_0^2 = \frac{h}{3}$$

$$a_{2,1} = \frac{(-1)^{2-1}h}{1!(2-1)!}\int_0^2 \frac{u(u-1)(u-2)}{u-1}du = \frac{-h}{1\times 1}\int_0^2 (u^2-2u)du$$

$$= -h\left[\frac{u^3}{3} - u^2\right]_0^2 = \frac{4h}{3}$$

$$a_{2,2} = \frac{(-1)^{2-2}h}{2!(2-2)!}\int_0^2 \frac{u(u-1)(u-2)}{u-2}du = \frac{h}{2\times 1}\int_0^2 (u^2-u)du$$

$$= \frac{h}{2}\left[\frac{u^3}{3} - \frac{u^2}{2}\right]_0^2 = \frac{h}{3}$$

إذن

$$I_2(f) = \frac{h}{3}f(x_0) + \frac{4h}{3}f(x_1) + \frac{h}{3}f(x_2)$$
$$= \frac{h}{3}(f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2))$$

هنا $h = \frac{b-a}{2}$، $x_0 = a$، $x_1 = a + \frac{b-a}{2} = \frac{a+b}{2}$، و $x_2 = b$. عليه يمكننا كتابة:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{b-a}{6}\left[f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right]$$

◄◄ مثال:

استخدم قاعدة سمبسون لتقريب $\int_0^2 f(x)\,dx$ حيث $f(x) = x^3 - 5x + 6$.

الحل:

$$I_2(f) = \frac{h}{3}(f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)) = \frac{2-0}{6}\left[f(0) + 4f\left(\frac{0+2}{2}\right) + f(2)\right]$$

$$= \frac{1}{3}[6 + 4\times 2 + 4) = 6]$$

الخطأ، R، فى تقريب التكامل (3.1) بقاعدة سمبسون يعطى بـ:

$$R = \int_a^b f(x)\,dx - \frac{b-a}{6}\left[f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) \right]$$

و بدلالة $h\left(=\frac{b-a}{2}\right)$ يمكن كتابة:

$$R = R(h) = \int_{x_1-h}^{x_1+h} f(x)\,dx - \frac{h}{3}\left[f(x_1-h) + 4f(x_1) + f(x_1+h) \right]$$

(3.6)

المبرهنة التالية تعطى صيغة أفضل، عملياً، من (3.6).

مبرهنة

لتكن $f(x)$ قابلة للاشتقاق باتصال للمشتقة الرابعة. عليه فإن الخطأ، $R(h)$، فى قاعدة سمبسون يعطى بـ: $R(h) = -\frac{h^5}{90} f^{(4)}(\eta)$، حيث $\eta \in (a,b)$.

الإثبات:

بتفاضل (3.6) ثلاث مرات بالنسبة لـ h، نحصل على

$$R'(h) = \left[f(x_1+h) + f(x_1-h) \right] - \frac{1}{3}\left[f(x_1-h) + 4f(x_1) + f(x_1+h) \right]$$
$$- \frac{h}{3}\left[-f'(x_1-h) \right] + f'(x_1+h)] = \frac{2}{3}[f(x_1-h) + f(x_1+h)]$$
$$- \frac{4}{3} f(x_1) - \frac{h}{3}\left[-f'(x_1-h) \right] + f'(x_1+h)],$$

$$R''(h) = \frac{2}{3}[-f'(x_1-h) + f'(x_1+h)] - \frac{1}{3}[-f'(x_1-h) + f'(x_1+h)]$$
$$- \frac{h}{3}[f''(x_1-h) + f''(x_1+h)]$$
$$= \frac{1}{3}[-f'(x_1-h) + f'(x_1+h)] - \frac{h}{3}[f''(x_1-h) + f''(x_1+h)],$$

و ذلك باستخدام مبرهنة القيمة الوسطى، حيث $\xi_3 \in (x_1 - h, x_1 + h)$. إضافة لذلك يمكن إثبات أن $R(0) = R'(0) = R''(0) = 0$. الآن و بتتابع نكامل $R'''(h)$ و مستخدمين مبرهنة القيمة الوسطى للتكامل لنحصل على

$$R''(h) = R''(0) + \int_0^h R'''(t)\,dt = -\frac{2}{3}\int_0^h t^2 f^{(4)}(\xi_3)\,dt$$

$$= -\frac{2}{3} f^{(4)}(\xi_2)\int_0^h t^2 dt = -\frac{2}{9} h^3 f^{(4)}(\xi_2)$$

حيث $\xi_2 \in (x_1 - h, x_1 + h)$،

$$R'(h) = R'(0) + \int_0^h R''(t)\,dt = -\frac{2}{9}\int_0^h t^3 f^{(4)}(\xi_2)\,dt$$

$$= -\frac{2}{9} f^{(4)}(\xi_1)\int_0^h t^3 dt = -\frac{1}{18} h^4 f^{(4)}(\xi_1)$$

حيث $\xi_1 \in (x_1 - h, x_1 + h)$،

$$R(h) = R(0) + \int_0^h R'(t)\,dt = -\frac{1}{18}\int_0^h t^4 f^{(4)}(\xi_1)\,dt$$

$$= -\frac{1}{18} f^{(4)}(\xi)\int_0^h t^4 dt = -\frac{1}{90} h^5 f^{(4)}(\xi)$$

حيث $\xi \in (x_1 - h, x_1 + h)$ ■

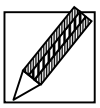
◄◄ مثال:

قارن بين قاعدة شبه المنحرف وقاعدة سمبسون الثلثية للدوال 1، x، x^2 ، x^3 ، x^4 في الفترة [0, 2] مستخدماً h = 2 لقاعدة شبه المنحرف و h = 1 لقاعدة سمبسون.

الحل:

f(x)	الحل الدقيق	قاعدة شبه المنحرف	قاعدة سمبسون
1	2.000	2.000	2.000
x	2.000	2.000	2.000
x^2	2.667	4.000	2.667
x^3	4.000	8.000	4.000
x^4	6.400	16.000	6.667

تدريب (2)



قارن بين قاعدة شبه المنحرف وقاعدة سمبسون الثلثية للدوال التالية:

$\frac{1}{x+1}$ ، $\sqrt{1+x^2}$ ، $\sin x$ ، e^x في الفترة $[0, 2]$

أسئلة تقويم ذاتي



1. اشرح مدى أهمية التكامل العددي.
2. اكتب صيغة نيوتن – كوتس.
3. ما المقصود بطريقة شبه المنحرف (Trapezoidal Rule).
4. أثبت ان الخطأ فى طريقة شبه المنحرف لتقريب $\int_a^{a+h} f(x)dx$ يعطى بـ $R(h) = -\frac{h^3}{12} f''(\xi)$ ، حيث $\xi \in (a, a+h)$

3.1 طريقة شبه المنحرف المركبة

عزيزي الدارس،

لنفرض أن الفترة $[a,b]$ قسمت إلى فترات جزئية عددها m، كل منها بطول h بحيث: $x_i = a + ih; i = 0,1,2,.....,m$ و $h = \frac{b-a}{m}$.

إذن:

$$I(f) = \int_a^b f(x)\ dx = \int_{x_0}^{x_m} f(x)dx$$

$$= \int_{x_0}^{x_1} f(x)dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx + ... + \int_{x_{m-1}}^{x_m} f(x)dx$$

والآن نطبق قاعدة شبه المنحرف على الفترات $[x_0,x_1]$، $[x_1,x_2]$، .....، $[x_{m-1},x_m]$ لنحصل على:

$$I(f) \approx \frac{h}{2}\left(f(x_0)+f(x_1)\right) + \frac{h}{2}\left(f(x_1)+f(x_2)\right) + ... + \frac{h}{2}\left(f(x_{m-1})+f(x_m)\right)$$

إذن

$$\int_a^b f(x)\ dx \approx \frac{h}{2}\left[f(a)+f(b)+2\sum_{i=1}^{m-1} f(a+ih)\right]$$

(3.7)

و هى قاعدة شبه المنحرف على فترات جزئية عددها m.

◄◄ مثال:

استخدم قاعدة شبه المنحرف المركبة لتقريب التكامل $\int_0^1 e^{-x^2} dx$ باستخدام $h = \frac{1}{10}$.

الحل:

نحسب $f(x)=e^{-x^2}$ عند النقاط، $x_i=\frac{i}{10}$، حيث $i=0,1,.....,10$ لنحصل على:

$$\int_0^1 e^{-x^2}dx \approx \frac{h}{2}\left[f_0+2\left(f_1+f_2+.....+f_9\right)+f_{10}\right]$$

$$=\frac{1}{20}\left[1+2\left(0.9900498+0.9607894+.....+0.444858\right)+0.3678794\right]$$

$$=\frac{1}{20}\left[1+2\left(6.7781682\right)+0.36878794\right]=0.7462107$$

◄◄ مثال:

استخدم قاعدة شبه المنحرف البسيطة والمركبة، مستخدماً $h=0.2$ لتقريب التكامل $\int_0^{1.2}\sin x\,dx$. وقارن بين الخطأين فى الحالتين.

الحل:

قاعدة شبه المنحرف المركبة:

$m=\frac{b-a}{h}$ لذلك n = 6 .

$$\int_0^{1.2}\sin x\,dx\approx\frac{(0.2)}{2}\left[0+2(0.198669+0.389418+0.564642+0.717356\right.$$

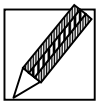
$$\left.+\ 0.841471)+0.932039\right]=0.635515$$

قاعدة شبه المنحرف البسيطة: $\int_0^{1.2}\sin x\,dx\approx\frac{1.2}{2}\left[0+0.932039\right]=0.55922$

القيمة الدقيقة للتكامل: $\int_0^{1.2}\sin x\,dx=0.637642$

واضح أن القاعدة المركبة أكثر دقة.

التدريب (3)



أ. احسب $\int_0^1 \frac{\sin x}{x} dx$ باستخدام قاعدة شبه المنحرف المركبة باستخدام 6 نقاط، ثم قدر عدد الفترات الجزئية اللازمة لتقريب التكامل بحيث لا يتعدى الخطأ المقدار $\frac{1}{2}10^{-5}$ ؟

ب. أوجد قيمة للمقدار h بحيث تكون القيمة المطلقة للخطأ الناتج من تقريب التكامل: $I=\int_1^2 \frac{1}{x} dx$ لا يتعدى 10^{-2} ثم احسب قيمة تقريبية لهذا التكامل.

4.1 طريقة سمبسون المركبة

عزيزي الدارس،،

إذا قسمنا الفترة [a, b] إلى فترات جزئية عددها $2m$ و ذلك بواسطة النقاط $x_0 = a$ ، $x_i = a + ih; \quad i = 1,2,.....,2m$ ، حيث $h = \frac{b-a}{2m}$ فإنه يمكن تعريف صيغة سمبسون المركبة على النحو التالي:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_{x_0}^{x_2} f(x)\,dx + \int_{x_2}^{x_4} f(x)\,dx + ... + \int_{x_{2m-2}}^{x_{2m}} f(x)\,dx$$

$$= \sum_{i=1}^{m} \int_{x_{2i-2}}^{x_{2i}} f(x)\,dx = \sum_{i=1}^{m} \left[\frac{h}{3}\left[f(x_{2i-2}) + 4f(x_{2i-1}) + f(x_{2i})\right] - \frac{h^5}{90} f^{(4)}(c_i) \right]$$

حيث $x_{2i-2} < c_i < x_{2i}$.

إذن يقرب التكامل فى طريقة سمبسون المركبة بـ:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{3}\left[f(a)+2\sum_{i=1}^{m-1} f(x_{2i})+4\sum_{i=1}^{m} f(x_{2i-1})+f(b)\right]$$

(3.8)

و بخطأ مركب، R ، يعطى بـ: $R=-\frac{h^5}{90}\sum_{i=1}^{m} f^{(4)}(c_i)$. و إذا كانت $f^{(4)}(x)$ متصلة فى $[a,b]$، فإنه توجد $c\in[a,b]$ بحيث $\left|f^{(4)}(c)\right|\geq f^{(4)}(x)$ لكل $x\in[a,b]$، لذلك نحصل على:

$$|R|\leq \frac{h^5}{90}\sum_{i=1}^{m}\left|f^{(4)}(c_i)\right|\leq \frac{h^5}{90}\times m\left|f^{(4)}(c)\right|=\frac{h^5}{90}\times\frac{b-a}{h}\left|f^{(4)}(c)\right|=\frac{b-a}{180}h^4\left|f^{(4)}(c)\right|$$

الطرف الأيمن للمتباينة

$$|R|\leq \frac{b-a}{180}h^4\left|f^{(4)}(c)\right|$$

(3.9)

يعطى أكبر خطأ مطلق فى التقريب بطريقة سمبسون المركبة.

◄◄ مثال:

استخدم صيغة سمبسون المركبة لتقريب: $\int_0^1 \frac{dx}{2+x^2}$ مستخدماً $h=\frac{1}{6}$

الحل:

نحسب $f(x)=\frac{1}{2+x^2}$ عند النقاط $x_i=\frac{i}{6}$ حيث $i=0,1,....,6$ لنحصل على:

$$I(f)=\frac{h}{3}[f_0+4f_1+2f_2+4f_3+2f_4+4f_5+f_6]$$

$$=\frac{1}{18}\left[\frac{1}{2}+4\left(\frac{36}{73}\right)+2\left(\frac{9}{19}\right)+4\left(\frac{4}{9}\right)+2\left(\frac{9}{22}\right)+4\left(\frac{36}{97}\right)+\frac{1}{3}\right]=0.43521$$

لاحظ أن القيمة الدقيقة للتكامل: $\frac{1}{\sqrt{2}}\tan^{-1}\frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0.4352098$

◄◄ مثال:

استخدم صيغة سمبسون المركبة لتقدير قيمة $\int_0^{1.2} \sin x\,dx$ باستخدام سبع نقاط ثم قدر قيمة الخطأ وحدوده.

الحل:

هناك 6 فترات جزئية لذلك باستخدام جدول القيم التالي:

x_i	0.0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0	1.2
$f(x_i)$	0.0	0.198669	0.389418	0.564642	0.717356	0.841471	0.932039

إذن $\int_0^{1.2} \sin x\,dx \approx \frac{(0.2)}{3}[0.0 + 4(0.198669 + 0.564642 + 0.841471)$

$+ 2(0.389416 + 0.717356) + 0.932039\ ] = 0.637647$

حدود الخطأ: $\frac{(0.2)^4}{180}(1.2)\max_{x\in[0,1.2]}|\sin x| = \frac{(0.2)^4}{180}(1.2)(0.932039) = 0.000020$

◄◄ مثال:

قرب التكامل $\int_0^3 e^{x^2}\,dx$ باستخدام صيغة سمبسون المركبة و 6 فترات جزئية.

الحل:

$h = \frac{3-0}{6} = \frac{1}{2}$ نحصل على:

$$\int_0^3 e^{x^2}dx \approx \frac{1}{6}\left[f(0)+f(3)+4\left[f\left(\frac{1}{2}\right)+f\left(\frac{3}{2}\right)+f\left(\frac{5}{2}\right)\right]+2[f(1)+f(2)]\right] = 172231$$

◄◄ مثال:

قارن بين طريقتى شبه المنحرف المركبة وصيغة سمبسون المركبة عند تقريب: $\int_0^{\pi} \sin x\,dx$ لدقة 2×10^{-5}.

الحل:

الخطأ المطلق، R، عند تقريب $\int_a^b f(x)dx$ بطريقة شبه المنحرف المركبة يحقق المتباينة: و عند التقريب بطريقة سمبسون العامة يحقق المتباينة: المقارنة ستكون فى قيمة h التى تقق الشرط $|R|<2\times10^{-5}$ فى الحالتين. فالطريقة التى تكون فيها h أصغر هى الأفضل فى حل المسألة المعطاة.

الآن، $f(x)=\sin x$. إذن $f''(x)=-\sin x$ ، $f^{(4)}(x)=\sin x$. إذن فى الحالتين نحصل على $\max_{x\in[0,\pi]}|f''(x)|=\max_{x\in[0,\pi]}|f''(x)|<1$. فى طريقة سبه المنحرف المركبة h تحقق:

إذن: $$\frac{\pi h^2}{12}\max_{x\in[0,\pi]}|f''(x)|<(2)(10^{-5})$$

لذلك: $$h<\sqrt{\frac{24x10^{-5}}{\pi}}\cong8.74*10^{-3}$$

في طريقة سمبسون المركبة:

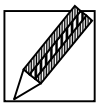
$$\frac{\pi h^4}{180}\max_{x\in[0,\pi]}|f^{(4)}(x)|<2x10^{-5}$$

$$\frac{\pi h^4}{180}<2*10^{-5}\Rightarrow h<0.1839874$$

إذن يمكن استخدام قيم لـ h فى طريقة سمبسون المركبة أصغر من تلك التى يمكن استخدامها فى طريقة شبه المنحرف المركبة للوصول للدقة المطلوبة, مما يجعلنا نفضل

طريقة سمبسون المركبة فى حل تلك المسألة. السبب فى ذلك هو أن عدد التقسيمات سيكون أقل فى طريقة سمبسون المركبة.

تدريب (4)



أوجد قيم m ، h المناسبتين فى كل من:

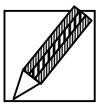
(a) طريقة شبه المنحرف المركبة.

(b) طريقة سمبسون المركبة.

لتقريب $\int_0^2 x e^{-x}\,dx$ بدقة $5\text{x } 10^{-9}$

ملاحظة: إذا كان: $f(x) = x\,e^{-x}$ فإن: $f^{(k)}(x) = (-1)^k (x - k)\, e^{-x}$

تدريب (5)



أوجد قيمة h التي تجعل الخطأ في صيغة سمبسون المركبة لا يتجاوز $5\text{x}10^{-9}$ لحساب $\int_2^7 \frac{dx}{x}$.

أسئلة تقويم ذاتي



1. أعد اشتقاق قاعدة شبه المنحرف المركبة لتقريب التكاملات.
2. اكتب صيغة سمبسون المركبة لتقريب التكاملات واشرح أهميتها.
3. أيهما أكثر دقة: طريقة شبه المنحرف المركبة أم طريقة سمبسون المركبة عند تقريب التكامل $\int_0^{\pi} \sin x\,dx$.

2. تكامل رومبيرج Romberg Integration

عزيزي الدارس،،

طريقة تكامل رومبيرج هى طريقة لإيجاد تقريب للتكامل باستخدام الطرق المعروفة الأخرى بشكل متكرر. سنشرح بالتفصيل استخدام الطريقة مع طريقة شبه المنحرف المركبة. لتكن $T(m)$ القيمة المقربة لـ $\int_a^b f(x)dx$ بواسطة طريقة شبه المنحرف المركبة باستخدام m فترة جزئية. أى أن:

$$T(m)=\frac{b-a}{2m}\left\{f(a)+f(b)+2\sum_{i=1}^{m-1}f\left(a+i\frac{b-a}{m}\right)\right\}$$

الآن، ضع $h=\frac{b-a}{2m}$. إذن:

$$T(m)=h\left\{f(a)+f(b)+2\sum_{i=1}^{m-1}f(a+2ih)\right\}$$

(3.10)

و إذا أخذنا عدد الفترات الجزئية ليكون $2m$ فإن:

$$T(2m)=\frac{h}{2}\left\{f(a)+f(b)+2\sum_{i=1}^{2m-1}f(a+ih)\right\}$$

(3.11)

من (3.10) و (3.11) نحصل على:

$$T(2m)-\frac{1}{2}T(m)=h\sum_{i=1}^{n}f(a+(2i-1)h)$$

(3.12)

تستخدم (3.12) فى الخطوات التالية لرومبيرج لتقريب التكامل $\int_a^b f(x)dx$. عرف:

$$R(n,0)=T(2^n)\text{ ، }n=01,2,.....$$

إذن:

$$R(0,0)=\frac{b-a}{2}[f(a)+f(b)]$$

$$R(n,0)=\tfrac{1}{2}R(n-1,0)+\frac{b-a}{2^n}\sum_{i=1}^{2^{n-1}}f\left(a+(2i-1)\frac{b-a}{2^n}\right)$$

(3.13)

تحسب التقريبات $R(0,0)$ ، $R(1,0)$ ، $R(2,0)$ ، ..... ، $R(M,0)$ لقيمة مناسبة لـ M .

◄◄ مثال:

قرب $\int_0^{\pi}\sin x\,dx$ بـ $R(5,0)$.

الحل:

$$R(0,0)=\frac{\pi}{2}[\sin 0+\sin\pi]=0$$

$$R(1,0)=\frac{1}{2}\left[R(0,0)+\pi\sin\frac{\pi}{2}\right]=1.57079633$$

$$R(2,0)=\frac{1}{2}\left[R(1,0)+\frac{\pi}{2}\left(\sin\frac{\pi}{4}+\sin\frac{3\pi}{4}\right)\right]=1.89611890$$

$$R(3,0)=\frac{1}{2}\left[R(2,0)+\frac{\pi}{4}\left(\sin\frac{\pi}{8}\right)+\sin\frac{3\pi}{8}+\sin\frac{5\pi}{8}+\sin\frac{7\pi}{8}\right]=1.97423160$$

$$R(4,0)=1.99357034$$

$$R(5,0)=1.99839336$$

وحيث أن القيمة الدقيقة للتكامل هي 2 فإن اقتراب الحل من الحل الدقيق هو اقتراب بطيء بالرغم من سهولة الحساب في الصيغة. ومن أجل تسريع الاقتراب نستخدم ما يعرف بطريقة الاستكمال الخارجي لريتشاردسون. لوصف هذه الطريقة مع طريقة شبه المنحرف

المركبة سوف نعتمد على الصيغة التالية لتقريب التكامل $I = \int_a^b f(x)dx$ بشبه المنحرف المركبة باستخدام 2^n فترة جزئية:

$$I = R(n,0) + c_2h^2 + c_4h^4 + \ldots\ldots\ldots + c_{2k-2}h^{2k-2} + c_{2k}h^{2k} f^{(2k)}(\xi)$$

(3.14)

حيث $\xi \in (a,b)$. المقدار $E(h) = c_2h^2 + c_4h^4 + \ldots\ldots + c_{2k-2}h^{2k-2} + c_{2k}h^{2k} f^{(2k)}(\xi)$ يمثل الخطأ فى التقريب. $E(h) = -\frac{b-a}{12}h^2 f''(\xi)$ إذا كان $k = 1$. إثبات هذه الصيغة للخطأ خارج نطاق المقرر.

باستخدام 2^{n+1} فترة جزئية و بالتعويض فى (3.14) نحصل على:

$$I = R(n+1,0) + c_2\frac{h^2}{4} + c_4\frac{h^4}{16} + \ldots\ldots\ldots + c_{2k-2}\frac{h^{2k-2}}{2^{2k-2}} + c_{2k}\frac{h^{2k}}{2^{2k}} f^{(2k)}(\xi)$$

(3.15)

بضرب (3.15) فى 4 ثم طرح (3.14) من الناتج، و بع التبسيط، نحصل على:

بوضع $R(n+1,1) = \frac{4R(n+1,0) - R(n,0)}{3}$ يمكن كتابة:

$$I = R(n+1,1) + d_4h^4 + \ldots\ldots\ldots + d_{2k-2}h^{2k-2} + d_{2k}h^{2k} f^{(2k)}(\xi)$$

(3.16)

حيث $d_{2j} = \frac{1-2^{2j-2}}{2^{2j-2}}c_{2j}$، $j = 2, 3, \ldots\ldots$.

الآن بمقارنة سريعة بين (3.14) و (3.16) نلاحظ أن $R(n,1)$ أدق فى تقريب I من $R(n,0)$، ذلك لأن $I - R(n+1,1) = O(h^4)$ و أن $I - R(n,0) = O(h^2)$.

يمكن تكرار ذلك للحصول على:

$$I = R(n+1,2) + e_6h^6 + \ldots\ldots\ldots + e_{2k-2}h^{2k-2} + e_{2k}h^{2k} f^{(2k)}(\xi)$$

(3.17)

حيـــــــث $R(n+1,2)=\frac{16R(n+1,1)-R(n,1)}{15}$ ، و بدقـــــــة أفـــــــضل لأن $I-R(n+1,2)=O(h^6)$. و بتكرار ذلك مراراً نحصل على:

$$R(n,m)=\frac{4^m R(n,m-1)-R(n-1,m-1)}{4^m-1}$$

(3.18)

حيث $I-R(n,m)=O(h^{2m+2})$. فكلما كبرت m كانت الدقة أفضل.

باستخدام (3.18) يمكننا تكوين الجدول التالى الذى يعرف بجدول رومبيرج:

$$\begin{array}{ccccccc}
R(0,0) & & & & & & \\
R(1,0) & R(1,1) & & & & & \\
R(2,0) & R(2,1) & R(2,2) & & & & \\
R(3,0) & R(3,1) & R(3,2) & R(3,3) & & & \\
R(4,0) & R(4,1) & R(4,2) & R(4,3) & R(4,4) & & \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \\
R(M,0) & R(M,1) & R(M,2) & R(M,3) & R(M,4) & \cdots & R(M,M)
\end{array}$$

◄◄ مثال:

إذا عدنا إلى تقريب: $\int_0^{\pi} \sin x\,dx$ نستطيع التوصل إلى الجدول التالي باستخدام تكامل رومبيرج.

الحل:

0.00000000
1.57079633 2.09439511
1.89611890 2.00455976 1.99857073
1.97423160 2.00026917 1.99998313 2.00000555
1.99357034 2.00001659 1.99999975 2.00000001 1.99999999
1.99839336 2.00000103 2.00000000 2.00000000 2.00000000 2.00000000

◄◄ مثال:

استخدم تكامل رومبيرج لتقريب $\int_0^3 \frac{\sin(2x)}{1+x^5}dx$ بإكمال الجدول التالي:

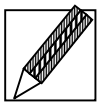
J	$R(J,0)$	$R(J,1)$	$R(J,2)$	$R(J,3)$
0	-0.00171772			
1	0.02377300	*		
2	0.60402717	*	*	
3	0.64844713	*	*	*
4	0.66591329	*	*	*

الحل:

الحل الدقيق هو $\int_0^3 \frac{\sin(2x)}{1+x^5}dx \approx 0.6717578646$ بتطبيق صيغة تكامل رومبيرج، نحصل على:

J	$R(J,0)$	$R(J,1)$	$R(J,2)$	$R(J,3)$
0	-0.00171772			
1	0.02377300	0.03226990		
2	0.60402717	0.79744521	0.84845691	
3	0.64844713	0.66325379	0.65430770	0.65122596
4	0.66591329	0.67173534	0.67230077	0.67258638

التدريب (6)



استخدم جدول تكامل رومبيرج حتى $R(3,3)$ لتقريب $\int_1^2 \ln x\,dx$

أسئلة تقويم ذاتي



1. عرف تكامل رومبيرج.
2. ماذا يفيد استخدام استكمال ريتشاردسون الخارجي في عملية الاقتراب من الحل في تكامل رومبيرج؟

3. التفاضل العددي Numerical Differentiation

تتذكر عزيزي الدارس كيف كنّا نحسب المشتقة لدالة ما في مقرر التفاضل والتكامل (Calculus) ولعل أهم الأسباب التي تدفعك لتعلم حساب المشتقة بطرق عددية هو أن الأمر يتطلب في بعض الأحيان حساب المشتقة لدوال صعبة أو أن الدالة نفسها قد تكون غير معلومة وإنما يكون لدينا بعض البيانات المجدولة عنها.

1.3 حساب الفروق المنتهية

Finite Difference Calcuaus

لنفرض نقطة x_i تبتعد عن نقطة أخرى بمقدار h بحيث:

$$x_{i+1} - x_i = h\, x_i$$

وسوف ندرس هنا بعض الرموز المفيدة في حساب التفاضل.

المعنى	الرمز
الإزاحة	$E\ f(x) = f(x+h)$
فرق أمامي	$\Delta\ f(x) = f(x+h) - f(x)$
فرق خلفي	$\nabla\ f(x) = f(x) - f(x-h)$
فرق وسطي	$\delta\ f(x) = \left\{ f\left(x+\frac{h}{2}\right) - f\left(x-\frac{h}{2}\right) \right\}$
قيمة وسطية	$M\ f(x) = \frac{1}{2}\left\{ f\left(x+\frac{h}{2}\right) + f\left(x-\frac{h}{2}\right) \right\}$
اشتقاق	$D\ f(x) = f'(x)$

2.3 استخدام متسلسلة تايلر

إن استخدام مفكوك متسلسلة تايلر (Taylor Series Exparsion) في تقريب الاشتقاق العددي قد شاع؛ ذلك بسبب سهولة استخدامه ونتائجه الجيدة، وسنبدأ باستعراض تطبيقاته لإيجاد المشتقة الأولى ثم المشتقة الثانية.

ملاحظة

حينما نذكر الدالة f(x) فإننا نعني أنها وجميع مشتقاتها موجودة ومنتهية.

لنفرض أننا نريد حساب مشتقة دالة غير معلومة f'(x) عند النقطة x ، فإن متسلسلة تايلر:

$$f(x+h) = f(x) + f'(x)h + \frac{f''(c_1)h^2}{2}$$

وعند إعادة ترتيب المعادلة:

$$f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} - \frac{f''(c_1)h}{2}$$

حيث $c_1 \in [x, x + h]$ والعدد c_1 غير معروف، لذلك فإن حساب $f''(c_1)$ يبقى غير ممكن لذلك نهمل الحد الأخير، ولذلك فإن قيمة $f'(x)$ هي قيمة تقريبية، وإذا كان هناك حد (bound) لقيمة $f''(c)$ في الفترة $[x, x + h]$ فإن هذا الحد عبارة عن حد ثابت مضروب في h أي أن صيغة الفروق الأمامية.

$$f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + O(h)$$

ويسمى الخطأ الناتج عن إهمال $O(h)$ بخطأ البتر (Truncation Error) وهو ناتج عن استعمال عدد محدود من حدود متسلسلة لا نهائية.

وإذا استبدلنا x بـ x- h يصبح لدينا صيغة الفروق الخلفية:

$$f(x-h) = f(x) - hf'(x) + \frac{h^2}{2} f''(c_2), x - h \le c_2 \le x$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{f(x) - f(x-h)}{h} + \frac{h}{2} f''(c_2)$$

$$f'(x) = \frac{f(x) - f(x-h)}{h} + O(h)$$

وإذا جمعنا صيغة الفروق الأمامية والخلفية يصبح لدينا:

$$f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} + \frac{h}{4}[f''(c_2) - f''(c_1)]$$

$$f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} + O(h)$$

وهذه تسمى صيغة الفروق الوسطى والحقيقة، وتأتي هذه الصيغة بخطأ $O(h^2)$ والسبب في ذلك هو أنه عندما تستخدم متسلسلة ما لمعرفة قيمة تقريبية للقيمة $f'(x)$ فإنه يلزمنا معرفة قيمة الدالة عند نقطتين في الصيغ الثلاث السابقة.

◄◄ مثال:

ليكن $f(x) = \cos x$ أوجد $f'(0.8)$ باستخدام الثلاث صيغ وقارنها بالإجابة الدقيقة حيث $h = 0.01$.

الحل:

نعلم أن $f'(x) = \sin x$ لذلك فإن الإجابة الدقيقة -0.71735609 .

صيغة الفروق الأمامية:

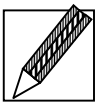
$$f'(0.8) \cong \frac{f(0.8+0.01)-f(0.8)}{0.01} = \frac{\cos(0.81)-\cos(0.8)}{0.01} = -0.7208$$

والخطأ هو 0.00347

صيغة الفروق الوسطى: $$f'(0.8) \approx \frac{f(0.8)-f(0.79)}{2(0.01)} = 0.717344$$

والخطأ هو 0.00001186

تدريب (7)



استخدم صيغة الفروق الأمامية والوسطى لتقريب f'(0.2) حيث:

$f(x) = x - e^x$ حيث $h = 0.01$

مثال:

استخدم صيغة الفروق الخلفية والوسطى لتقريب f'(13.1) للدالة: $f(x) = \frac{1-x}{1+x}$ حيث $h = 0.1$.

الحل:

صيغة الفروق الخلفية:

$$f'(13.1) \cong \frac{f(13.1) - f(12.1)}{2} \approx -0.0108277$$

صيغة الفروق الوسطى:

$$f'(13.1) \approx \frac{f(14.1) - f(12.1)}{2} \approx -0.01011$$

أما الإجابة الدقيقة فهي: -0.0100598

ونستطيع الحصول على دقة أفضل من خلال استخدام متسلسلة تايلر حول x للعدد x + 2h فيكون:

$$f(x+2h) = f(x) + 2h\, f'(x) + \frac{(2h)^2}{2} f''(x) + \frac{(2h)^3}{6} f'''(c_1)$$

ولكن

$$f(x+h) = f(x) + h\, f'(x) + \frac{h^2}{2} f''(x) + \frac{h^3}{6} f'''(c_2)$$

بضرب المعادلة الثانية بالعدد 4 وبطرح المعادلتين وجعل f'(x) في طرف ينتج

$$f'(x)=\frac{1}{2h}(-3f(x)+4f(x+h)-f(x+2h))+\frac{h^2}{3}f'''(c) \qquad *$$

حيث $c \in [x, x+2h]$ وهذه الصيغة لها $O(h^2)$ ولكنها أقل دقة من صيغة الفروق الوسطى بالرغم من أن لهما درجة $O(h^2)$ والسبب في ذلك هو أننا نحسب قيم f على طرف واحد من $x \{x, x+h, x+2h\}$: بينما في الصيغة الثانية نحسب القيم على طرفين من x: $\{x-h, x+h\}$ والخطأ في الصيغة الثانية يساوي نصف الخطأ في الصيغة الأولى.

ونستطيع أن نلاحظ أيضاً أن الصيغة الثانية تستخدم نقطتين بينما الصيغة الأولى ثلاث نقاط، ورغم ذلك فإنهما تسميان من صيغ الثلاث نقاط.

ملاحظة:

الصيغة (*) تستخدم في حال معلومات عن f(x+h) ، f(x+2h) في حال عدم وجودها فتستبدل h بالمقدار -h فنحصل على صيغة يلزم معها وجود بيانات أو معلومات عن القيم f(x-h)، f(x-2h).

$$f(x+h)=f(x)+h\,f'(x)+\frac{h^2}{2}f''(x)+\frac{h^3}{6}f(c_1)$$

$$f(x-h)=f(x)+h\,f'(x)+\frac{h^2}{2}f''(x)+\frac{h^3}{6}f(c_2)$$

وبطرح المعادلتين وجعل f'(x) في طرف ينتج:

$$f'(x)=\frac{f(x+h)-f(x-h)}{2h}-\frac{h^2}{12}(f'''(c_1)+f'''(c_2))$$

وباستخدام نظرية القيمة المتوسطة (Intermediate Value Theorem) فإنه يوجد عدد c بين c_2, c_1 بحيث أن:

$$f'(x)=\frac{f(x+h)-f(x-h)}{2h}-\frac{h^2}{6}f'''(c)$$

$$f'(x)=\frac{f(x+h)-f(x-h)}{2h}+O(h^2)$$

ولذلك نرى أن صيغة الفروق الوسطى هي أكثر دقة ($O(h^2)$) من طريقة الفروق الأمامية أو الخلفية ($O(h)$).

◄◄ مثال:

استخدم البيانات في الجدول التالي (والممثلة للدالة $f(x) = e^{\sin x}$) معتمداً على الصيغة السابقة لإيجاد $f''(1)$.

الحل:

x	f(x)
0.8	2.049008
0.9	2.188742
1.0	2.319777
1.1	2.438072
1.2	2.539683

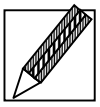
يفضل استخدام $h = 0.1$

الحل الدقيق $f''(1) = -1.2748204$

الحل العددي :

$$f''(1)\equiv\frac{1}{(0.1)^2}[f(0.9)-2f(1)+f(1.1)]=-1.2740232$$

التدريب (8)



استخدم البيانات في الجدول حيث $h = 0.2$

3.3 أفضل اختيار للقيمة h:

رأينا في ما سبق أنه كلما صغرت h كانت النتائج أفضل، ولكن اثبتت الحسابات بأن هذا الاستنتاج غير دقيق.

لنفرض أننا نود تقريب المشتقة الأولى لدالة ما f(x) بأفضل دقة باستخدام صيغة الفروق الأمامية:

$$f'(x)\approx\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

بالطبع مرّ بك سابقاً خطأ التقريب وهناك أيضاً خطأ البتر عند حساب المقدار f(x+h) - f(x) ولنفرض بأن خطأ التقريب لا يتجاوز $\in$ لذلك فإن خطأ التقريب للمشتقة لا يتجاوز $\frac{2\in}{h}=\frac{\in-(-\in)}{h}$ ولكن $f(x+h)=f(x)+h\,f'(x)+\frac{h^2}{2}f''(x)+....$

فيكون خطأ البتر للمقدار $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}-f'(x)$ لا يتجاوز المقدار $\frac{Mh}{2}$ حيث M هو أكبر قيمة للمقدار |f''(x)| لذلك فإن الخطأ الكلي لا يتجاوز $\frac{2\in}{h}+\frac{Mh}{2}$ وهذا المقدار يكون في أقل قيمة له عندما $h=2\sqrt{\frac{\in}{M}}\Leftarrow e(h)=\frac{2\in}{h}+\frac{Mh}{2}\Leftarrow\frac{de}{dh}=0\Leftarrow\frac{-\in}{h^2}+\frac{M}{2}=0$.

$$h=2\sqrt{\frac{\in}{M}}\Leftarrow\frac{h^2}{2}=\frac{\in}{M}\Leftarrow$$

◄◄ مثال:

في مثال سابق إذا كان f(x) = cos x وطبقنا صيغة الفروق الأمامية عند x = 0.8 مع قيم $10^{-1}h, 10^{-2}, ..., 10^{-11}$ فنحصل على الجدول.

لاحظ سلوك القيمة المطلقة للخطأ، لو أخذنا $\in= 2.2204x\ 10^{-16}$ (وجدت عن طريق الحاسب الالي) و M≤ 1= | f''(x)| فإن أفضل اختيار لقيمة h:

$h_{opt} = 2\sqrt{\frac{\in}{1}} \approx 2.980 \times 10^{-8}$ والتي تؤكد المقدار

$$\frac{|f'(x) - f(x + h_{opt}) - f(x - h_{opt})|}{2h_0} \approx 9.7789 \times 10^{-9}$$

وهذا ما يؤكده الجدول السابق.

لنفرض أننا نود أن نقرب قيمة المشتقة الأولى للدالة f(x) بحيث يكون التقريب أفضل ما يمكن باستخدام صيغة الفروق الوسطى.

$$f'(x) \approx \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h}$$

وهذه الصيغة لها خطأ البتر $\frac{-h^2 f'''(c)}{6}$ ومن خبرتنا في التحليلي السابق يكون مجموع الخطأ الكلي (خطأ البتر + خطأ التقريب) $\frac{\in}{h} + \frac{Mh^2}{6}$

$$h = \left(\frac{3\in}{M}\right)^{\frac{1}{3}} \Leftarrow h^3 = \frac{3\in}{M} \Leftarrow \frac{hM}{3} = \frac{\in}{h^2} \Leftarrow \frac{de}{dh} = 0 \Leftarrow eh = \frac{\in}{h} + \frac{Mh^2}{6}$$

حيث M هي أكبر قيمة للمقدار $|f'''(x)|$ والخطأ الكلي له قيمة دنيا عندما $h = \left(\frac{3\in}{M}\right)^{1/3}$.

◄◄ مثال:

استخدم الصيغة (*) لحساب f'(0.8) حيث f(x) = cos x حيث h= 0.01

الحل:

$$f'(0.8) \cong \frac{1}{2(0.01)}[-3f(0.8) + 4f(0.81) - f(0.82)] = -0.71738$$

ويستطيع الدارس التأكد من أن الخطأ هنا هو ضعف الخطأ الناتج عند استخدامنا صيغة الفروق الوسطى.

وتستطيع عزيزي الدارس استخدام صيغ أكثر دقة ولكن بمجهود أكبر لحساب المشتقة الأولى f'(x):

$$f(x \pm h) = f(x) \pm h\, f'(x) + \frac{h^2}{2} f''(x) \pm \frac{h^3}{6} f'''(x)$$
$$+ \frac{h^4}{24} f^{(4)}(x) \pm \frac{h^5}{120} f^{(5)}(x) + O(h^6)$$

$$f(x \pm 2h) = f(x) \pm 2hf'(x) + 2h^2 f(x) \pm \frac{8h^2}{6} f'''(x)$$
$$+ \frac{16h^4}{24} f^{(4)}(x) \pm \frac{32h^5}{120} f^{(5)}(x) + O(h^6)$$

وبالطبع f(x + h)، f(x- h) من بعضهما وكذلك f(x+2h)، f(x- 2h) وببعض الجبر يصبح لدينا صيغة الخمس نقاط لحساب المشتقة الأولى:

$$f'(x_0) \approx \frac{1}{12h}(f(x) - 2h) - 8f(x-h) + 8f(x+h) - f(x+2h))$$

مع خطأ التقريب: $\frac{h^4}{30} f^{(4)}(c)$.

ملاحظة:

سبب تسميتها صيغة الخمس نقاط بالرغم من استخدمنا 4 نقاط هو طريقة اشتقاق الصيغة التي تحتم وجود النقاط الخمس.

◄◄ مثال:

استخدم الصيغة السابقة لتقريب f'(0.8) حيث f(x) = cos x و h= 0.01.

$$f'(0.8) \approx \frac{1}{12(0.01)}(f(0.78) - 8f(0.79) + 8f(0.81) - (0.82)) = -0.71735609$$

ملاحظة:

تستخدم هذه الصيغة قيم f على طرفي x وإذا تعذر وجود مثل هذه القيم فإننا نستخدم صيغة أخرى تستخدم قيم f على يمين x: x + h، x + 2h، x+3h, x + 4h:

وهذه الصيغة أيضاً ذات خمس نقاط.

$$f'(x)=\frac{-25f(x)+48f(x+h)-36f(x+2h)+16f(x+3h)-3f(x+4h)}{12h}$$

$$+\frac{f^{(5)}(c)}{5}h^4 : c\in[x, x+4h]$$

4.3 صيغة الثلاث نقاط لتقريب المشتقة الثانية

إذا جمعنا مفكوك متسلسلة تايلر للمقدارين:

$$f(x+h)=f(x)+hf'(x)+\frac{h^2}{2}f''(x)+\frac{h^3}{6}f'''(x)+\frac{h^4}{24}f^{(4)}(c_1)$$

$$f(x-h)=f(x)-hf'(x)+\frac{h^2}{2}f''(x)-\frac{h^3}{6}f'''(x)+\frac{h^4}{24}f^{(4)}(c_2)$$

يصبح لدينا بعد جعل f"(x) في طرف:

$$f''(x)=\frac{1}{h^2}(f(x-h)-2f(x)+f(x+h))-\frac{h^2}{12}f^{(4)}(c)$$

حيث: $c\in [x-h, x+h]$

مثال:

احسب f"(0.5) حيث $f(x) = xe^{2x} - \sin x$ ، $h = 0.05$

الحل:

الإجابة الدقيقة: $f'(x) = e^{2x} + 2xe^{2x} - \cos x$

$f''(x) = 2e^{2x} + 2(e^{2x} + 2xe^{2x}) + \sin x$

$f''(0.5) = 16.78911651$

الحل العددي:

$$f''(0.5)\cong\frac{1}{(0.05)^2}[f(0.45)-2f(0.5)+f(0.55)]=16.81168$$

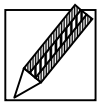
مثال:

احسب f"(0.5) حيث $f(x) = xe^{2x} - \sin x$ و $h = 0.5$

الحل:

$$f''(0.5) \cong \frac{1}{(0.5)^2}[f(0) - 2f(0.5) + f(1)] = 19.1526$$

التدريب (10)



في المثال السابق احسب f''(0.5) حيث h = 0.01

ملاحظة:

إعتماداً على وجود بيانات عند قيم معينة أو عدم وجودها يتم اختيار الطريقة المناسبة، فمثلاً عدم وجود معلومات عن قيم الدالة عند f(x) يتحتم علينا البحث عن صيغ لا تتطلب معرفة f(x) مثل صيغة الفروق الوسطى:

$$f(x) = \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h}$$

◄◄ مثال:

ليكن f(x) = cosx، عند تطبق صيغة الفروق الوسطى عند x = 0.8 لتقريب f'(0.8) لقيم h: 10^{-1} ، 10^{-2}، .... ، 10^{-8}.

Step-Size	*Numerical Approximation*	*Absolute Error*	*Error* $\div h^2$
10^{-1}	−0.7161610951	$1.195e-03$	0.119499583
10^{-2}	−0.7173441350	$1.196e-05$	0.119558751
10^{-3}	−0.7173559713	$1.196e-07$	0.119559373
10^{-4}	−0.7173560897	$1.196e-09$	0.119560950
10^{-5}	−0.7173560909	$1.489e-11$	0.148872026
10^{-6}	−0.7173560909	$1.842e-11$	18.41937713
10^{-7}	−0.7173560906	$2.591e-10$	25913.63790
10^{-8}	−0.7173560967	$5.847e-09$	58470902.56
10^{-9}	−0.7173560634	$2.746e-08$	27459600482

إذا أخذنا $\in = 2.2204 \times 10^{-16}$ واستخدمنا $|f''(x)| \le M = 1$ فإن أفضل خيار لقيمة h هو:

$$h_{opt} = \left(\frac{3 \in}{1}\right)^{\frac{1}{3}} \cong 8.7335 \times 10^{-6}$$

أيضاً قيمة المقدار:

$$\left| f'(x) - \frac{f(x + h_{opt}) - f(x - h_{opt})}{2h_{opt}} \right| \approx 7.888 \times 10^{-12}$$

تتناسب مع النتائج المدونة في الجدول السابق.

درست عزيزي الدارس، كيف نستفيد من مفكوك متسلسلة تايلر في تقريب اشتقاق الدالة. ومن الطرق المستخدمة أيضاً إيجاد حدودية استكمال للبيانات المجدولة، وأشهرها حدودية لاجرانج للاستكمال وهي تعتمد على عمل حدودية $P_n(x)$ لها نفس قيم $f(x)$ عند $n+1$ من النقاط.

طريقة أخرى تستخدم في تقريب التكاملات من خلال تحديد المعاملات (undetermined Coefficients) وسنكتفي هنا بشرح إحدى الطرق الفاعلة وهي عنوان القسم القادم.

5.3 استكمال ريتشاردسون

Richardson Extrapolation

تعتبر طريقة استكمال ريتشاردسون من الطرق التي تعطي نتائج أفضل من نظيراتها مقارنة مع كمية الحسابات البسيطة المرافقة لها.

لنفرض أن $R(h)$ هي صيغة لها $O(h^2)$ لتقريب القيمة T: لتكن صيغة الخطأ لتقريب $R(h)$ إلى T هي كما يلي:

$$T = R(h) + C_1 h^2 + O(h^4) \qquad (*)$$

حيث C_1 ثابت. لنستبدل h بالمقدار $\frac{h}{2}$ ونحصل على تقريب أفضل:

$$T = R\left(\frac{h}{2}\right) + C_1\frac{h^2}{4} + O(h^4)$$

وبضرب المعادلة الأخيرة بالمقدار (4) وطرح المعادلتين:

$$T = \frac{4R\left(\frac{h}{2}\right) - R(h)}{3} + O\left(h^4\right)$$

لنعرف: $R_1(h) = R(h)$ ثم $R_2(h) = \frac{4R_1\left(\frac{h}{2}\right) - R_1(h)}{3} + O\left(h^4\right)$

ولذلك نستطيع أن تعرف متتالية من التقريب إلى T كما في الجدول:

$R_1(h)$	
$R_1(h/2)$	$R_2(h)$
$R_1(h/4)$	$R_2(h/2)$
$R_1(h/8)$	$R_2(h/4)$

ولعلك تلاحظ، عزيزي الدارس، بأن المقدار $R_1(h/2^k)$ سيكون له رتبة $O\left(\left(\frac{h}{2k}\right)^2\right)$ بينما $R_2\left(\frac{h}{2^k}\right)$ له رتبة $O\left(\left(\frac{h}{2^k}\right)^4\right)$

لنفرض أن المعادلة (*) يمكن أن تحوي ثابت C_2 بحيث أن:

$$T = R(h) + C_1h^2 + C_2h^4 + O(h^6)$$

وهذا سيؤدي بالتأكيد إلى إمكانية إضافة عمود ثالث في الجدول أعلاه يحوي المدخلات $R_3(h)$ ، $R_3(h/2)$ عن طريق تعريف:

$$R_3(h) = \frac{4^2 R_2\ (h/2) - R_2(h)}{4^2 - 1}$$

ولاحظ أن: $R_3\left(\frac{h}{2^k}\right)$ سيكون له رتبة $O\left(\left(\frac{h}{2^k}\right)^6\right)$

ويمكن الاستمرار بإضافة عدد m من الأعمدة بشرط أن:

$$T = R(h) + \sum_{j=1}^{m-1} C_j\, h^{2j} + O(h^{2m})$$

حيث C_j ثوابت معينة، ويمكن التعبير عن استكمال ريتشاردسون

$$R_j(h) = \frac{4^{j-1} R_{j-1}\ (h/2) - R_{j-1}(h)}{4^{j-1} - 1}$$

حيث $j = 2, 3, ..., m$

◄◄ مثال:

ليكن $x = 2.0$ ، $h = 0.2$ و $f(x) = xe^x$

إن صيغة الفروق الوسطى التي لها $O(h^6)$ تكتب على النحو التالي:

$$f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} - \frac{h^2}{6} f'''(x) - \frac{h^4}{120} f^{(5)}(x) + O(h^6)$$

وبمقارنة استكمال ريتشاردسون مع المعلومات أعلاه:

$$R(h) = \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h}$$

$$C_2 = -\frac{1}{120} f^{(4)}(x) \quad \text{و} \quad C_1 = -\frac{1}{6} f^{(''')}(x)$$

لاحظ أن:

$$R(h) = R(0.2) = \frac{f(2.2) - f(1.8)}{0.4} = 22.414160$$

أيضاً:

$R(0.1) = 22.228780$

$R(0.05) = 22.182564$

وتستطيع إكمال بقية الحسابات لنحصل على الجدول التالي:

$R_1(0.2)$	$= 22.414160$	
$R_1(0.1)$	$= 22.228786$	$R_2(0.2) = 22.166995$
$R_1(0.05)$	$= 22.182564$	$R_2(0.1) = 22.167157$
		$R_3(0.2) = 22.167168$

مع العلم بأن الحل الدقيق هو:

$f'(2.0) = 22.167168$

وهذا ما أكدنا سابقاً بأن هذه الطريقة فعّالة في الحصول على إجابات ذات أخطاء قليلة.

◄◄ مثال:

لنعرّف الرمز: $D(h) = \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h}$

لذلك:

$f'(x) \approx D(h) + Ch^2 \qquad (*)$

وباستخدام $2h$

$f'(x) \approx D(2h) + 4Ch^2$

وبضرب المعادلة (*) بالمقدار (4) وطرحها من المعادلة الأخيرة نحصل على:

$$3f'(x) \approx 4D(h) - D(2h) = 4\left(\frac{f_1 - f_{-1}}{2h}\right) - \frac{f_2 - f_{-2}}{4h}$$

لذلك:

$$f'(x) \approx \frac{f_{-2} - 8f_{-1} + 8f_1 - f_2}{12h}$$

وهذه صيغة الفروق الوسطى من الرتبة الرابعة.

لكنك تعلمت من الأمثلة السابقة بأنه عندما $f(x) = \cos x$ و $h = 0.01$

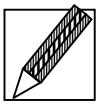
فإن: $D(h) = -0.717344150$ كذلك تستطيع حساب:

$$D(2h) = \frac{\cos(0.82) - \cos(0.78)}{0.04} = -0.717308275$$

لذلك:

$$f'(0.8) = \frac{4D(h) - D(2h)}{3} = -0.717356108$$

تدريب (10)



ليكن $f(x) = xe^x$

(1) كوّن جدول قيم f في الفترة [1.8, 2.2] و $h = 0.1$

(2) قرّب $f'(2.0)$ باستخدام صيغ ذات نقطتين – ثلاث نقاط وخمس نقاط.

(3) قرّب $f''(2.0)$ باستخدام صيغ ذات ثلاث نقط وخمس نقاط علماً بأن:

$f'(2.0) = 22.167168$, $f''(2.0) = 29.556224$

أسئلة تقويم ذاتي



1- لماذا نلجا إلى استخدام التفاضل العددي؟

2- ما سبب شيوع استخدام مفكوك متسلسلة تايلر في تقريب الاشتقاق العددي؟

3- ماذا نعني بخطأ البتر Truncation Error؟

4- اشرح باختصار طريقة استكمال ريتشاردسون؟

4. أمثلة عامة على الوحدة

◄◄ مثال (1)

لتكن $f(t) = \cosh t$ أوجد $f'(3.1)$ ؟

h	القيمة الأمامية	القيمة الوسطية	القيمة الخلفية	القيمة الحقيقية	الخطأ
0.05	11.06687	11.08107	11.06756	11.07645	0.00958, 0.00642, 0.00889
0.0025	11.0741	11.07761	11.07419	11.07645	0.00235, 0.00116, 0.00226

◄◄ مثال (2)

اشتق الفروق الوسطى لثلاثة نقاط، بحيث أن:

$$f'(t) \cong a_{-1} f(t- h) + a_0 f(t) + a_1 f(t+h)$$

الحل:

الآن باستخدام قاعدة تايلر:

$$f(t-h) = f(t) - f'(t)h + \frac{1}{2}f''(t)h^2 - \frac{1}{6}f'''(t)h^3 + \ldots$$

$$f(t+h) = f(t) + f'(t)h + \frac{1}{2}f''(t)h^2 + \frac{1}{6}f'''(t)h^3 + \ldots$$

$$\Rightarrow a_{-1} f(t-h) + a_0 f(t) + a_1 f(t+h)$$

$$= a_{-1}\left[f(t) - f'(t)h + \frac{1}{2} f''(t)h^2 - \frac{1}{6} f'''(t)h^3 + \ldots \right] + a_0 f(t) + a_1 \left[f(t) + f'(t)h + \frac{1}{2} f''(t)h^2 + \frac{1}{6} f'''(t)h^3 + \ldots \right]$$

$$= (a_{-1} + a_0 + a_1) f(t) + (a_1 - a_{-1}) hf'(t) + \frac{1}{2}(a_{-1} + a_1) h^2 f''(t) + \frac{1}{6}(a_1 - a_{-1}) f'''(t) h^3 + O(h^4)$$

بما أننا نجد قيمة تقريبية لـ $f'(t)$، لذلك سيتكون النظام التالي بالنسبة لـ a_0 ، a_1، a_{-1}

1

$$a_{-1} + a_0 + a_1 = 0$$
$$(a_1 - a_{-1})h = 1$$
$$a_{-1} + a_1 = 0$$

بعد حل هذا النظام سينتج:

$$a_1 = \frac{1}{2h} \Rightarrow$$

$$a_{-1} = \frac{-1}{2h}$$

$$a_0 = 0$$

$$\Rightarrow f'(t) \cong a_{-1} f(t-h) + a_0 f(t) + a_1 f(t+h) = \frac{f(t+h) - f(t-h)}{2h}$$

مع وجود الخطأ التالي:

$$f'(t) - \frac{f(t+h) - f(t-h)}{2h} = O(h^2)$$

◄◄ مثال (3)

إذا كانت: $f(t) = e^t$، أوجد $f'(0.5)$

الحل:

في هذا المثال قيم الأخطاء تكون متناقضة بداية، ولكن عندما نختار قيمة ابتدائية $h = 0.01$ فإن الخطأ سوف يتزايد. بما أن $|f^{(3)}(t)| = e^t \leq 2.01376$

$\forall\ t \in [0.5, 0.7]$

واستخدمنا خمسة قيم رقمية، بمعنى:

$$\in = \frac{1}{2} \times 10^{-5} = 0.000005$$

فإن:

$$h^* = \left(\frac{6 \in}{M}\right)^{1/3} = 0.0246$$

◄◄ مثال (4)

قانون شبه المنحرف:

$$E(f) = \frac{-h^3}{12} f^{(4)}(n)$$

$$\Rightarrow E(P_k) = 0 \qquad , k = 0, 1, 2, 3,$$

◄◄ مثال (5)

أوجد: $I(f) = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx$

n	Closed error	Open error
0		0.2146018
1	0.0353981	0.0107556
2	0.0020648	0.0020528
3	0.0007828	0.0013353
4	0.0001312	0.0051343
5	0.0000715	0.0001985

* صيغة النقطتان المغلقة (قانون شبه المنحرف)

$$h = \frac{(b-a)}{1}$$

$$\Rightarrow -\frac{h^3}{12} f^{(2)}(n) = -\frac{(b-a)^3}{12} f^{(2)}(n) = -0.0833(b-a)^3 f^{(2)}(n)$$

* صيغة النقطتان المفتوحة التي تملك خطأ (n =1) داخل الجدول:

$$h = \frac{(b-a)}{3}$$

$$\Rightarrow \frac{h^3}{2} f^{(2)}(n) \int_{-1}^{2} s(s-k)\,ds = \frac{(b-a)^3}{36} f^2(n) = 0.0278(b-a)^3 f^{(2)}(n)$$

* صيغة (4) نقاط المفتوحة:

$$h = \frac{(b-a)}{5}$$

$$\Rightarrow \frac{95h^5}{144} f^{(4)}(n) \frac{19(b-a)^5}{9000} f^{(4)}(n) = 2.1111\times 10^{-004} (b-a)^5 f^{(4)}(n)$$

* صيغة (4) نقاط المغلقة:

$$h = \frac{(b-a)}{3}$$

$$\Rightarrow \frac{-3h^5}{80} f^{(4)}(n) = \frac{-(b-a)^5}{6480} f^{(4)}(n) = -1.5432 \times 10^{-004} (b-a)^5 f^{(4)}(n)$$

* صيغة (5) نقاط المغلقة:

$$h = \frac{(b-a)}{4}$$

$$-5.1670 \times 10^{-007} f^{(6)}(n)$$

* صيغة (5) نقاط المفتوحة:

$$h = \frac{(b-a)}{6}$$

$$\Rightarrow 1.0462 \times 10^{-006} f^{(6)}(n)$$

◄◄ مثال (6)

لديك الفترة [a, b] داخل القوة n ، بمعنى

الفترة k^{th} $(k \geq 1)$ $[x_{k-1}, x_k]$ هي فترة ، حيث:

$$x_k = a + kh$$

$$h = \frac{(b-a)}{n}$$

$$I(f) = \int_a^b f(t)dt = \sum_{k=1}^{n} \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(t)dt = \sum_{k=1}^{n} I^{(k)}(f)$$

حيث:

$$I^{(k)}(f) = \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(t)\, dt$$

لديك قاعدة شبه المنحرف:

$$I^{(k)}(f) \cong \frac{h}{2} \left[f(x_{k-1}) + f(x_k) \right]$$

وهذه تقابل:

$$I(f) \cong \hat{I}_T(f) = \sum_{k=1}^{n} \frac{h}{2}\left[f(x_{k-1} + f(x_k)\right] = \frac{h}{2}\left[f(a)+f(b)\right] + h\sum_{k=1}^{n} \frac{h}{2} f(x_k)$$

◄◄ مثال (7)

$$I(f) = \int_0^{\pi/2} \cos t \, dt$$

كم عدد الفترات لحساب التكامل مع خطأ 0.0002؟

$$\left|f^{(2)}(t)\right| = \left|\cos t\right| \le 1 \qquad \Rightarrow M = 1$$

بما أن $\in = 0.0002$ ، $b - a = \frac{\pi}{2}$ ، إذاً:

$$\sqrt{\frac{M(b-a)^3}{12 \in}} = 40.18$$

إذا يوجد على الأقل (41) فترة سوف تستعمل.

في الحقيقة يوجد فقط (33) فقرة.

والسبب أن (41) قيمة مرتفعة؛ لأن الحسابات تكون (based) لأكبر قيمة لـ $|f^{(2)}(t)|$.

◄◄ مثال (8)

قارن باستخدام قانون شبه المنحرف:

$$\int_0^1 t^{1/4} \, dt$$

h	I_n	$R_{\frac{h}{4}}$	P
$\frac{1}{2}$	0.6704482		
$\frac{1}{4}$	0.7448520		
$\frac{1}{8}$	0.7765077	2.33	1.22
$\frac{1}{16}$	0.7900672	2.35	1.23
$\frac{1}{32}$	0.7958100	2.36	1.24
$\frac{1}{64}$	0.7982348	2.37	1.24
$\frac{1}{128}$	0.7992570	2.37	1.25
$\frac{1}{256}$	0.7996873	2.38	1.25

$p \cong 1.25$

$$E(f) = \frac{-(b-a)h^2}{12} f^{(2)}(n)$$

سوف نستثني الرتبة المتقاربة $p = 2$

هذه الدالة قيمتها متصلة على الفترة $[a,b]$ $f^{(2)}(t)$.

لكن $f(t) = t^{\frac{1}{4}}$ غير قابل للاشتقاق عندما $(t = 0)$.

◄◄ مثال (9)

الفروق الوسطية لثلاثة نقاط:

$$I \equiv f'(t) \approx \frac{f'(t+h) - f(t-h)}{2h}$$

⇐ باستخدام قانون تايلر:

$$f(t+h) = \sum_{k=0}^{6} \frac{h^k}{k!} f^{(k)}(t) + O(h^7)$$

$$f(t-h) = \sum_{k=0}^{6} \frac{(-h)^k}{k!} f^{(k)}(t) + O(h^7)$$

$$\Rightarrow \frac{f(t+h) - f(t-h)}{h} = f'(t) + \frac{1}{6} h^2 f^{(3)}(t) + \frac{1}{120} h^4 f^{(5)}(t) + O(h^6)$$

$$\Rightarrow I - \frac{f(t+h) - f(t-h)}{h} = -\frac{1}{6} h^2 f^{(3)}(t) - \frac{1}{120} h^4 f^{(5)}(t) + O(h^6)$$

$$\Rightarrow k_1 = -\frac{1}{6} f^{(3)}(t)$$

$$k_2 = -\frac{1}{120} f^{(5)}(t)$$

لديك $f(t) = t^3 e^{2t}$، لحساب $f'(0.5)$:

$$R_{0.0} = I_{0.1}^{(0)} = \frac{f(0.6) - f(0.4)}{(2)(0.1)} = 2.8735532$$

– الجدول الآتي يمثل الخطأ في الفروق الوسطية لثلاثة نقاط:

$R_{0,0}$	$R_{1,0}$	$R_{2,0}$
1.5527e-1	3.858e-2	9.63 e-3
	$R_{1,1}$	$R_{2,1}$
	3.0 e-4	1.93 e-5
		$R_{2,2}$
		7.15 e-8

$$R_{1,0} = I_{0.05}^{(0)} = \frac{f(0.55) - f(0.45)}{(2)(0.05)} = 2.7568679$$

$$R_{2,0} = I_{0.025}^{(0)} = \frac{f(0.525) - f(0.4475)}{(2)(0.025)} = 2.7279139$$

$$R_{1,1} = I_{0.05}^{(1)} = \frac{4R_{1,0} - R_{0,0}}{3} = 2.7179728$$

$$R_{2,1} = I_{0.025}^{(1)} = \frac{4R_{2,0} - R_{1,0}}{3} = 2.7182626$$

$$R2,2 = I_{0.025}^{(2)} = \frac{16R_{2,1-} R_{1,1}}{15} = 2.7182819$$

ملاحظة: الحل الدقيق للدالة f'(0.5) هو:

$$f'(0.5) = 2.71828183$$

◄◄ مثال (10)

من خلال طريقة جاوس لنقطة واحدة:

قيمة $t_0 = 0$ بالنسبة للدالة: $P1(t) = t$

الآن، باستخدام (Convection) (الانتقال).

$$L_{0,0}(t) = 1$$

إذا:

$$w_0 = \int_{-1}^{1} L_{0,0}(t)dt = \int_{-1}^{1} 1dt = 2$$

$$\int_{-1}^{1} f(t)dt \approx 2f(0)$$

* درجة التقريب ≤ 1.

ملاحظة:

طريقة جاوس لنقطة واحدة هي صيغة المنتصف للنقطة.

* في طريقة جاوس لنقطتين تكون قيم $t_0 = 0$ ، $t_1 = 0$

$$\Rightarrow P_2(t) = \frac{1}{3}\left(3t^2 - 1\right)$$

$$t_0 = -\sqrt{\frac{1}{3}} \quad , t_1 = \sqrt{\frac{1}{3}}$$

$$w_0 = \int_{-1}^{1} L_{1,0}(t)dt = 1$$

$$w_1 = \int_{-1}^{1} L_{1,1}(t)dt = 1$$

$$\Rightarrow \int_{-1}^{1} f(t)dt \cong f\left(\sqrt{\frac{1}{3}}\right) + f\left(\sqrt{\frac{1}{3}}\right)$$

* درجة التقريب ≤ 3 .

◄◄ مثال (11)

أوجد

$$I = \int_0^1 \frac{e^t}{\sqrt{t}} dt$$

الحل:

إفرض: $u = \sqrt{t}$

$$\Rightarrow I = 2\int_0^1 e^{u^2} du$$

بالمقارنة مع قاعدة سمبسون من أجل (32) فترة تكون قيمة الحساب 2.925304

◄◄ مثال (12)

$$I=\int_0^2 \frac{e^t}{\sqrt{1-t}}\,dt$$

الحل:

إفرض: $u=\sqrt{1-t}$

$$\Rightarrow I=2\int_0^1 e^{u^2-1}\,du$$

◄◄ مثال (13)

$$\int_{-1}^{1} \frac{e^t}{\sqrt{1-t}}\,dt=\int_0^{\pi} e^{\cos(\theta)}\,d\theta$$

◄◄ مثال (14)

$$I=\int_{-1}^{1} \frac{\sin(t)}{t}\,dt$$

هذا المقدار يملك قيمة غير معرفة عندما $(t=0)$.

بما أن $\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}=1$ ، إذاً ربما نحسب $\int_{-1}^{1} f(t)\,dt$ ، حيث:

$$f(t)=\begin{bmatrix} \frac{\sin t}{t} & , & t\neq 0 \\ 1 & , & t\neq 0 \end{bmatrix}$$

الخلاصة

عزيزي الدارس،،،

بدأنا دراسة التكاملات العددية وبالطريقة العامة (نيوتن – كوتس) وهي على الصيغة التالية: $I(f) \cong I_{n+1}(f) = \sum_{i=0}^{n} a_i f(x_i)$ حيث $\{a_i\}_{i=1}^{n}$ هي أوزان للمجموع و $\{x_i\}_{i=1}^{n}$ هي نقاط تنتمي إلى [a,b] ومرتبة: $x_1 < x_2 < \ldots < x_n$.

تم عرجنا على حدودية لاجرانج: $p_n(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i) L_i(x)$ وكيفية استخدامها في حساب التكامل العددي، للوصول إلى صيغة شبه المنحرف التالية:

$$I_2(f) = \int_{x_0}^{x_1} \left[\frac{x - x_1}{x_0 - x_1} f(x_0) + \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} f(x_1) \right] dx$$

$$= \frac{h}{2} \left[f(x_0) + f(x_1) \right]$$

شرحنا بالتفصيل بعد ذلك قاعدة سمبسون:

$$\int_{x_0}^{x_2} P_2(x) = \frac{h}{3} [f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)]$$

وتوصلنا إلى النظرية التالية لحساب التكامل العددي:

$$\int_a^b f(x) dx = \sum_{i=0}^{n} a_i f(x_i) + E_{n+1}(f)$$

ثم شرحنا كيف نحصل على قاعدة شبه المنحرف المركبة على الصيغة التالية:

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{h}{2} \left[f(a) + f(b) + 2 \sum_{j=1}^{n-1} f(x_j) \right] - \frac{(b-a) h^2}{12} f''(c)$$

وكذلك صيغة سمبسون المركبة على النحو التالي:

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{j=1}^{m} \int_{x_{2j-2}}^{x_{2j}} f(x)dx$$

$$= \sum_{j=1}^{m} \left[\frac{h}{3} \left[f(x_{2j-2}) + 4f(x_{2j-1}) + f(x_{2j}) \right] - \frac{h^5}{90} f^{(4)}(c_j) \right]$$

ودرسنا حدود الخطأ في كثير من الطرق وكيفية التحكم فيه، وكذلك شرحنا طريقة تكامل رومبيرج، وبينا أهميته في تقليل الأخطاء، وهو دمج لصيغة شبه المنحرف مع استكمال ريتشاردسون الخارجي، ثم وصلنا إلى الصيغة التالية:

$$R_{k,1} = \frac{1}{2} \left[R_{k-1,1} + h_{k-1} \sum_{i=1}^{2^{k-2}} f\left(a + \left(i - \frac{1}{2} \right) h_{k-1} \right) \right]$$

واختتمنا التكامل العددي بدراسة تكاملات جاوس، والتي ظهرت على الصيغة التالية:

$$\int_a^b f(x)dx \cong \sum_{i=1}^{n} f(x_i) \int_a^b L_i(x) = \sum_{i=1}^{n} w_i f(x_i)$$

أما بالنسبة للتفاضل العددي فدرسنا الفروق المنتهية والتي اعتبرت أساساً في حساب التفاضل العددي في هذه الوحدة، واستخدام مفكوك متسلسلة تايلر، ومنها أيضاً طرق الثلاث نقاط والخمس نقاط وغيرها واختتمنا هذه الوحدة بدراسة استكمال ريتشاردسون الخارجي.

نأمل أن تكون حققت الأهداف التي وضعت بداية الوحدة.

لمحة مسبقة عن الوحدة الدراسية التالية

عزيزي الدارس،

تبحث الوحدة الدراسية الرابعة في الحلول العددية لمسائل القيم الابتدائية للمعادلات التفاضلية العادية، وسنقسم الدراسة إلى طرق مختلفة، منها طرق الخطوة الواحدة، والطرق متعددة الخطوات، وذلك لحل المعادلات التفاضلية من الرتبة الأولى، ثم نعرّج على الحلول العددية لحل معادلات تفاضلية من رتب أعلى (ثانية).

إجابات التدريبات

التدريب (1)

$$I_2(f) = \frac{2}{2}\left[0^2 + 2^2\right] = 4$$

لحساب قيمة الخطأ الناتج نوجد القيمة الدقيقة للتكامل.

$$\int_0^2 x^2\,dx = \left.\frac{x^3}{3}\right|_0^2 = \frac{8}{3}$$

ونستطيع هنا تطبيق صيغة حساب الخطأ $-\frac{1}{12}f''(c)\,h^3$ فنجد:

$$-\frac{1}{12}f''(c)\,h^3 = \frac{-1}{12}(2)(2^3) = -1.33$$

أي أن قيمة خطأ التكامل لا يمكن أن تتجاوز 1.33- وللتأكد:

تكون قيمة الخطأ الناتج Error هي:

$$\text{Error} = \int_0^2 f(x)\,dx - I_2(f)$$

$$= 2.67 - 4 = -1.33$$

التدريب (2)

f(x)	الحل الدقيق	قاعدة شبه المنحرف	قاعدة سمبسون الثلثية
$\frac{1}{x+1}$	1.099	1.333	1.111
$\sqrt{1+x^2}$	2.958	3.326	2.964
sin x	1.416	0.909	1.425
e^x	6.389	8.389	6.421

التدريب (3)

أ. نحسب قيم الدالة كما يلي:

x_i	0.0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0
$f(x_i)$	1.0	0.99335	0.97355	0.94107	0.8967	0.84147

وبالتالي:

$$I_2(f)=\frac{h}{2}\left(f(x_1)+f(x_6)\right)+h\sum_{i=2}^{5}f(x_i)$$

$$= 0.2\ (3.80467) + 0.1\ (1.84147) = 0.94508$$

حسب متسلسلة تايلور:

$$f(x)=1-\frac{x^2}{3!}+\frac{x^4}{5!}-\frac{x^6}{7!}+\frac{x^8}{9!}$$

$$f'(x)=-\frac{2x}{3!}+\frac{4x^3}{5!}-\frac{6x^5}{7!}+\frac{8x^7}{9!}$$

$$f''(x)=-\frac{2}{3!}+\frac{12x^2}{5!}-\frac{30x^4}{7!}+\frac{56x^6}{9!}$$

في الفترة [0,1] فإن $|f''(x)|$ لا تتجاوز $\frac{1}{2}$ لأن:

$$-\frac{2}{3!}+\frac{12}{5!}-\frac{30}{7!}+\frac{56}{9!}+\ldots+\frac{1}{3}+\frac{1}{10}+\frac{1}{24}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots.\right)<\frac{1}{2}$$

وبالتالي فإن حدود الخطأ:

$$\frac{h^2}{12}|f''(c)|<\frac{h^2}{24}<\frac{1}{2}\,10^{-5}$$

لذلك $h<\sqrt{1.2}\ 10^{-2}$ أو $n=92$ من الفترات الجزيئة كحد أدنى.

ب. نعلم أن: $f(x)=\frac{1}{x}$ ، $f'(x)=\frac{-1}{x^2}$ ، $f''(x)=\frac{2}{x^3}$

كذلك:

$$\max_{[1,2]} |f''(x)| = 2$$

إذن: $$(b-a)\frac{h^2}{12}\max_{[1,2]}|f''(x)| = \frac{h^2}{6} < 10^{-2}$$

لذلك: $$h < \sqrt{0.06}$$

وباختيار $h = 0.2$ نجد أن:

$$I_2(f) = \frac{0.2}{2}\left[\frac{1}{1.0} + 2\left(\frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.4} + \frac{1}{1.6} + \frac{1}{1.8}\right) + \frac{1}{2.0}\right]$$
$$= 0.6956$$

بينما القيمة الدقيقة:

$$\int_1^2 \frac{1}{x}dx = \ln(2) - \ln(1) = 0.6931$$

لذلك فإن الخطأ 0.0025 لا يتجاوز 10^{-2} كما توقعنا.

التدريب (4)

صيغة شبه المنحرف المركبة على فترات جزئية عددها m :

$$|f''(x)| = |(x-2)\,e^{-x}| \le 2 \;\forall\; x \in [0, 2]$$

$$\frac{(b-a)h^2}{12}\max_{[0,2]}|f''(x)| \le 5\times10^{-9}$$

$$\Rightarrow \frac{4h^2}{12} \le 5\times10^{-9}$$

$$\Rightarrow h < 0.000122474$$

$$\Rightarrow M \ge 16330 \qquad \left(M = \frac{2}{h}\right)$$

صيغة سمبسون المركبة على فترات عددها 2M $\left(M = \frac{1}{h}\right)$

$$|f^{(4)}(x)| = |(x-4)\,e^{-x}| \le 4 \quad \forall \quad x \in [0, 2]$$

$$\frac{(b-a)\,h^{(4)}}{180}\ \max_{[0,2]}|f^{(4)}(x)| \le 5\times10^{-9}$$

$$\Rightarrow \frac{4h^4}{90} \le 5\times10^{-9}$$

$$\Rightarrow h < 0.0181818$$

$$\Rightarrow M \ge 55$$

التدريب (5)

لاحظ بداية أن:

$$\min_{[2,7]} f^{(4)}(x) = \min_{[2,7]} \frac{24}{x^5} = \frac{24}{2^5} = \frac{3}{4}$$

لذلك:

$$(b-a)\,\frac{h^4}{90}\left|f^{(4)}(c)\right| \le (7-2)\,\frac{h^4}{90}\,\frac{3}{4} = \frac{h^4}{48}$$

ولكن: $h = \frac{5}{2M}$ لذلك $\frac{625}{768\,M^6} \le 5\times10^{-9}$ أو $M \ge 113$ لذلك $h = \frac{5}{226}$

ولكن:

$$\int_2^7 \frac{1}{x}dx \approx \frac{h}{3}\left[f(2) + f(7) + 2\sum_{j=1}^{m-1} f(x_{2j}) + 4\sum_{j=1}^{m} f(x_{2j-1}) + f(b)\right]$$

$$= 1.252762969$$

بينما الحل الدقيق هو:

$$In(7) - In(5) = 1.252762968$$

التدريب (6)

نبدأ: $R_{1.1} = \frac{2-1}{2}\left[In(1) + In(2)\right] = 0.346574$

ثم نكمل لنحصل على:

J	$R(J,1)$	$R(J,2)$	$R(J,3)$
1	0.346574		
2	0.376019	0.385835	
3	0.383700	0.386260	0.386288

بينما القيمة الدقيقة للتكامل

$$\int_1^2 \text{Inx}\, dx = \left[x\,\text{Inx} - x\right]_1^2 = 0.386294$$

التدريب (7)

الإجابة الدقيقة: $f'(0.2) = -0.2214$

صيغة الفروق الخلفية:

$$f'(0.2) \approx \frac{f(0.21) - f(0.2)}{0.01}$$
$$= -0.22753018$$

وقيمة الخطأ: 0.00613

صيغة الفروق الوسطى

$$f'(0.2) \approx \frac{f(0.21) - f(0.19)}{0.02}$$
$$= -0.22142311$$

وقيمة الخطأ: 0.00002

التدريب (8)

$$f''(1) = \frac{1}{(0.2)^2}\left[f(0.8) - 2f(1) + f(1.2)\right]$$
$$= -1.27156$$

التدريب (9)

الحل العددي هو:

$$f''(1) \approx \frac{1}{(0.01)^2}\left[f(0.49) - 2f(0.5) + f(0.51)\right]$$

$$= 16.7900$$

نلاحظ أنه كلما كانت h اصغر كان الخطأ أقل.

التدريب (10)

.1

x	1.8	1.9	2.0	2.1	2.2
f(x)	10.889365	12.703199	14.778112	17.148957	19.855030

.2 نستخدم $h = 0.1$، $x = 2.0$

صيغة النقطتين: $$f'(x) = \frac{1}{2h}\left[f(x+h) - f(x-h)\right] - \frac{h^2}{6}f^{(3)}(C_1)$$

$$\cong \frac{1}{0.2}\left[f(2.1) - f(1.9)\right] = 22.228790$$

صيغة الثلاث نقاط:

$$f'(x) = \frac{1}{2h}\left[-3f(x) + 4f(x+h) - f(x+2h)\right] + \frac{h^2}{3}f^{(3)}(C_2)$$

$$\cong \frac{1}{0.2}\left[-3\ f(2.0) + 4f(2.1) - f(2.2)\right] = 22.032310$$

صيغة الخمس نقاط:

$$f'(x) = \frac{1}{12h}\left[f(x-2h) - 8f(x-h) + 8f(x+h) - f(x+2h)\right] + \frac{h^4}{30}f^{(5)}(C_3)$$

$$\cong \frac{1}{0.2}\left[f(1.8) - 8f(1.9) + 8f(2.1) - f(2.2)\right] = 22.166999$$

3. أما لتقريب f''(2.0) نستخدم أولاً h = 0.2 ثم h = 0.1:

h = 0.2

$$f''(x) = \frac{1}{h^2}\left[f(x-h) - 2f(x) + f(x+h)\right] - \frac{h^2}{12} f^{(4)}(C_4)$$

$$\cong \frac{1}{0.04}\left[f(1.6) - 2f(2.0) + f(2.2)\right] = 29.704275$$

$$f''(x) = \frac{1}{h^2}\left[f(x-h) - 2f(x) + f(x+h)\right] - \frac{h^2}{12} f^{(4)}(C_5)$$

$$\cong \frac{1}{0.01}\left[f(1.9) - 2f(2.0) + f(2.1)\right] = 29.593200$$

مسرد المصطلحات

الفروق المنتهية Finite Difference

مقدار الخطأ الناتج عن استخدام قاعدة سمبسون.

دالة وزنية Weight Function

هي دالة تم تعريفها عند شرح حدوديات لجندر، ويمكن عبرها تحديد الأوزان w_i عند معرفة النقاط x_i ضمن شروط خاصة.

خطأ البتر Truncations Error

وهو خطأ ينتج عن استخدام عدد محدود من حدود متسلسلة لا نهائية وحذف الباقي.

المراجع

- Epperson, **An Introduction to Numerical Methods and Analysis**. 1st ed., 2002.
- Hornbeck, **Numerical Methods**. 1st ed., 1975.
- Acton, **Numerical Methods that *Usually* Work**. 1st ed., 1970
- Burden and Faires, **Numerical Analysis**. 8th ed., 2005
- James L. Buchanan and Peter R. Turner. **Numerical Methods and Analysis**. McGraw-Hill: 1992.
- Samuel D. Conte and Carl de Boor. **Elementary Numerical Analysis: An Algorithmic Approach**. 3rd ed., Tokyo: McGraw-Hill, 1980.
- Lee W. Johnson and R. Dean Riess, **Numerical Analysis**. 2nd ed, Masachusetts: Addison-Wesley, 1982.
- J. L. Buchanan and P. R. Turner, **Numerical Mathods and Analysis**, McGraw-Hill, 1992.
- R. L. Burden and J. D. Faires, **Numerical Analysis**, 6th ed., Brooks/Cole, 1997.
- E. W. Cheney and D. Kincaid, **Numerical Mathematics and Computing**, 3rd ed., Brooks/Cole, 1994.
- L. V. Fausett, **Applied Numerical Analysis Using MATLAB**, Prentice-Hall, 1999.
- G. H. Golub, ed., **Studies in Numerical Analysis, MAA Studies in Math.**, v. 24, Mathematical Association of America, 1984.
- R. W. Hamming, **Introduction to Applied Numerical Analysis**, McGraw-Hill.
- F. B. Hildebrand, **Introduction to Numerical Analysis**, Dover, 1987.


الوحدة الرابعة
الحلول العددية لمسائل القيم
الابتدائية للمعادلات
التفاضلّية العادية

محتويات الوحدة

الموضوع	الصفحة
المقدمة	**143**
تمهيد	143
أهداف الوحدة	144
1. مسائل القيم الابتدائية للمعادلات التفاضلية العادية	**145**
2. طرق الخطوة الواحدة	**148**
1.2 طريقة أويلر	148
2.2 طريقة هن	162
3.2 صيغة متسلسلة تايلر	163
4.2 صيغ رنج – كتا	167
3. طرق الخطوات المتعددة	**181**
1.3 صيغ آدم باشفورث	182
2.3 صيغ آدم مولتون	188
4. حل المعادلات التفاضلية ذات الرتب العليا وأنظمة المعادلات	**193**
5. أمثلة عامة على الوحدة	**201**
الخلاصة	**206**
إجابات التدريبات	**208**
المراجع	**217**

المقدمة

تمهيد

عزيزي الدارس،

مرحبا بك إلى الوحدة الرابعة (الأخيرة) من مقرر التحليل العددي، وهي بعنوان: "الحلول العددية لمسائل القيم الابتدائية للمعادلات التفاضلية".

تتألف هذه الوحدة من خمسة أقسام رئيسة، يتعلق القسم الاول منها بمسائل القيم الابتدائية للمعادلات التفاضلية العادية، وهو قسم تمهيدي يمكنك بعد دراسته الانتقال لدراسة "طرق الخطوة الواحدة لحل المعادلات التفاضلية" في القسم الثاني من أقسام الوحدة، وهذا القسم يحتوى داخلة مجموعة كبيرة من الموضوعات المهمة، إذ يتناول بالشرح والتحليل مجموعة من صيغ الخطوة الواحدة، وهي صيغة أويلر، وصيغة هن، وصيغة متسلسلة تايلر، وصيغ رنج – كتا.

في القسم الثالث نتناول "طرق الخطوات المتعددة لحل المعادلات التفاضلية" وتشمل نوعين من الصيغ هما: صيغ آدم باشفورث، وصيغ آدم مولتون، وكل من هذين النوعين يحتوي على مجموعة من الأساليب لحل المعادلات التفاضلية ضمن شروط وخيارات محددة، وسنعرض في الوحدة معظم تلك الأساليب مع أمثلة عليها وتدريبات وأسئلة مناسبة.

في القسم الرابع نكون قد وصلنا إلى مستوى يؤهلنا لاستعراض حل المعادلات التفاضلية ذات الرتب العليا وأنظمة المعادلات، حيث سنعالج كيفية الوصول إلى حلول لتلك المعادلات والأنظمة من خلال استخدام الأدوات الواردة في الأقسام السابقة ضمن محددات واضحة، مع ايراد عدد كبير من الأمثلة والشروحات اللازمة.

وبمناسبة الحديث عن الأمثلة، وكما ورد في الوحدة السابقة، فقد أفردنا قسما خاصا للأمثلة العامة على الوحدة، وهو قسم يأتي ليحقق عدة أهداف: أولها مراجعة ما مر بنا في الوحدة عبر التمثيل لكل حالة من الحالات السابقة، والهدف الثاني المساهمة في مساعدتك على تطبيق ما تعلمته في الوحدة من خلال مجموعة من الأمثلة التي تشمل أفكارا متنوعة ووردت خلال دراستك للوحدة. وأعتقد أن هذا القسم سيكون مفيدا لك في التهيئة لأي اختبارات قادمة. نرجو أن نكون موفقين في تقديم هذه الوحدة بشكل مناسب، وأن تشاركنا برأيك فيما ورد فيها كي يتم تطويرها مستقبلا.

ومرحبا بك مرة أخرى.

أهداف الوحدة



عزيزي الدارس،،

بعد فراغك من دراسة هذه الوحدة، نأمل أن تكون قادراً على أن:

- **تشرح** مسائل القيم الابتدائية.
- **تعدد** الشروط لوجود حلول لتلك المسائل.
- **تستخدم** بعض الطرق لحل مسائل القيم الابتدائية عددياً.
- **تستخدم** الطرق العددية لحل مسائل القيم الابتدائية من عدة رتب.

1. مسائل القيم الابتدائية للمعادلات التفاضلّية

عزيزي الدارس،،

تعتبر المعادلات التفاضلية أفضل طريقة لوصف الظواهر الفيزيائية والظواهر الطبيعية رياضياً، وقد قدم العلماء نظريات عديدة لحل أنظمة المعادلات التفاضلية وبالتالي فهم أكبر لتلك الظواهر، لكن الكثير من تلك المعادلات لا يوجد لحلها صيغة دقيقة ومحددة، لذلك قدم لنا الإنجاز العلمي معلومات كثيرة عن الطرق العددية لحل تلك المعادلات.

ولكن قبل حل مسائل القيم الابتدائية عددياً. يجب ان نتعرف على ماهيتها.

إن مسائل القيم الابتدائية للمعادلات التفاضلية العادية هي عبارة عن معادلة تفاضلية عادية مع مجموعة من الشروط عند نقطة معينة واحدة.

فمثلاً: $3t\,y'' - y' = y \sin t$

$y(0) = 0 \;,\; y'(0) = 1$

هي عبارة عن واحدة من مسائل القيم الابتدائية لمعادلة تفاضلية من الرتبة الثانية. وسوف نستغرق الوقت الأكبر من هذا الجزء في التركيز على المعادلات التفاضلية من الرتبة الأولى والتي يرافقها شرط ابتدائي واحد:

$$y' = f(t, y) \quad , \quad y(t_0) = y_0$$

قبل أن نبدأ بعرض الطرق العددية لمسائل القيم الابتدائية بقي أن نعرف متى يكون لتلك المسائل حلول أو حلول وحيدة، ومتى لا يكون لها حل.

تعريف:

الدالة $f(t, y)$ تحقق شرط ليبشيتز (Lipschitz Condition) في المتغير التابع y في المجموعة $D \subseteq R^2$ إذا وجد ثابت $L > 0$ بحيث

$$|f(t, y_1) - f(t, y_2)| \le L\,|y_1 - y_2|$$

لكل $(t, y_1)\,,\,(t, y_2)$ في D

إن المجموعة $D \subseteq R^2$ تسمى محدبة (Convex) إذا كان لكل (t, y_1) , (t, y_2) في D فإن النقطة $[(1 - \lambda) t_1 + \lambda t_2, (1 - \lambda) y_1 + \lambda y_2]$

والمعنى الهندسي لمجموعة محدبة هو أنه أي نقطتين تقعان في المجموعة D فإن الخط الواصل بينهما يقع بأكمله في D.



نظرية:

ليكن $f(t, y)$ معرّفة على مجموعة محدبة D في R^2 فإذا وجد $L > 0$ بحيث

$$\left|\frac{\partial f}{\partial y}(t, y)\right| \le L$$

لكل $(t, y) \in D$ فإن f تحقق شرط ليبشيتز في D بالنسبة للمتغير y ويسمى L ثابت ليبشيتز (Lipschitz Constant)

نظرية:

ليكن $D = \{(t, y) : a \le t \le b , -\infty < y < \infty \}$ وليكن $f(t, y)$ دالة متصلة في D. إذا حققت الدالة f شرط ليبشيتز في D بالنسبة للمتغير y فإن مسألة القيمة الابتدائية.

$y'(t) = f(t, y(t))$, $a \le t \le b$, $y(a) = y_0$

لها حل وحيد هو $y(t)$ حيث $a \le t \le b$.

◄◄ مثال:

ليكن: $y' = 1 + t \sin(t\, y) : 0 \le t \le 2 \;,\; y(0) = 0$

باستخدام نظرية القيمة الوسيطة (Mean Value Theorem)

لأي عددين $y_2 > y_1$ فإن يوجد $c : y_1 < c < y_2$ بحيث أن:

$$t^2 \cos(t\, c) = \frac{\partial}{\partial y} f(t, c) = \frac{f(t, y_2) - f(t, y_1)}{y_2 - y_1}$$

لذلك لكل $y_2 > y_1$

$$| f(t, y_2) - f(t, y_1) = |y_2 - y_1|\, t^2 \cos(t\, c) \le 4\, |y_1 - y_2|$$

إذن f تحقق شرط ليبشيتز في المتغير y حيث ثابت ليبشيتز $L = 4$ أيضاً، حيثما f (t, y) دالة متصلة عندما $0 \le t \le 2$، $-\infty < y < \infty$ فإن النظرية السابقة تؤكد وجود حل وحيد لمسألة القيمة الابتدائية السابقة.

ملاحظات على النظرية:

1. أي دالة f (t, y) قابلة للاشتقاق بالنسبة إلى y بحيث $|f_y| \le L$ في الفترة I يحقق الشرط وتكون قيمة ثابت ليبشيتز : $L = \max_I |f_y(t, y|$
2. $f(t, y) = y$ تحقق شروط ليبشيتز بالرغم من أن المشتقة بالنسبة إلى y غير موجودة وهنا $L = 1$ وبصفة عامة $L = \max |f_y(t, y)|$ في الفترة I حيث f_y موجودة.

لذلك فإن f لا تحقق شروط لينتيز ولا يوجد للمسألة حل وحيد.

الحل الأول: $y = 0$ ، الحل الثاني: $y = \frac{t^2}{4}$

حلول لا نهائية:

$$y = \begin{cases} 0 & : 0 \le t \le a \\ \dfrac{(t-a)^2}{4} & : t > a \end{cases}$$

سنبدأ الآن بتعلم الطرق العددية لحل مسائل القيم الابتدائية من الرتبة الأولى على الشكل: $y' = f(t, y)$, $y(t_0) = y_0$

وسنفترض دائماً بان f تحقق شرط ليبشيتز.

أسئلة تقويم ذاتي

1- ما هي مسائل القيم الابتدائية للمعادلات التفاضلية العادية؟

2- ما المعنى الهندسي لمجموعة محدبة؟

2. طرق الخطوة الواحدة One - Step Methods

1.2 طريقة أويلر Euler's Method

عزيزي الدارس،

تعتمد طرق التقريب ذات الخطوة الواحدة على تقريب المسألة عند النقطة t_{n+1} باستخدام نقطة واحدة قبلها t_n.

والآن لنأخذ المسألة التالية على القيمة الابتدائية لمعادلة تفاضليّة من الرتبة الأولى:

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y) \quad : a \le t \le b \quad , \quad y(a) = y_0$$

يمكن تقريب حلها من خلال تقسيم الفترة [a, b] إلى عدد N من الفترات الجزئية متساوية القياس بحيث نحصل على نقاط t_n تبعد عن بعضها بعداً ثابتاً:

$$a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b$$

كذلك:

$$t_n = a + n\,h \;:\; n = 0, 1, \dots, N \quad : h = \frac{b-a}{N}$$

وعند تطبيق مفكوك متسلسلة تايلر وبافتراض أن $y \in c^2\,[a, b]$ فإنه

لكل $n = 0, 1, .., N$ يمكن كتابة قيمة الحل $y(t)$ عند النقطة t_{n+1}:

$$y(t_{n+1}) = y(t_n + h) = y(t_n) + h\,y'(t_n) + \frac{h^2}{2}y''(c_n)$$

حيث $t_n < c_n < t_{n+1}$. لاحظ أن $t_{n+1} - t_n = h$

وبعد التبسيط:

$$y(t_{n+1}) = y(t_n) + h\;f(t_n, y(t_n)) + \frac{h^2}{2}y''(c_n)$$

وعند إهمال الحد الأخير يصبح لدينا صيغة أويلر الأمامية أو للاختصار صيغة أويلر

$$y_{n+1} = y_n + h\,f(t_n, y_n) \quad : \; n = 0, 1, \dots, N-1$$

الرمز y_n للدلالة على تقريب القيمة الدقيقة $y(t_n)$ أي أن:

$$y_n \approx y(t_n)$$

◄◄ مثال:

في المسألة السابقة أثبت أن: $L = 1 \;:\; y' = |y|$

الحل:

$$f(t, y) = |y|$$

$$|f(t, y_2) - f(t, y_1)| = ||y_2| - |y_1|| = \begin{cases} (1)|y_2 - y_1| \text{ if } y_1\,y_2 \geq 0 \\ |y_2 + y_1| \text{ if } y_1 y_2 < 0 \end{cases}$$

وإذا كان $y_1\, y_2 < 0$ فإن $|y_2 - y_1| \le (1) |y_2 + y_1|$ وفي كلتا الحالتين f يحقق شرط ليبشيتز حيث $L = 1$.

تعريف:

إن مسألة القيمة الابتدائية موضوع جيداً (well - posed) إذا كان للمسألة

$$y'(t) = f(t, y(t)) \quad , \quad a \le t \le b \qquad y(a) = y_0$$

(a) حل وحيد $y(t)$ للمسألة.

(b) ثوابت موجبة $\in, \gamma$ مع الخاصية بأن حل وحيد $Z(t)$ للمسألة:

$$z'(t) = f(t, z) + \delta(t) \quad : \quad a \le t \le b \quad , z(a) = y_0 + \in_0$$

موجود مع تحقيق الشرط:

$$|z(t) - y(t)| < \gamma \in \qquad \forall a \le t \le b$$

عندما $|\delta(t)| < \in \quad , \quad |\in_0| < \in$

ومعنى التعريف السابق أنه إذا أعطينا سؤالاً له حل وحيد فإن أي تغيير بسيط في قيمة f ينتج عنه تغيير بسيط وليس كبيراً في الحل.

نظرية:

ليكن $D: \{(t, y) \quad : a \le t \le b \quad , -\infty < y < \infty \}$ فإن مسألة القيمة الابتدائية

$$y'(t) = f(t, y(t)) \ : a \le t \le b \ , y(a) = y_0$$

موضوعة جيداً عندما تكون f متصلة وتحقق شرط ليبشيتز في المتغير y في المنطقة D.

◄◄ مثال:

هل تحقق مسألة القيمة الابتدائية شرط ليبشيتز

$$y'(t) = \sqrt{y} \quad , \quad y(0) = 0$$

نفرض: $f(t, y) = \sqrt{y}$

$$\left|\frac{\partial f}{\partial y}\right| = \lim_{y_2 \to y_1} \frac{\left|\sqrt{y_2} - \sqrt{y_1}\right|}{\left|y_2 - y_1\right|} \qquad \text{ولنأخذ} \quad y_1 = 0$$

$$\Rightarrow \left|\frac{\partial f}{\partial y}\right| = \lim_{y_2 \to 0} \frac{\left|\sqrt{y_2}\right|}{\left|y_2\right|} = \infty$$

(وهذه القيمة ليست أقل من L)

◄◄ مثال:

استخدم صيغة أويلر لتقريب حل:

$$\frac{dy}{dt} = t + \sin t \quad : \; y(0) = 1$$

استخدم $h = 0.5 \, , \, 0.25$

الحل:

$h = 0.5$

$t_1 = t_0 + 0.5 = 0 + 0.5 = 0.5$

$y_1 = y_0 + h\, f(t_1) = 1 + 0.5\,(0 + \sin 0) = 1$

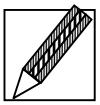
$t_2 = t_1 + 0.25 = 0.5$

$y_2 = y_1 + h\, f(t_1) = 1 + 0.25\,(0.25 + \sin 0.25) = 1.12435$

$t_3 = 0.75 \Rightarrow y_3 = y_2 + h\, f(t_2) = 1.36921$

$t_4 = 1 \Rightarrow y_4 = 1.72712$

تدريب (1)



كرر المثال السابق مستخدماً $h = 0.1$ وقارن مع نتائج$h = 0.25$

قاعدة (1):

لكل $x \geq -1$: $0 \leq (1 + x)^m \leq e^{mx}$ حيث m عدد صحيح موجب.

البرهان:

لنطبق مفكوك متسلسلة تايلر للدالة $f(x) = e^x$, $x_0 = 0$, $n = 1$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} e^c \qquad : \quad 0 < c < x$$

إذن:

$$0 \leq 1 + x \leq 1 + x + \frac{x^2}{2} e^c = e^x$$

ولأن $1 + x \geq 0$ فإن

$$0 \leq (1+ x)^m \leq (e^x)^m = e^{mx}$$

قاعدة (2):

إذا كان s, m عددان حقيقيان موجبان، و $\{a_n\}_0^k$ متتالية $(a_0 \geq 0)$ تحقق

$$a_{n+1} \leq (1 + m)\, a_n + s$$

لكل $n = 0, 1, \ldots, k$ فإن:

$$a_{n+1} \leq e^{(n+1)m} \left(\frac{s}{m} + a_0\right) - \frac{s}{m}$$

البرهان:

لنفرض أن n قيمة معينة (fixed)

$$\begin{aligned} a_{n+1} &\leq (1 + m)\, a_n + s \\ &\leq (1 + m)\, [(1 + m) a_{n-1} + s] + s \\ &\leq (1 + m\, \{(1 + m)\, [\, (1 + m)\, a_{n-2} + s\,] + s\, \} + s \\ &\vdots \end{aligned}$$

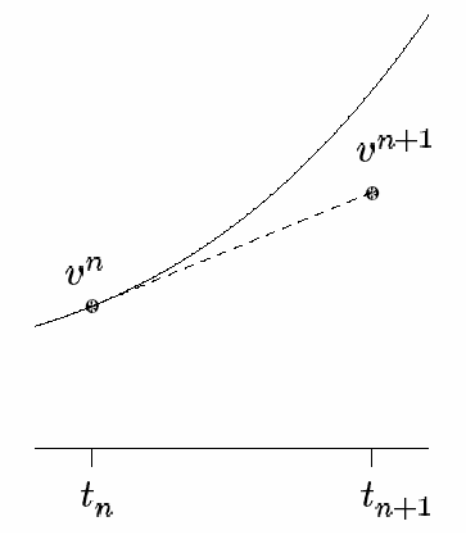
$$\leq (1 + m)^{n+1} a_0 + s \sum_{j=0}^{n} (1+m)^j$$

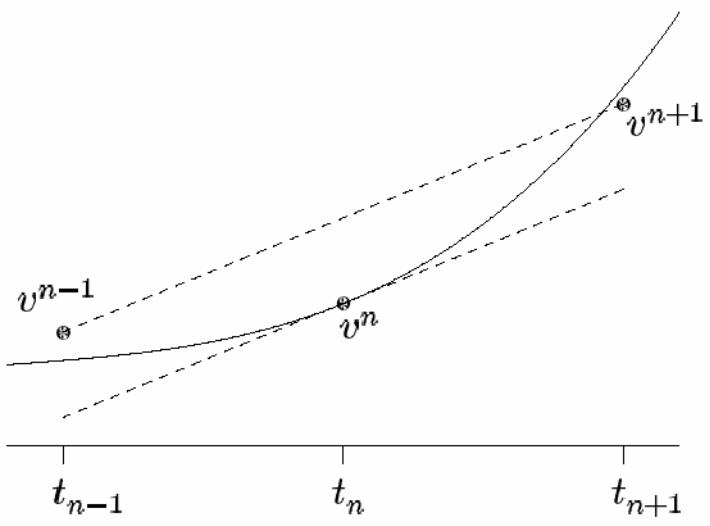
وباعتبار $f_n = f(t_n , y_n)$ فإن طريقة أويلر يمكن كتابتها على الشكل التالي:

$$y_{n+1} = y_n + h f_n \quad : n \geq 0$$

حيث: $y_0 = y(0)$

هندسياً، يمكن تفسير هذه الطريقة على الفترة الجزئية $[t_n, t_{n+1}]$ او حتى على مجموع كل الفترات الجزئية $[a, b]$ (انظر الشكل).





◄◄ مثال:

استخدم طريقة أويلر لتقريب حل مسألة القيمة الابتدائية:

$y' = -t\,y^2$: $y(2) = 1$

ثم احسب قيمة الخطأ إذا علمت بان الحل الدقيق هو:

$y(t) = \dfrac{2}{t^2 - 2}$: $t > \sqrt{2}$

ملاحظة:

استخدم: $t^2 - 2$, $h = 0.1$, $N = 5$

الحل:

نستخدم: $t_n = 2 + nh$

$y_1 = y_0 + h\,f_0 = y_0 + h\,(-t_0\,y_0^2) = 1 + 0.1\,(-2) = 0.8$

$y_2 = y_1 + h\,f_1 = y_1 + h\,(-t_1\,y_1^2) = 0.8 + 0.1\,(-1.344)$

$= 0.6656$

$y_3 = y_2 + h\,f_2 = y_2 + h\,(-t_2\,y_2^2) = 0.6656 + 0.1\,(-0.97465)$

$$= 0.56813$$

وبإكمال العملية نحصل على الجدول التالي:

t_n	y_n	$y(t_n)$	$\lvert y(t_n) - y_n \rvert$
2.0	*1.0000*	*1.0000*	
2.1	*0.8000*	*0.8299*	*0.0299*
2.2	*0.6656*	*0.7042*	*0.0386*
2.3	*0.5681*	*0.6079*	*0.0398*
2.4	*0.4939*	*0.5319*	*0.0380*
2.5	*0.4354*	*0.4706*	*0.0352*

◄◄ مثال:

كرر السؤال السابق على المسألة: $\frac{dy}{dt} = t - 2y \quad , \quad y(0) = 1$ في الفترة $[0, 1]$ مستخدماً $h = 0.2$ علماً بأن الحل الدقيق:

$$y = \frac{2t - 1 + 5e^{-2t}}{4}$$

الحل:

h = 0.2

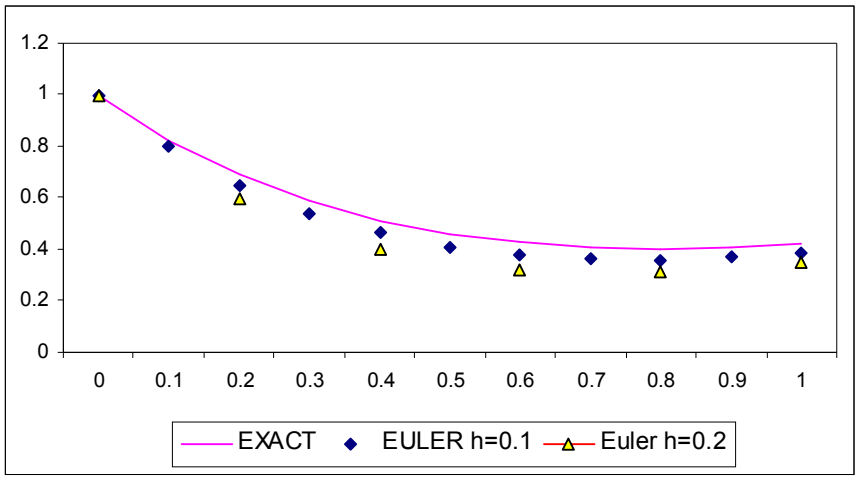
t	**y_Euler**	**y_exact**	**error**
0	1	1	0.0000
0.2	0.6	0.6879	-0.0879
0.4	0.4	0.511661	-0.1120
0.6	0.32	0.426493	-0.1060
0.8	0.312	0.402371	-0.0904
1	0.3472	0.419169	-0.0720

Max error = -0.1120 for h = 0.2

h = 0.1

t	y_Euler	y_exact	error
0	1	1	0.00000
0.1	0.8	0.823413	-0.02340
0.2	0.65	0.6879	-0.03790
0.3	0.54	0.586015	-0.04600
0.4	0.462	0.511661	-0.04970
0.5	0.4096	0.459849	-0.05020
0.6	0.37768	0.426493	-0.04880
0.7	0.362144	0.408246	-0.04610
0.8	0.359715	0.402371	-0.04270
0.9	0.367772	0.406624	-0.03890
1	0.384218	0.419169	-0.03500

أكبر خطأ: -0.05020 for h = 0.100000



تدريب (2)

أن تطبيق صيغة أويلر للمسألة (h = 0.1)

$y' = -y + t + 1$, $y(0) = 1$ $t \in [0, 1/2]$

يعطي حدوداً خطأ يمكن التنبؤ بها. وضح ذلك.

ولكن من عيوب النظرية الأخيرة هو صعوبة الحصول على (y″) في مسائل كثيرة، أو حتى الحصول على حد أعلى M له، وكذلك الحال بالنسبة للعدد L. ظهرت طرق حسابية أخرى لحساب الخطأ وتحليله وسنتابعها في المفاهيم التالية.

تعريف:

إن قيمة خطأ البتر الموضعية (Local Truncation error) للعلاقة:

$$y_0 = \alpha$$
$$y_{n+1} = y_n + h\, f(t_n, y_n) \quad : n = 0, 1, \ldots N - 1$$

هو المقدر:

$$\tau_{n+1}(h) = \frac{y_{n+1} - (y_n + h f(t_n, y_n))}{h}$$
$$= \frac{y_{n+1} - y_n}{h} - f(t_n, y_n) \quad : n = 0, 1, \ldots, N - 1$$

وسمي بالخطأ الموضعي لأنه يقصد به حساب الخطأ عند خطوة معينة، على افتراض أننا نعرف القيمة الدقيقة للحل عند الخطوة السابقة،وذلك لمنع تراكم الأخطاء والناتجة قبل الوصول عند تلك الخطوة المعينة. ولا ننس أنه خطأ بتر نتج عن متسلسلة لا نهائية كما سبق ذكرها.

والآن لنحسب خطأ البتر الموضعي، لصيغة أويلر: سبق أن تعلمنا أن:

$$y(t_{n+1}) = y(t_n) + h\, f(t_n, y(t_n)) + \frac{h^2}{2} y''(c_n)$$

وبسهولة نرى أن:

$$\tau_{n+1}(h) = \frac{h}{2} y''(c_n) \quad : c_n \in (t_n, t_{n+1})$$

ولذلك فإنه خطأ البتر الموضعي لصيغة أويلر لها رتبة O (h).

ملاحظة:

إذا كان: $|y''(t)| \le M$ في الفترة $[a, b]$ فإن:

$$|\tau_{n+1}(h)| \le \frac{h}{2} M$$

ولكن:

$$\sum_{j=0}^{n} (1+m)^j = \frac{(1+m)^{n+1} - 1}{m}$$

وباستخدام المساعدة السابقة بالصيغة:

$$0 \le (1+m)^{n+1} \le e^{(n+1)m}$$

نحصل على:

$$a_{n+1} \le e^{(n+1)m} \left(\frac{s}{m} + a_0 \right) - \frac{s}{m}$$

نظرية:

ليكن $y(t)$ هو الحل الوحيد لمسالة القيمة الابتدائية الموضوع جيداً:

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y) \quad : a \le t \le b \quad , y(a) = y_0$$

وليكن $\{y_n\}_0^N$ هو متتالية للحلول ناتجة عن استخدام صيغة أويلر

$$y_{n+1} = y_n + h\, f_n$$

إذا حققت f شرط ليبشيتز، وكان L ثابت ليبشيتز في المنطقة:

$$D = \{(t, y) \quad : a \le t \le b \quad , \quad -\infty < y < \infty \}$$

وإذا وجد ثابت M بحيث:

$$|y''(t)| \le M \qquad \forall\, t \in [a, b]$$

فإن:

$$|y(t_n) - y_n| \le \frac{h M}{2L} \{ e^{L(t_n - a)} - 1 \}$$

النظرية السابقة تحدد حدود الخطأ في صيغة تايلر لأي قيمة عند t_n وهي تأكيد على أن رتبة الخطأ هي O(h).

◄◄ مثال:

أوجد حدود الخطأ ثم طبق النتائج على صيغة أويلر:

$$h = 0.2 \quad : \quad y' = y - t^2 + 1 \quad : \quad 0 \le t \le 2 \quad , y(0) = 0.5$$

الحل:

الحل الدقيق:

$$y = (t + 1)^2 - \frac{1}{2} e^t$$

كذلك:

$$\left| \frac{\partial f}{\partial y} \right| = 1 = L$$

$$|y''(t)| = |2 - \frac{1}{2} e^t| \le \frac{1}{2} e^2 - 2 \quad \forall \, t \in [0, 2]$$

وأخيراً: $h = 0.2$

$$\frac{h M}{2L} \left[e^{L(t_n - a)} \right]$$

عند تطبيق صيغة أويلر ينتج ما يلي:

t_n	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0
قيمة الخطأ	0.0293	0.06209			
حدود الخطأ	0.03752				

ويمكننا تعريف خطأ البتر المتراكم ليكون مجموع أخطاء البتر الموضعية السابقة أما خطأ البتر الكلي فهو خطأ البتر الموضعي زائداً مجموع أخطاء البتر الموضعية السابقة.

تعريف:

ان صيغة θ (θ - Scheme) : $0 \le \theta \le 1$ هي صيغة من خطوة واحدة على شكل:

$$y_{n+1} = y_n + h \{(1 - \theta) f_n + \theta f_{n+1}\} \quad : n \ge 0$$
$$y_0 = y(0)$$

وأشهر صيغ θ:

(1) صيغة أويلر $(\theta = 0)$.

(2) صيغة شبه المنحرف:

$$(\text{Trapezoidal Rule}) \ (\theta = \frac{1}{2})$$

وتعطي بالعلاقة:

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}(f_n + f_{n+1})$$

(3) صيغة أويلر الخلفية $(\theta = 1)$ (Backward Euler Scheme). ويعطي بالعلاقة:

$$y_{n+1} = y_n + n\, f_{n+1}$$

ملاحظة:

نعلم أن: $f_{n+1} = f(t_{n+1}, y_{n+1})$ لذلك فإن y_{n+1} تظهر في طرفي الصيغ (2) و (3) لذلك تسميان صيغ ضمنية (Implicit methods) بينما الصيغة (1) هي صيغة واضحة (Explicit Method) وسيأتي دراسة الطرق الضمنية فيما بعد.

◄◄ مثال:

أوجد صيغة تتابعية للمعادلة $y' = y$ باستخدام صيغة أويلر الخلفية ثم أوجد خطأ البتر الموضعي ورتبته.

الحل:

طريقة أويلر الخلفية تعطي بالعلاقة:

$$y_{n+1} = y_n + h\, f(t_{n+1}, y_{n+1})$$
$$= y_n + h\, y_{n+1}$$

إذن: $y_{n+1} - h\, y_{n+1} = y_n$ أو:

$$y_{n+1} = \frac{1}{1-h} y_n$$

لحساب خطأ البتر الموضعي نستخدم مفكوك متسلسلة تايلر حول t_n

$$y(t_{n+1}) = y(t_n) + h\, y'(t_n) + \frac{1}{2} h^2\, y''(t_n) + O(h^3)$$
$$= y_n + h\, f(t_n, y_n) + \frac{1}{2} h^2\, y''(t_n) + O(h^3)$$

لكن طرح القيمة التقريبية من الدقيقة: $\tau_{n+1} = \frac{y_{n+1} - y(t_{n+1})}{h}$

$$= \frac{1}{2}[y_n + h\, f(t_{n+1}, y_{n+1}) - y_n - h\, f(t_n, y_n) - \frac{1}{2} h^2 y''(t_n) - O(h^3)]$$

$$= f(t_{n+1}, y_{n+1}) - f(t_n, y_n) - \frac{1}{2} h\, y''(t_n) - O(h^2)$$

والآن نستخدم مفكوك f حول (t_n, y_n):

$$f(t_{n+1}, y_{n+1}) = y'(t_{n+1}) = y'(t_n) + h\, y''(t_n) + O(h^2)$$
$$= f(t_n, y_n) + h\, y''(t_n) + O(h^2)$$

ونعوض قيمة $f(t_{n+1}, y_{n+1})$ في معادلة خطأ البتر الموضعي:

$$\tau_{n+1} = [\, f(t_n, y_n) + h\, y''(t_n) + O(h^2)\,] - f(t_n, y_n) - \frac{1}{2} h\, y''(t_n) - O(h^2)$$

$$= \frac{1}{2} h\, y''(t_n) + O(h^2) = O(h)$$

لذلك فإن هذه الطريقة لم تحسن قيمة الخطأ عن طريقة أويلر الأمامية. وهندسياً تعتمد على ميل المماس في نهاية الفترة عند t_{n+1} وليس عند t_n كما في طريقة أويلر الأمامية.

2.2 طريقة هن Heun's Method (أو طريقة أويلر المحسنة)

وهي طريقة ضمنية عبارة عن المتوسط بين صيغة أويلر الأمامية والخلفية:

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}(f_n + f_{n+1})$$

ويمكن كتابتها على شكل معادلتين معاً لتوقع الحل (Predictor) ومعادلة أخرى لتصحيحه (Corrector) قدر الإمكان:

المتوقع $\quad y^0_{n+1} = y_n + f(t_n, y_n)\, h$

المصحح $\quad y_{n+1} = y_n + \dfrac{f(t_n, y_n) + f(t_{n+1}, y^0_{n+1})\, h}{2}$

مثال:

استخدم طريقة هن لحل $y' = y - \frac{2}{y}$, $h = 0.1$: $y(0) = 1$

الحل:

$n = 0$ $\quad y_1^0 = y_0 + f(t_0, y_0)\, h$

$= 1 + (1)(0.1) = 1.1$

$$y_1 = 1.1 + \frac{f(0.1) + f(0.1,1.1)}{2}(0.1) = 1.1459$$

$n = 1$ $\quad y_2^0 = y_1 + f(t_1, y_1)\, h = y_1 + f)\,(0.1, 1.1459)\, h$

$= 1.1459 + f(0.1, 1.1459) = 1.2430$

$$y_2 = y_1 + \frac{f(t_1, y_1) + f(t_2, y_2^0)}{2}$$

$$= 1.1459 + \frac{f(0.1,1.1459) + f(0.2,1.2430)}{2} h$$

$= 1.2405$

والآن نعوّض مفكوك f_{n+1} في المعادلة الأخيرة:

$$\tau_{n+1} = \frac{1}{2}(f_{n+1} - f_n) - \frac{1}{2} h\, y''(t_n) - \frac{1}{3} h^2\, y''(t_n) + O(h^3)$$

$$= \frac{1}{2}[\, h\, y''(t_n) + \frac{1}{2} h^2\, y'''(t_n) + O(h^3)\,] - \frac{1}{2} h y''(t_n) - \frac{1}{3} h^2 y'''(t_n) + O(h^3)$$

$$= -\frac{1}{12} h^2\, y'''(t_n) + O(h^3) = O(h^2)$$

3.2 صيغة متسلسلة تايلر من الرتبة

m^{th} Order Taylor Series (m)

إن مفكوك متسلسلة تايلر من الرتبة m لحل $y(t)$ حول t_n عند t_{n+1} هو:

$$y(t_{n+1}) = y(t_n) + h\, y'(t_n) + \frac{h^2}{2} y''(t_n) + .. + \frac{h^m}{m!}\, y^{(m)}(t_n) +$$

$$\frac{h^{m+1}}{(m+1)!} y^{(m+1)}(c_n) \quad : c_n \in (t_n, t_{n+1})$$

نعلم أن:

$$y'(t) = f(t, y(t))$$
$$y''(t) = f'(t, y(t))$$

وبصفة عامة:

$$y^{(k)}(t) = f^{(k-1)}(t, y(t))$$

لذلك:

$$y(t_{n+1}) = y(t_n) + h\, f(t_n, y(t_n)) + \frac{h^2}{2} f'(t_n, y(t_n)) + \ldots + \frac{h^m}{m!} f^{(m-1)}(t_n, y(t_n)) + \frac{h^{m+1}}{(m+1)!} f^{(m)}(c_i, y(c_i))$$

تعلم بان الحد الأخير يمكن تجاهله للحصول على حل تقريبي، ونحصل على صيغة تايلر من الرتبة m:

$$y_0 = \alpha$$
$$y_{n+1} = y_n + h\, T^{(m)}(t_n, y_n) \qquad : n = 0, 1, \ldots, m-1$$

حيث:

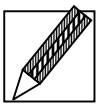
$$T^{(m)}(t_n, y_n) = f(t_n, y_n) + \frac{h}{2} f'(t_n, y_n) + \ldots + \frac{h^{m-1}}{m!} f^{(n-1)}(t_n, y_n)$$

لاحظ أن صيغة أويلر هي من الرتبة الأولى.

ويمكن التعبير عن صيغة هن بمعادلة واحدة:

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{2} h \left[f(t_n, y_n) + f(t_n + h, y_n + hf(t_n, y_n)) \right]$$

تدريب (3)



استخدم طريقة هن لتقريب $y(0.2)$, $y(0.4)$

$h = 0.2$, $y(0) = 0$, $y' = y + e^t$

◄◄ مثال:

أوجد رتبة خطأ البتر الموضعي لطريقة هن:

الحل:

مفكوك متسلسلة تايلر

$$y(t_{n+1}) = y(t_n) + h\, y'(t_n) + \frac{1}{2}h^2 y''(t_n) + \frac{1}{6}h^3 y'''(t_n) + O(h^4)$$

$$= y_n + h f_n + \frac{1}{2} h^2 y''(t_n) + \frac{1}{3}h^3 y'''(t_n) + O(h^4)$$

$$f_{n+1} = f(t_{n+1}, y_{n+1}) = y'(t_{n+1})$$

$$= y'(t_n) + h\, y''(t_n) + \frac{1}{2}h^2 y'''(t_n) + O(h^3)$$

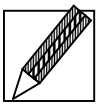
إذن

$$\tau_{n+1} = \frac{1}{h}(y_{n+1} - y(t_{n+1}))$$

$$= \frac{1}{h}[y_n + \frac{h}{2}(f_n + f_{n+1}) - y_n - h f_n - \frac{1}{2} h^2 y'''(t_n) - \frac{1}{3}h^3 y'''(t_n) - O(h^4)]$$

$$= \frac{1}{2}(f_{n+1} - f_n) - \frac{1}{2} h\, y''(t_n) - \frac{1}{3} h^2 y'''(t_n) - O(h^3)$$

تدريب (4)



ليكن $y' = y + e^t + ty$

$y(1) = 2$ $\quad : 1 \le t \le 3$

استنبط طريقة متسلسلة تايلر من الرتبة 4 ثم أوجد قيمة تقريبية للمقدار $y(1.2)$ حيث $h = 0.01$.

◄◄ مثال:

استخدم متسلسلة تايلر من الرتبة الثانية (h = 0.5) لتقريب:

$$y' = \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-t^2} \qquad : \; y(2)$$

$$y(0) = 0$$

$$y(t_{n+1}) = y(t_n) + h\, y'(t_n) + \frac{h^2}{2} y''(t_n) + O(h^3)$$

$$y'(t) = f(t, y)$$

$$y''(t) = f_t(t, y) + f_y(t, y)\, y'(t)$$

لذلك:

$$y(t_{n+1}) \cong y(t_n) + h\, f(t_n, y_n) + \frac{h^2}{2} [\; (f_t(t_n, y_n) + f_y(t_n, y_n)\, f(t_n, y_n))\;]$$

لذلك:

$$y_{n+1} = y_n + h \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-t_n^2} + \frac{h^2}{2}(-2t_n \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-t_n^2} + 0)$$

$$y_{n+1} = y_n + h \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-t_n^2} (1 - h\, t_n)$$

$n = 0$ $\quad y_1 = y_0 + h \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-t^2} (1 - h\, t_0) = 0 + 0.5 \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-0^2} (1 - 0.5(0)) =$ 0.564189

$n = 1$ $\quad y_2 = 0.564189 + 0.5 \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-0.5^2} (1-(0.5)(0.5)) = 0.893733$

$n = 2$ $\quad y_3 = 0.9975099$

$n = 3$ $\quad y_4 = 1.012376$

إذن: $\quad y(2) \approx y_4 = 1.012376$

4.2 صيغة رنج–كتا Runge - Kutta method

ربما تكون رنج – كتا من أكثر الطرق العددية استخداماً لحل المعادلات التفاضلية العادية، ويعود السبب في ذلك إلى كونها طرق ذات رتب عالية وحسابات ليست معقدة إذا ما قورنت مثلاً بكمية الحسابات الكثيرة في طريقة متسلسلة تايلر.

نظرية تايلر:

ليكن $f(t, y)$ وجميع مشتقاتها الجزئية متصلة من الرتبة $m + 1$ أو أقل في المنطقة: $D = \{ (t, y) \quad : a \le t \le b \quad , c \le y \le d \}$

وليكن $(t_0, y_0) \in D$ فإنه $\forall (t, y) \in D$ توجد نقطة (ζ, η) بحيث:

$$f(t, y) = P_m(t, y) + R_m(t, y)$$

حيث:

$$P_m(t, y) = f(t_0, y_0) + (t - t_0) \frac{\partial f}{\partial t}(t_0, y_0) + (y - y_0) \frac{\partial f}{\partial y}(t_0, y_0) +$$

$$\frac{1}{2!} \left((t - t_0)^2 \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} + 2 (t - t_0)(y - y_0) \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial y} + (y - y_0)^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)$$

$$+ \ldots + \left[\frac{1}{m!} \sum_{j=0}^{m} \binom{m}{j} (t - t_0)^{m-j} (y - y_0)^j \frac{\partial^m f}{\partial t^{m-j} \partial y^j}(t_0, y_0)\right]$$

$$R_m(t, y) = \frac{1}{(m+1)!} \sum_{j=0}^{m} \binom{m+1}{j} (t - t_0)^{m+1-j} (y - y_0)^j \frac{\partial^{m+1} f}{\partial t^{m+1-j} \partial y}(\zeta, \eta)$$

والدالة $P_m(t, y)$ ما هي إلاّ حدودية تايلر من الرتبة m في متغيرين، و $R_m(t, y)$ هو الباقي (Remainder) المرتبط مع $P_m(t, y)$

إن الصيغة العامة لطريقة رنج – كتا هي: $y_{n+1} = y_n + \phi(t_n , y_n , h)\, h$

وتمثل الدالة ϕ قيمة الميل في الفترة الجزئية $[t_n , t_{n+1}]$ وصيغتها العامة:

$$\phi = a_1 k_1 + a_2 k_2 + \ldots + a_m k_m$$

حيث a'_s هي ثوابت و k'_s هي كما يلي:

$$k_1 = f(t_n , y_n)$$
$$k_2 = f(t_n + \alpha_2 h , y_n + \beta_{21} k_1 h)$$
$$k_3 = f(t_n + \alpha_3 h, y_n + \beta_{31} k_1 h + \beta_{32} k_2 h)$$
$$\vdots$$
$$k_m = f(t_n + \alpha_m h , y_n + \beta_m k_1 h + \gamma_{m,2} k_2 h + \dots + \gamma_{m,m} k_{m-1} h)$$

فمثلاً إذا كان $a_2 = \frac{1}{2}$ فإن $a_1 = \frac{1}{2}$ و $\alpha_2 = \beta_{21} = 1$ ويصبح لدينا:

$$y_{n+1} = y_i + (\frac{1}{2} k_1 + \frac{1}{2} k_2) h$$
$$k_1 = f(t_n, y_n)$$
$$k_2 = f(t_n + h, y_n + k_1 h)$$

ولاحظ أن: k_1, k_2 هو الميل عند بداية الفترة الجزئية ونهايتها على التوالي، وهي نفس صيغة هن.

إذا كان $a_2 = 1$ فإن $a_1 = 0$ ، $\alpha_2 = \beta_{21} = \frac{1}{2}$ ويصبح لدينا صيغة المنتصف حيث:

$$y_{n+1} = y_n + k_2 h$$
$$k_1 = f(t_n, y_n)$$
$$k_2 = f(t_n + \frac{1}{2} h, y_n + \frac{1}{2} k_1 h)$$

وهي تحسب الميل عن منتصف الفترة الجزئية.

وأخيراً إذا كان $a_2 = \frac{2}{3}$ فإننا سنحصل على أقل خطأ بتر للصيغة العامة من الرتبة الثانية.

◄◄ مثال:

استخدم صيغة المنتصف ومقياس المرحلة $h = 0.25$ للمسألة

$$\frac{dy}{dt} = -2y + t \qquad , \quad y(1) = 2$$

صيغة المنتصف:

$$y(t + h) = y(t) + hf(t + \frac{h}{2}, y + h\, f(t, y) / 2)$$

ونبدأ من عند $(t_0, y_0) = (1, 2)$ ، $y(1.25)$

$y(1.25) = y(1) + (0.25)\ f(1.125, 2 + 0.125\ f(1, 2))$

$f(1, 2) = -3$

$y(1.25) = 2 + (0.25)\ f(1.125, 1.625) = 2 + (0.25)\ (-2.125) = 1.4688$

$y(1.5) = y(1.25) + (0.25)\ f(1.375, 1.4688 + 0.125\ f(1.25, 1.4688))$

$f(1.25, 1.4688) = -1.6876$

$y(1.5) = 1.4688 + (0.25)\ f(1.375, 1.2579) = 1.4688 + (0.25)\ (-1.1408) = 1.1836$

$y(1.75) = y(1.5) + (0.25)\ f(1.625, 1.1836 + 0.125\ f(1.5, 1.1836))$

$f(1.5, 1.1836) = -0.8672$

$y(1.75) = 1.1836 + (0.25)\ f(1.625, 1.0752) = 1.1836 + (0.25)(-0.5254) = 1.0522$

$y(2) = y(1.75) + (0.25)\ f(1.875, 1.0522 + 0.125\ f(1.75, 1.0522))$

$f(1.75, 1.0522) = -0.3544$

$y(2) = 1.0522 + (0.25)\ f(1.875, 1.0079) = 1.0522 + (0.25)\ (-0.1408) = 1.0170$

رنج – كتا من الرتبة الثالثة:

إذا كان $m = 3$ سنحصل على صيغة رنجا – كتا من الرتبة الثالثة وأحد الصيغ:

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{6}\ (k_1 + 4k_2 + k_3)\ h$$

حيث:

$$k_1 = f(t_n, y_n)$$

$$k_2 = f(t_n + \frac{1}{2}h\ ,\ y_n + \frac{1}{2}k_1\ h)$$

$$k_3 = f(t_n + h\ ,\ y_n - k_1 h + 2k_2\ h)$$

اشتقاق صيغة رنج – كتا من الرتبة الثانية:

إن صيغة رنج – كتا من الرتبة الثانية تكون على النحو التالي:

$$y_{n+1} = y_n + (a_1k_1 + a_2k_2)\, h \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

حيث:

$$k_1 = f(t_n , y_n)$$

$$k_2 = f(t_n + \alpha_2 h , y_n + \beta_{21} k_1 h)$$

ويتبقى علينا تحديد قيم الثوابت: $\beta_{21},\ \alpha_2,\ a_2,\ a_1$ عن طريق مساواة هذه الصيغة بصيغة تايلر من الرتبة الثانية والتي هي:

$$y_{n+1} = y_n + h\, T^{(2)}(t_n , y_n)$$

ولكن

$$T^{(2)}(t_n, y_n) = f(t_n , y_n) + \frac{h}{2} f'(t_n, y_n)$$

ولكن باستخدام قاعدة السلسلة (Chain Rule):

$$f'(t_n, y_n) = \frac{\partial f(t_n , y_n)}{\partial t} + \frac{\partial f(t_n , y_n)}{\partial y}\frac{dy}{dt}$$

فإن:

$$y_{n+1} = y_n + h\, f(t_n , y_n) + \frac{h^2}{2!}\left(\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt}\right) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

والآن قبل أن نساوي المعادلتين (1)، (2) معاً، نستخدم نظرية تايلر لمفكوك المتسلسلة بمتغيرين للمقدار k_2 حول $f(t_n , y_n)$

$$f(t_n + \alpha_2 h, y_n + \beta_{21} k_1 n) = f(x_n, y_n) + \alpha_2 h \frac{\partial f}{\partial t} + \beta_{21} k_1 h \frac{\partial f}{\partial y} + O(h^2)$$

والآن (1) يمكن إعادة كتابتها:

$$y_{n+1}=y_n+[a_1 f(t_n , y_n) + a_2 f(t_n, y_n) h + a_2 \alpha_2 h^2 \frac{\partial f}{\partial t} + a_2 \beta_{21} h^2 f(t_n, y_n) \frac{\partial f}{\partial y} + O(h^3)$$

$$= y_n+[a_1 f(t_n, y_n)+a_2 f(x_n, y_n)] h + [a_2 \alpha_2 \frac{\partial f}{\partial t} + a_2 \beta_{21} f(t_n, y_n) \frac{\partial f}{\partial y}] h^2+O(h^3) \quad ..(3)$$

والآن نقارن المعادلتين (2) و (3) لنحصل على:

$$a_1 + a_2 = 1 \qquad a_2\alpha_2 = \frac{1}{2} \qquad a_2\beta_{21} = \frac{1}{2}$$

وأصبح لدينا ثلاث معادلات وأربعة مجاهيل ونستطيع تعيين أي قيم لها، وتبقى الصيغة الناتجة من إحدى صيغ رنج – كتا من الرتبة الثانية.

صيغة رنج – كتا من الرتبة الرابعة:

لعل أشهر صيغ رنج– كتا هي الصيغة الكلاسيكية من الرتبة الرابعة:

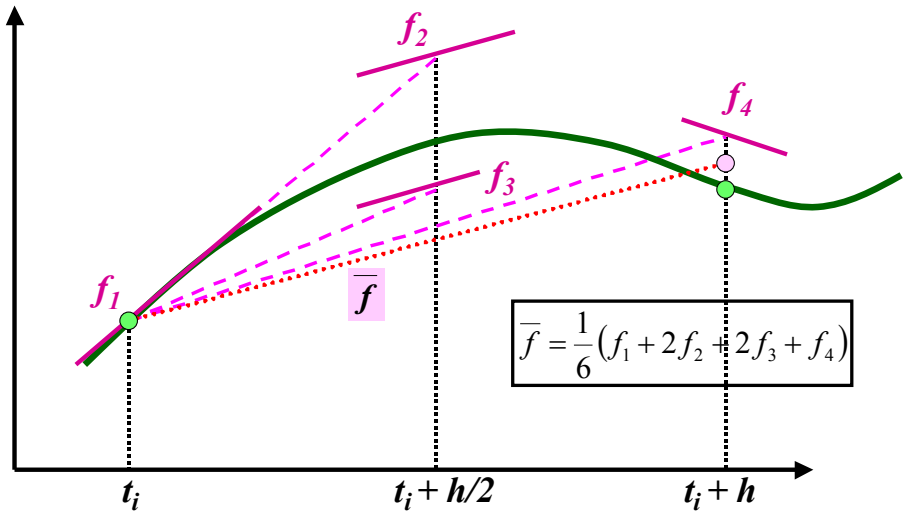
$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) h$$

$$k_1 = f(t_n , y_n)$$

$$k_2 = f(t_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}k_1 h)$$

$$k_3 = f(t_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}k_2 h)$$

$$k_4 = f(t_n + h, y_n + k_3 h)$$



والجدول التالي يوضح العلاقة بين عدد الحسابات لكل مقياس مرحلة h من صيغ رنج – كتا المختلفة وأفضل رتبة لخطأ البتر الموضعي:

عدد الحسابات للكل خطوة	2	3	4	$5 \le n \le 7$	$8 \le n \le 9$
أفضل رتبة لخطأ البتر الموضعي	$O(h^2)$	$O(h^3)$	$O(h^4)$	$O(h^{n-1})$	$O(h^{n-2})$

ملاحظة:

هناك بعض المراجع تكتب صيغ رنج – كتا بحيث تكون مقياس الخطوة (h) ضمن قيم k's أي أن:

$$y_{n+1} = y_n + \phi(t_n, y_n, h)$$

حيث:

$$\phi = a_1k_1 + a_2k_2 + \ldots + a_mk_m$$

$$k_1 = h\, f(t_n, y_n)$$

$$k_2 = h\, f(t_n + \alpha_2 h, y_n + \beta_{21}k_1)$$

$$k_3 = h\, f(t_n + \alpha_3 h, y_n + \beta_{31}k_1 + \beta_{32}k_2) \qquad \delta m_1\ m \qquad k_{m-1}$$

$$k_m = f(t_n + \alpha_m h, y_n + \beta_{m,1}k_1 + \gamma_{m,2}k_2 + \ldots + \gamma_{m,m}k_{m-1}$$

◄◄ مثال:

استخدم الصيغة الأخيرة لرنج – كتا من الرتبة الرابعة لتقريب (1) y مستخدماً $h = 0.25$ للمسألة $y' = t^2 - e^y \sin t \quad : y(0) = 1$

الحل:

في الفترة [0, 1]:

$$n = \frac{b-a}{h} = 4 \qquad , b = 1 \qquad , a = 0$$

لذلك فإننا سنحتاج لحساب: y_1, y_2, y_3, y_4 وسنبدأ بأن $y(0) = 1$

$$y_1 : k_1 = h\, f(t_0, y_0) = (0.25)\, f(0.1) = 0$$

$$k_2 = h\, f\left(t_0 + \frac{1}{2}h,\ y_0 + \frac{1}{2}k_1\right) = f(0.125, 1) = -0.373276$$

$$k_3 = h\, f\left(t_0 + \frac{1}{2}h,\ y_0 + \frac{1}{2}k_2\right)$$

$$= 0.25\, f(0.125 ,\ 1 + 0.5\,(-0.373276)) = -0.373276$$

$$k_4 = h\, f(t_0 + h,\ y_0 + k_3) = 0.25\, f(0.25 ,\ 1\text{-}0.373276)$$

$$= -0.309854$$

$$y_1 = y_0 + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

$$= 1 + \frac{1}{6}\,(0 + 2\,(-0.373276) + 2\,(-0.373276) - 0.309854) = 0.923911$$

$$t_1 = t_0 + h = 0 + 0.25 = 0.25$$

x_2:

$$k_1 = h\, f(t_1, y_1) = (0.25)\, f(0.25 ,\ 0.923911) = -0.560741$$

$$
\begin{aligned}
k_1 &= hf(t_1, y_1) = 0.25 * f(.25, 0.923911) = -0.560741 \\
k_2 &= hf(t_1 + \tfrac{1}{2}h, y_1 + \tfrac{1}{2}k_1) \\
&= f(0.125, 0.923911 + 0.5(-0.560741)) = -0.719601 \\
k_3 &= hf(t_1 + \tfrac{1}{2}h, x_1 + \tfrac{1}{2}k_2) \\
&= 0.25f(0.125, 0.923911 + 0.5(-0.719601)) = -0.702688 \\
k_4 &= hf(t_1 + h, y_1 + k_3) \\
&= 0.25f(0.5, 0.923911 - 0.702688) = -0.763158 \\
x_2 &= x_1 + \tfrac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \\
&= 0.923911 + \tfrac{1}{6}(-0.560741 + 2 * (-0.719601) + 2 * (-0.702688) - 0.763158) \\
&= 0.750224 \\
t_2 &= t_1 + h = 0.25 + 0.25 = 0.5
\end{aligned}
$$

y_3:

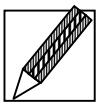
$$
\begin{aligned}
k_1 &= hf(t_2, y_2) = 0.25 * f(.5, 0.750224) = -0.765171 \\
k_2 &= hf(t_2 + \tfrac{1}{2}h, y_2 + \tfrac{1}{2}k_1) \\
&= f(0.625, 0.750224 + 0.5(-0.765171)) = -0.735295 \\
k_3 &= hf(t_2 + \tfrac{1}{2}h, x_2 + \tfrac{1}{2}k_2) \\
&= 0.25f(0.625, 0.750224 + 0.5(-0.735295)) = -0.739508 \\
k_4 &= hf(t_2 + h, y_2 + k_3) \\
&= 0.25f(0.75, 0.750224 - 0.739508) = -0.637224 \\
y_3 &= y_2 + \tfrac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \\
&= 0.750224 + \tfrac{1}{6}(-0.765171 + 2 * (-0.735295) + 2 * (-0.739508) - 0.637224) \\
&= 0.568891 \\
t_3 &= t_2 + h = 0.5 + 0.25 = 0.75
\end{aligned}
$$

y_4:

$$
\begin{aligned}
k_1 &= hf(t_3, y_3) = 0.25 * f(0.75, 0.568891) = -0.641483 \\
k_2 &= hf(t_3 + \tfrac{1}{2}h, y_3 + \tfrac{1}{2}k_1) \\
&= f(0.875, 0.568891 + 0.5(-0.641483)) = -0.485628 \\
k_3 &= hf(t_3 + \tfrac{1}{2}h, y_3 + \tfrac{1}{2}k_2) \\
&= 0.25f(0.875, 0.568891 + 0.5(-0.485628)) = -0.510243 \\
k_4 &= hf(t_3 + h, y_3 + k_3) \\
&= 0.25f(1, 0.568891 - 0.510243) = -0.308297 \\
x_4 &= x_3 + \tfrac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \\
&= 0.568891 + \tfrac{1}{6}(-0.641483 + 2 * (-0.485628) + 2 * (-0.510243) - 0.308297) \\
&= 0.446327 \\
t_4 &= t_3 + h = 0.75 + 0.25 = 1.0
\end{aligned}
$$

إذن الحل هو تقريب $y(1)$ أو $y(1) \approx 0.446327$

تدريب (5)



استخدم رنج – كتا من الرتبة الرابعة لتقريب حل المسألة:

$y' = t - 2y$: $y(0) = 1$: $h = 0.2$: $[0, 1]$

مثال:

مستخدماً مقياس خطوة $h = 0.1$ طبق رنج – كتا من الرتبة الرابعة لتقريب $y(0.5)$ للمسألة.

$$y' = -2t - y \quad , \quad y(0) = -1$$

ثم قارن الإجابة مع الحل الدقيق.

الحل:

الحل الدقيق: $y(0.5) = -0.81959$

t_n	k_1	k_2	k_3	k_4	y_{n+1}
0.1	0.1	0.085	0.0858	0.0714	-0.9145
0.2	0.0715	0.0579	0.0586	0.0456	-0.8562
0.3	0.0456	0.0333	0.034	0.0222	-0.8225
0.4	0.0222	0.0111	0.0117	0.0011	-0.811
0.5	0.0011	-0.009	-0.0085	-0.0181	-0.8196

◄◄ مثال:

$$y' = -5ty^2 + \frac{5}{t} - \frac{1}{t^2}, \qquad y(1) = 1$$

Exact solution $y(t) = \frac{1}{t}$. Compute errors at $t = 25$.

h	Euler	Rate	RK2	Rate	RK4	Rate
0.2	.40e-2		.71e-3		.66e-6	
0.1	.65e-6	12.59	.33e-6	11.08	.22e-7	4.93
0.05	.32e-6	1.00	.54e-7	2.60	.11e-8	4.34
0.02	.13e-6	1.00	.72e-8	2.20	.24e-10	4.16
0.01	.65e-7	1.00	.17e-8	2.08	.14e-11	4.07
0.005	.32e-7	1.00	.42e-9	2.04	.89e-13	3.98
0.002	.13e-7	1.00	.66e-10	2.02	.13e-13	2.13

The displayed "Rates" are computed as follows: If the error at fixed t is $e(h) = ch^p$ then with step size $2h$, $e(2h) = c(2h)^p = 2^p e(h)$. Thus, calculate

$$\text{Rate}(h) = \log_2\left(\frac{e(2h)}{e(h)}\right).$$

◄◄ مثال:

أوجد قيمة تقريبية للمقدار $y(0.5)$ مستخدماً $h = 0.1$ للمسألة:

$y'(t) = t^2$, $y(0) = 1$

باستخدام طريقة أويلر ورنج – كتا من الرتبة الرابعة ثم قارن بين الطريقتين أيهما أدق؟

الحل:

صيغة أويلر $y_{n+1} = y_n + h\, f(t_n, y_n)$: $n = 0, 1, 2, \ldots$

ولكن $f(t_n, y_n) = y^2_n$, $y_0 = 1$, $h = 0.1$ سنحصل على الجدول التالي:

n	t_n	y_n
0	0	1
1	0.1	1.1
2	0.2	1.221
3	0.3	1.3700841
4	0.4	1.557797144
5	0.5	1.800470338

بينما صيغة رنج – كتا من الرتبة الرابعة

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \qquad : n = 0, 1, 2, \ldots$$

حيث:

$$k_1 = h\, f(t_n, y_n)$$

$$k_2 = h\, f(t_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}\, k_1)$$

$$k_3 = h\, f(t_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}\, k_2)$$

$$k_4 = h\, f(t_n + h, y_n + k_3)$$

وبعد الحسابات نحصل على الجدول التالي:

n	t_n	y_n
0	0	1
1	0.1	1.1111105
2	0.2	1.249998
3	0.3	1.4285662
4	0.4	1.6666533
5	0.5	1.9999633

ولاحظ بان الحل الدقيق هو: $y(t) = -\frac{1}{t-4}$

لذلك: $y(0.5) = 2$

والخطأ في صيغة أويلر عند $t = 0.5$ هو 0.19952966

والخطأ في صيغة رنج – كتا من الرتبة الرابعة هو 0.00003674

والسبب أن الأولى لها رتبة $O(h)$ والثانية لها رتبة $O(h^4)$.

◄◄ مثال:

استنتج رنج – كتا من الرتبة الثالثة على الصورة:

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{9}(2k_1 + 3k_2 + 4k_3)$$

حيث:

$$k_1 = h\, f(t, y)$$

$$k_2 = h\, f(t + \frac{1}{2}h, y + \frac{1}{2}k_1)$$

$$k_3 = h\, f(t + \frac{3}{4}h, y + \frac{3}{4}k_2)$$

الحل:

صيغة رنج – كتا من الرتبة الثالثة له صيغة عامة

$$y_{n+1} = y_n + h\,(w_1k_1 + w_2k_2 + w_3k_3)$$

حيث:

$$k_1 = f(t_n, y_n)$$

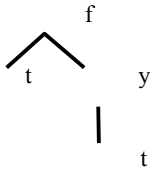
$$k_2 = f(t_n + \alpha_2 h, y_n + h\,\beta_{21}k_1)$$

$$k_3 = f(t_n + \alpha_3 h, y_n + h\,\beta_{31}k_1 + h\,\beta_{32}k_2)$$

نعلم أن:

$$D = \frac{\partial}{\partial t} + f_n \frac{\partial}{\partial y}$$

$$D_i = \alpha_i \frac{\partial}{\partial t} + \left(\sum_{j=1}^{i-1} \beta_{ij}\right) f_n \frac{\partial}{\partial y}$$



وباستخدام مفكوك تايلر مع الصيغتين السابقتين حتى الرتبة الثالثة:

$$y(t_n + h) = y(t_n) + h\,f + \frac{h^2}{2} D\,f + \frac{h^3}{6}(D^2 f + f_y\,D\,f) + O(h^4)$$

.....(*)

والآن نستخدم مفكوك متسلسلة تايلر في متغيرين حتى الرتبة الثانية للمقادير $k_3, k_2,$ k_1

$$k_1 = f(c)$$

$$k_2 = ftn + \alpha_2\,h,\ y_n + h\,\beta_{21}\,k_1) = f(t_n, y_n) + \boxed{\alpha_2 h \frac{\partial f}{\partial t} + \beta_{21} k_1 h \frac{\partial f}{\partial y}} + \frac{h^2}{2} D^2{}_2 f + O(h^3)$$

hD_2f

$$k_3 = f + h\,D_3 f + \frac{h^2}{2}(D_3^2 f + 2\,\beta_{32} f_y\,D_2 f) + O(h^3)$$

وبتعويض تلك القيم الثلاث في الصيغة العامة أعلاه

$$y_{n+1} = y_n + h\,(w_1 f + w_2 f + w_3 f) + h^2\,(w_2 D_2 f + w_3 D_3 f) + \frac{h^3}{2}(w_2\,D_2^2 f + w_3\,D_3^3 f) + h^3\,(w_3 \beta_{32}\,D_2 f f_y)$$

وبمقارنة المعادلة الأخيرة مع (*) من خلال العوامل h^3, h^2, h نجد:

$$w_1 + w_2 + w_3 = 1$$

$$w_2 D_2 f + w_3 D_3 f = \frac{1}{2} Df$$

$$2w_2\,D_2^2 f + 3w_3\,D_3^2 f = D^2 f$$

$$w_3 \beta_{32} D_2 ff_y = \frac{1}{6} D\, ff_y$$

ولكن تذكر ان اختيار $\beta_{ij}, \alpha_i, w_i$ يجب أن لا يعتمد على f، لذلك فإن قيم $\frac{D_2 f}{Df}$ و $\frac{D_3 f}{Df}$ هي ثابتة.

فلو اخترنا $\alpha_i = \sum_{j=1}^{i-1} \beta ij$ فإن $\frac{D_2 f}{Df}$ و $\frac{D_3 f}{Df}$ هي ثوابت، وأيضاً $D_i = \alpha_i D$ ولذلك يمكن التبسيط إلى العلاقات:

$$w_1 + w_2 + w_3 = 1$$

$$w_2 \alpha_2 + w_3 \alpha_3 = \frac{1}{2}$$

$$w_2 \alpha_2^2 + w_3 \alpha_3^2 = \frac{1}{3}$$

ومن خلال المقارنة مع الصيغة الواردة في السؤال:

$$w_1 = \frac{2}{9} \ , w_2 = \frac{1}{3} \ , w_3 = \frac{4}{9}$$

$$\alpha_2 = \frac{1}{2} \ , \alpha_3 = \frac{3}{4}$$

$$\beta_{21} = \frac{1}{2} \ , \beta_{31} = 0 \ , \beta_{32} = \frac{3}{4}$$

◄◄ مثال:

استخدم $h = 0.1$ لتقريب $y(0.5)$ للمسألة:

$$y' = -2t - y \quad , y(0) = -1$$

باستخدام رنج – كتا من الرتبة الرابعة ثم قارن مع الحل الدقيق:

$$y = -3e^t - 2t + 2$$

x_n	k_1	k_2	k_3	k_4	k_{n+1}
0.1	0.1	0.085	0.0858	0.0714	-0.9145
0.2	0.0715	0.0579	0.0586	0.0456	-0.8562
0.3	0.0456	0.0333	0.034	0.0222	-0.8225
0.4	0.0222	0.0111	0.0117	0.0011	-0.811
0.5	0.0011	-0.009	-0.0085	-0.0181	-0.8196

علماً بأن الحل الدقيق: $y(0.5) = -0.81959$

أسئلة تقويم ذاتي



1- ماذا نعني بطرق التقريب ذات الخطوة الواحدة؟

2- برهن القاعدة: لكل $x \geq -1$: $0 \leq (1+x)^m \leq e^{mx}$

حيث m عدد صحيح موجب.

3- ماذا نعني بقيمة خطأ البتر الموضعية؟ وخطأ البتر المتراكم؟

4- اشرح المقصود بطريقة أويلر الخلفية؟

5- اكتب مفكوك متسلسلة تايلر من الرتبة m لحل $y(t)$ حول t_n عند t_{n+1} ؟

6- اكتب الصيغة العامة لطريقة رنج – كتا؟

3. طرق الخطوات المتعددة Multistep Methods

عزيزي الدارس،

لقد تعلمنا فيما سبق تقريب الحل y عند النقطة t_{n+1} مستخدمين بيانات عن الفترة الجزئية $[t_n, t_{n+1}]$ وعن النقطة t_n فقط، لذلك فإن تلك الطرق كانت تسمى طرق الخطوة الواحدة، لكننا في خطوات سابقة كنّا نحصل على القيم $y_1, y_2, \dots, y_{n-1}$ عند النقاط

$t_{n-1}, \ldots, t_2, t_1$ ، فلماذا لا نستخدم تلك النقط؟

إن الطريقة التي تستخدم $y_{n-1}, \ldots, y_1, y_0$ تسمى طريقة ذات n من الخطوات ويجب التذكير دائماً بأن الطريقة التي نحصل فيها على تلك القيم الابتدائية هي من إحدى طرق الخطوة الواحدة.

1.3 طريقة آدم – باشفورث ذات الخطوتين

2-Steps Adam - Bashforth Method

لنفرض أن لدينا قيم تقريبية للمقدار y' عند $t_0, t_1, \ldots, t_n$. لنكامل $y' = f(t, y)$ من t_n إلى t_{n+1} فنحصل على:

$$y(t_{n+1}) = y(t_n) + \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(t, y(t))\,dt$$

ولأن الطريقة ذات خطوتين نستخدم آخر قيمتين للاقتران f وبالتحديد f_n . f_{n-1} ثم نوجد حدودية استكمال تمر بالنقطتين (t_{n-1}, f_{n-1}) و (t_n, f_n) والطبع في هذه الحالة، فإن الحدودية هي خط مستقيم:

$$f(t, y(t)) \approx \frac{t-t_n}{t_{n-1}-t_n} f_{n-1} + \frac{t-t_{n-1}}{t_n - t_{n-1}} f_n$$

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} f(t, y(t))\,dt \approx \int_{t_n}^{t_{n+1}} \left[\frac{t-t_n}{t_{n-1}-t_n} f_{n-1} + \frac{t-t_{n-1}}{t_n - t_{n-1}} f_n \right] dt$$

$$= \left[\frac{(t-t_n)^2}{-2h} f_{n-1} + \frac{(t-t_{n-1})^2}{2h} f_n \right]_{t_n}^{t_{n+1}}$$

$$= \frac{3h}{2} f_n - \frac{h}{2} f_{n-1}$$

بمعنى أن:

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}[\, 3f_n - f_{n-1} \,]$$

وهي كما ترى صيغة صريحة.

ملاحظات على صيغة آدام – باشفورث ذات المرحلتين (AB2)

1. الطريقة من الرتبة الثانية لأن لها خطأ البتر الموضعي من الرتبة $O(h^3)$
2. الطريقة تحتاج قيمتين ابتدائيتين، الأولى نأخذها من الشرط الابتدائي، والثانية نأخذها من أي طريقة ذات خطوة واحدة من نفس رتبة AB2.

لاحظ أن حدودية الاستكمال التي استنبطنا الطريقة منها قد تكون حدودية لاجرانج، او تايلر، أو صيغة نيوتن الأمامية أو الخلفية أو غيرها.

وبصفة عامة، إذا كان اهتمامنا هو استنتاج طريقة من الرتبة $m + 1$ (m مرحلة) فإننا سنعمل على تقريب الدالة $f(t, y(t))$ باستخدام حدودية استكمال تمر بعدد $m + 1$ من النقاط:

$$(t_n, f_n) , \dots , (t_{n-m} , f_{n-m})$$

ثم نجري التكامل كما فعلنا في AB2. هنا سنستخدم حدودية الاستكمال في صيغة الفروق المقسومة، ويمكن تعريف الفروق المقسومة، كما تعلم، بطريقة تتابعية متداخلة:

$$\Delta f_k = \begin{cases} f_k & : i = 0 \\ \Delta^{i-1} f_{k+1} - \Delta^{i-1} f_k & : i > 0 \end{cases}$$

لذلك فإن جدول الفروق المقسومة يكون على الشكل التالي:

t_i	Δ^0	Δ^1	Δ^2	Δ^3	Δ^4	Δ^5
t_0	f_0					
		Δf_0				
t_1	f_1		$\Delta^2 f_0$			
		Δf_1		$\Delta^3 f_0$		
t_2	f_2		$\Delta^2 f_1$		$\Delta^4 f_0$	
		Δf_2		$\Delta^3 f_1$		$\Delta^5 f_0$
t_3	f_3		$\Delta^2 f_2$		$\Delta^4 f_1$	
		Δf_3		$\Delta^3 f_2$		
t_4	f_4		$\Delta^2 f_3$			
		Δf_4				
t_5	f_5					

وتتميز عملية استخدام الفروق المقسومة بأنه لا توجد قسمة أثناء العمليات.

ويستطيع الدارس كتابة ($f_I = f(t_I, y_I)$) حدودية استكمال من الرتبة m تمر بالنقاط (t_i, f_i) حيث $i = n - m , \dots , n$ كما يلي:

$$P_m(t) = \sum_{k=0}^{m} (-1)^k \binom{-s}{k} \Delta^k f_{n-k}$$

حيث:

$$k \geq 1 : \binom{-s}{k} = \frac{(-s)(-s-1)\dots(-s-k+1)}{k} \quad , s = \frac{t - t_n}{h}$$

وحيث أن: $dt = h\, ds$ فإن:

$$y_{n+1} = y_n + h \int_0^1 \sum_{k=0}^{m} (-1)^k \binom{-s}{k} \Delta^k f_{n-k}\, ds + \int_0^1 \frac{h^{m+1}}{m!} s(s+1)\dots(s+m-1)\, f^{(m)}(c_i, y(c_i))\, ds$$

حيث $t_n < c_i < t_{n-m}$

$$y_{n+1} \cong y_n + h \{\gamma_0 f_n + \gamma_1 \Delta f_{n-1} + \dots + \gamma_m \Delta^m f_{n-m}\} \qquad (*)$$

حيث: $\gamma_k = (-1)^k \int_0^1 \binom{-s}{k} ds$

والمتتالية $\{\gamma_k\}$ هي أرقام يمكن حسابها مسبقاً (انظر الجدول التالي) ولاحظ أيضاً أنه في المعادلة (*) إذا كان $m = 0$ فنحصل على صيغة أويلر.

k	0	1	2	3	4	5
$(-1)^k \int_0^1 \binom{-s}{k} ds$	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{251}{720}$	$\frac{95}{288}$

$$\gamma_0 = 1 \quad , \gamma_1 = \int_0^1 (-s)\,ds = \frac{1}{2} \quad , \gamma_2 = \int_0^1 \frac{(-s)(-s-1)}{2} ds = \frac{5}{12}$$

وهكذا $$\gamma_3 = -\int_0^1 \frac{(-s)(-s-1)(-s-2)}{6} ds = \frac{3}{8}$$

وإذا عوضنا $m = 2$ في (*)

$$y_{n+1} \approx y_n + h\left[f_n + \frac{1}{2}\Delta f_{n-1} + \frac{5}{12}\Delta^2 f_{n-2}\right]$$

لكن:

$$\Delta f_{n-1} = f_n - f_{n-1}$$
$$\Delta^2 f_{n-2} = f_n - 2f_{n-1} + f_{n-2}$$
$$\Delta^3 f_{n-3} = f_n - 3f_{n-1} + 3f_{n-2} - f_{n-3}$$

إذن: $$y_{n+1} = y_n + h\,[f_n + \frac{1}{2}[f_n - f_{n-1}] + \frac{5}{12}[f_n - 2f_{n-1} + f_n\,]]$$

$$= y_n + \frac{h}{12}[\,12f_n + 6f_n - 6f_{n-1} + 5f_n - 10f_{n-1} + 5f_n\,]$$

وهي AB3

$$= y_n + \frac{h}{12}[23f_n - 16f_{n-1} + 5f_{n-2}]$$

صيغة

ولعل أشهر صيغ AB هي صيغ AB4 (بالتعويض m = 3) نحصل على:

$$y_{n+1} = y_n + h\,(f_n + \frac{1}{2}\Delta f_{n-1} + \frac{5}{12}\Delta^2 f_{n-2} + \frac{3}{8}\Delta^3 f_{n-3})$$

$$= y_n + \frac{h}{24}(55f_n - 59f_{n-1} + 37f_{n-2} - 9f_{n-3})$$

ومقدار خطأ البتر الموضعي لصيغة آدام باشفورث هو كما في الجدول:

الطريقة	AB2	AB3	AB4	AB5
خطأ البتر الموضعي	$h^2 \frac{5}{12} y(c_i)$	$\frac{3}{8} y^{(4)}(c_i)h^3$	$\frac{251}{720} y^{(5)}(c_i)h^4$	$\frac{45}{288} y^{(6)}(c_i)h^5$

ملاحظة:

جميع الصيغ السابقة AB هي صيغ مباشرة Explicit Method لعدم وجود y_{n+1} على طرفي الصيغة بل في الطرف الأيسر فقط.

مثال:

استخدم AB4 لحل مسألة القيمة الابتدائية:

$$y' = -y^2 \quad , \quad y(1) = 1$$

في الفترة [1, 2] حيث h = 0.1

الحل:

نحتاج إلى قيمة f (t, y) عند t_3, t_2, t_1, t_0 وسنحتاج إلى إحدى طرق الخطوة الواحدة من الرتبة الرابعة (نفس رتبة AB4) ولتكن Rk4.

استخدام Rk4 سيعطي الجدول التالي:

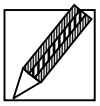
x_n	y_n	$f(x_n, y_n)$	$y(x_n)$
1.0	1.0	−1.0	1.0
1.1	0.90909	−0.82645	0.90909
1.2	0.83333	−0.69445	0.83333
1.3	0.76923	−0.59172	0.76923

ثم نستخدم تلك القيم كمقادير ابتدائية يتم تعويضها في صيغة AB4 لنحصل على الجدول التالي:

AB4

x_n	y_n	$f(x_n, y_n)$	$y(x_n)$
1.0	1.0	−1.0	1.0
1.1	0.90909	−0.82645	0.90909
1.2	0.83333	−0.69445	0.83333
1.3	0.76923	−0.59172	0.76923
1.4	0.71444	−0.51042	0.71429
1.5	0.66686	−0.44470	0.66667
1.6	0.62525	−0.39093	0.625
1.7	0.58848	−0.34631	0.58824
1.8	0.55580	−0.30892	0.55556
1.9	0.52655	−0.27726	0.52632
2.0	0.50023	−0.25023	0.5

تدريب (6)



طبق AB4 لتقريب حل مسألة القيمة الابتدائية:

$y' = -y + t + 1 \quad , y(0) = 1$

في الفترة [0, 1] مستخدماً $h = 0.1$ ومعتمداً على الحل الدقيق:

$y = e^{-t} + t$

في الحصول على القيم الابتدائية المطلوبة من الصيغة.

وهناك صيغ أخرى من نفس عائلة صيغ آدم وهي صيغ ضمنية (Implicit) لأن y_{n+1} تظهر فيها على طرفي المعادلة وتسمي تلك الصيغ بطرق آدم–مولتون (Adam - Moulton).

سنبدأ من:

$$y(t_{n+1}) - y(t_n) \cong \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(t, y(t))\,dt$$

ثم نقرب f باستخدام حدودية تمر بنقاط ثم تقريب قيم y عندها.

2.3 آدم مولتون من الرتبة الثانية AM2

لاشتقاق آدم، مولتون من الرتبة الثانية (AM2) سنختار حدودية تربيعية تمر بالنقاط (t_{n+1}, f_{n+1}) ، (t_n, f_n) ، (t_{n-1}, f_{n-1}) ، وصيغة هذه الحدودية هي إذن:

$$P(t)= (t- t_n)\,(t-t_{n+1})\,\frac{f_{n-1}}{2h^2} - (t-t_{n-1})(t-t_{n+1})\frac{f_n}{h^2} + (t-t_n)(t-t_{n-1})\frac{f_{n+1}}{2h^2}$$

والآن نحسب المقدار: $\int_{t_n}^{t_{n+1}} P(t)dt$

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} P(t)dt = \frac{f_n - 1}{2h^2} \int_{t_n}^{t_{n+1}} (t - t_n)(t - t_{n+1}) - \frac{fn}{h^2} \int_{t_n}^{t_{n+1}} (t - t_{n-1})(t - t_{n+1})dt + \frac{f_{n+1}}{2h^2}$$

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} (t - t_n)(t - t_{n-1})dt$$

وباستخدام التعويض $x = t\text{-}t_n$

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} P(t)dt = \frac{f_{n-1}}{2h^2} \int_{0}^{t_{n+1}-t_n} t_n(x)(x + t_n - t_{n+1})dt -$$

$$\frac{fn}{h^2} \int_{0}^{t_{n+1}-tn} (x + t_n - t_{n-1})(x + t_n - t_{n-1})dt + \frac{f_{n+1}}{2h^2} \int_{0}^{t_{n+1}-t_n} (x)(x + t_n - t_{n-1})dt$$

$$= \frac{f_{n-1}}{2h^2} \int_0^h (x)(x-h)\,dt - \frac{f_n}{h^2} \int_0^h (x+h)(x-h)\,dt + \frac{f_{n+1}}{2h^2} \int_0^h (x)(x+h)\,dt\,,$$

$$= \frac{f_{n-1}}{2h^2} \left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}h \right)\Big|_0^h - \frac{f_n}{h^2} \left(\frac{x^3}{3} - h^2 x \right)\Big|_0^h + \frac{f_{n+1}}{2h^2} \left(\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2}h \right)\Big|_0^h\,,$$

$$= \frac{5}{12} f_{n+1} h + \frac{2}{3} f_n h - \frac{1}{12} f_{n-1} h\,.$$

لذلك فإن صيغة AM2 يمكن كتابتها على الشكل.

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{12}(5f_{n+1} + 8f_n - f_{n-1})$$

وبنفس طريقة استنتاج AM2 يمكننا الحصول على الطرق التالية:

طريقة آدم مولتون من الرتبة الثالثة: AM3

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{24} [9\, f(t_{n+1}, y_{n+1}) + 19\, f(t_n, y_n) - 5\, f(t_{n-1}, y_{n-1}) - f(t_{n-2}, y_{n-2})$$

طريقة آدم – مولتون من الرتبة الرابعة AM4

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{720} [251\, f(t_{n+1}, y_{n+1}) + 646\, f(t_n, y_n) - 264\, f(t_{n-1}, y_{n-1}) + 106\, f(t_{n-2}, y_{n-2}) - 19\, f(t_{n-3}, y_{n-3})]$$

وفي هذه الصيغ AM يمكننا الحصول على مقدار y_{n+1} بأي طريقة والاستفادة منها في الصيغة مرة أخرى، فالأولى تسمى قيمة للتخمين (Predictor) والقيمة الثانية للتصحيح (Corrector). فمثلاً في AM4 يلزمنا في البداية قيم ابتدائية للمقادير y_3, y_2, y_1, y_0 قبل حساب الصيغة AM4 ويمكننا حساب تلك المقادير عن طريق RK4 ثم نستخدم تلك القيم لتقريب المقدار y_4 والمسمى مخمناً ونرمز له بالرمز $y_4^{(0)}$ ثم نعوضه في صيغة المخمن:

$$y_4^{(0)} = y_3 + \frac{h}{24}[\ 55f(t_3, y_3) - 59f(t_2, y_2) + 37f(t_1, y_1) - 9f(t_0, y_0)\ ]$$

$$y_4 = y_3 + \frac{h}{24}[\ 9f(t_4,\ y_4^{(0)}) + 19f(t_3, y_3) - 5f(t_2, y_2) + f(t_1 y_1)\ ]$$

فالصيغة الأولى مخمنة والثانية مصححة والصيغتان معاً تسميان صيغة آدم باشفورث مولتون المخمنة المصححة Adam - Bashforth - Molton Corrector Predictor Method:

◄◄ مثال:

استخدم AM3 لحل مسألة القيمة الابتدائية:

$$y' = -y + t + 1 \quad , \quad y(0) = 1$$

في الفترة $[0,1]$ مستخدماً $h = 0.1$ ومعتمداً على الحل الدقيق

$$y = e^{-t} + t$$

لحساب القيم الابتدائية اللازمة.

الحل:

AM3:

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{24}[\ 9\ f_{n+1} + 19\ f_n - 5\ f_{n-1} + f_{n-2}\ ]$$

نوجد y_3, y_2, y_1 أو $y(0.1), y(0.2), y(0.3)$ من الحل الدقيق ثم نوجد f_3, f_2, f_1, f_0 ونعوض في الصيغة السابقة فنحصل على الجدول:

t_n	y_n	error
0.3	1.140818012	2.146×10^{-7}
0.4	1.07031966	3.846×10^{-7}
0.5	1.10653014	5.213×10^{-7}
0.6	1.14881101	6.285×10^{-7}
0.7	1.19658459	7.106×10^{-7}
0.8	1.24932819	7.714×10^{-7}
0.9	1.30656885	8.141×10^{-7}
1	1.3678786	8.418×10^{-7}

◄◄ مثال:

في مسألة القيمة الابتدائية

$y' = -2ty^2$, $y(0) = 1$

أوجد الحل (1) y مستخدماً AB4 كمخمن و AM3 مصححاً مستعيناً بـ RK4 لإيجاد القيم الابتدائية $h = 0.25$

RK4 ستحصل على:

$y_0 = 1$ $f_0 = 0$

$y_1 = 0.9411540130$ $f_1 = -0.442885438$

$y_2 = 0.7999481032$ $f_2 = -0.639916968$

$y_3 = 0.6399738841$ $f_3 = -0.614349858$

وبالتعويض في المخمن AB4

$$y_4^{(0)} = y_3 + \frac{h}{24}\left[55f_3 - 59f_2 + 37f_1 - 9f_0 \right]$$

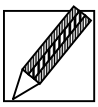
$$= 0.5105894849$$

ثم نحسب: $f_4 = f(t_4, y_4^{(0)}) = f(1, 0.5105894849)$

$$= 0.5214$$

ثم المصحح $y_4 = y_3 + \frac{h}{24}\,[9f_4 + 19f_3 - 5f_2 + f_1] = 0.4982178726$

تدريب (7)



استخدم RK4 كمخمن ثم AM4 كمصحح للمسألة

$y' = t + y \quad , y(0) = 1 \quad , \quad h = 0.1$

لإيجاد $y(0.4)$ ثم قارن مع الحل الدقيق $y(t) = 2e^t - t - 1$

أسئلة تقويم ذاتي



1- اشرح باختصار صيغة آدام – باشفورث ذات المرحلتين **(AB2)؟**

2- ماذا نعني بقيمة التخمين (Predictor) وقيمة التصحيح (Corrector) ضمن صيغ AM.

4. حل المعادلات التفاضلية ذات الرتب العليا وأنظمة المعادلات

عزيزي الدارس،

سنقدم في هذا الجزء مقدمة للطرق العددية لحل مسائل القيم الابتدائية ذات القيم العليا وأنظمة المعادلات. ويعتمد الحل على تحويل مسائل القيم الابتدائية من رتب عليا إلى أنظمة معادلات تفاضلية، وقبل مناقشة التفاصيل لنتعرف على بعض المفاهيم.

تعريف:

إن نظام من الرتبة m من المعادلات التفاضلية من الرتبة الأولى هو:

$$\frac{dy_1}{dt} = f_1(t, y_1, y_2, \dots, y_m)$$

$$\frac{dy_2}{dt} = f_2(t, y_1, y_2, \dots, y_m)$$

$$\vdots$$

$$\frac{dy_m}{dt} = f_m(t, y_1, y_2, \dots, y_m)$$

حيث $a \le t \le b$. وبالطبع إضافة عدد m من الشروط الابتدائية:

$$y_1(a) = \alpha_1 , y_2(a) = \alpha_2, \dots, y_n(a) = \alpha_m$$

يجعلنا نسمي النظام بمسألة القيمة الابتدائية.

في النظام السابق هناك m من الدوال المجهولة $y_1, y_2, \dots, y_m$ والمراد تقريبها، وهي كلها دوال بمتغير واحد t فمثلاً:

نظام من الرتبة الثانية من المعدلات التفاضلية من الرتبة الأولى:

$$\frac{dy_1}{dt} = y_1 + 4y_2 - e^t$$

$$\frac{dy_2}{dt} = y_1 + y_2 + 2e^t$$

له الحل العام:

$$y_1 = 2ae^{3t} - 2ba^{-t} - 2e^t$$

$$y_2 = ae^{3t} + be^{-t} + \frac{1}{4}e^t$$

والنظرية القادمة توضح متى يكون لنظام المعادلات التفاضلية حل وحيد، لكن قبل ذلك سنتعرف على مفهوم شرط ليبشيتز على النظام.

تعريف:

الدالة $f(t, y_1, \dots, y_m)$ المعرفة على المجموعة

$D = \{\{t, u_1, \dots, u_m \mid a \le t \le b \ , -\infty < u_i < \infty \ : i = 1, 2, \dots, m\}$

تحقق شرط ليبشيتزفي D بالمتغيرات $u_m, \dots, u_2, u_1$ إذا وجدنا ثابت $L > 0$ بحيث:

$$| f(t, u_1, \dots, u_m) - f(t, z_1, \dots, z_m) | \le L \sum_{j=1}^{m} | u_j - z_j |$$

لكل: $(t, u_1, \dots, u_m)$, $(t, z_1, \dots, z_m)$ في D

نظرية:

لتكن $D = \{(t, y_1, y_2, \dots, y_m) : a \le t \le b , -\infty < u_n < \infty : n = 1, 2, \dots, m\}$

ولتكن $f_n(t, u_1, u_2, \dots, u_m)$, $n = 1, 2, \dots, m$ متصلة في D وتحقق شرط لينتيز في D، إن نظام المعادلات التفاضلية من الرتبة الأولى (انظر التعريف) له حل وحيد.

$a \le t \le b : u_m(t), \dots, u_2(t), u_1(t)$

◄◄ مثال:

استخدم طريقة أويلر لحل نظام المعادلات التفاضلية:

$$\frac{dy_1}{dt} = -0.5\ y_1$$

$$\frac{dy_2}{dt} = 4 - 0.3\ y_2 - 0.1\ y_1$$

$$y_1(0) = 4,\ \ y_2(0) = 6$$

أوجد $y_1(2)$, $y_2(t)$ مستخدماً $h = 0.5$.

الحل:

نطبق صيغة أويلر على كل معادلة:

$$y_1(0.5) = 4 + [-0.5(4)\ ]0.5 = 3$$

$$y_2(0.5) = 6 + [4 - 0.3(6) - 0.1(4)]0.5 = 6.9$$

لاحظ أننا استخدمنا $y_1(0) = 4$ في المعادلة الثانية بدلاً من $y_1\ (0.5) = 3$ المحسوبة من المعادلة الأولى. سنكمل خطوات الحساب ونحصل على الجدول التالي:

t	y_1	y_2
0	4	6
0.5	3	6.9
1.0	2.25	7.715
1.5	1.6875	8.44525
2.0	1.265625	9.094087

ويمكننا استخدام رنج – كتا من الرتبة الرابعة لحل لنظام السابق. ليكن N هو عدد تقسيمات (الفترات الجزئية) للفترة [a, b] بحيث $h = \frac{b-a}{N}$ ، $t_j = a + jh : j = 0, 1, \ldots,$

N. سوف نستخدم الرمز y_{ij} أو $y_{i,j}$ ليمثل الحل للمتغير y_i عند النقطة t_j، أو تقريباً للحل $y_i(t_j)$,

إذن: $y_{m,0} = \alpha_m , \dots , y_{2,0} = \alpha_2 , y_{1,0} = \alpha_1$

والخطوة التالية هي أنه عند حساب القيم $y_{1,j} , y_{2,j} , \dots , y_{m,j}$ فتنتقل إلى حساب $y_{1,j+1} , y_{2,j+1} , \dots , y_{m,j+1}$ عن طريق حساب (i= 1, 2, …, m).

$$k_{1,i} = h\ f_i(t_j, y_{1,j} , y_{2,j} , \dots , y_{m,j})$$

$$k_{2,i} = h\ f_i(t_j + \frac{h}{2}, y_{1,j} + \frac{1}{2}k_{1,1} , y_{2,,j} + \frac{1}{2}k_{1,2} , \dots , y_{m,j} + \frac{1}{2}\ k_{1,m})$$

$$k_{3,i} = h\ f_i\ (t_j + \frac{h}{2}, y_{1,j} + \frac{1}{2}\ k_{2,1} , y_{2,j} + \frac{1}{2}k_{2,2} , \dots\ y_{m,j} + \frac{1}{2}k_{2,m})$$

$$k_{4,i} = h\ f_i\ (t_j + h, y_{1,j} + k_{3,1} , y_{2,j} + k_{3,2} , \dots\ y_{m,j} + k_{3,m})$$

لذلك: RK4 لنظام المعادلات:

$$y_{i,j+1} = y_{i,j} + \frac{1}{6}[k_{1,i} , 2k_{2,i} + 2k_{3,i} + k_{4,i}\ ]$$

◄◄ مثال:

أعد حل المثال السابق مستخدماً RK4 $(m = 2)$ معادلتين:

$$y_{1,0} = y_1\ (0) = 4$$

$$y_{2,0} = y_2\ (0) = 6$$

$$k_{1,1} = 0.5\ f_1\ (t_0, y_{1,0} , y_{2,0})$$

$$= 0.5 f_1\ (0, 4, 6) = -1$$

$$k_{1,2} = 0.5\ f_2\ (t_0, y_{1,0} , y_{2,0})$$

$$= 0.5\ f_2\ (0, 4, 6) = 0.9$$

والآن نوجد $k_{2,1} , k_{2,2}$ عن طريق:

$$k_{2,1} = h\ f_1\ (t_0 + \frac{h}{2}, y_{1,0} + \frac{1}{2}k_{1,1} , y_{2,0} + \frac{1}{2}\ k_{1,2})$$

$$= 0.5\ f_1\ (0.25, 3.5 , 6.45) = -0.875$$

$k_{2,2} = h\ f_2\ (0.25, 3.5, 6.45) = 0.8575$

والآن: $k_{3,2}\ ,\ k_{3,1}$

$$k_{3,1} = h\ f_1\ (t_0 + \frac{h}{2}\ ,\ y_{1,0} + \frac{1}{2}k_{2,1}\ ,\ y_{2,0} + \frac{1}{2}k_{2,2})$$

$$= h\ f_1\ (0.25\ ,\ 3.\ 5625, 6.42875) = -0.890625$$

$$k_{3,2} = h\ f_2\ (0.25, 3.5625, 6.42875) = 0.8575625$$

والآن: $k_{4,2}\ ,\ k_{4,1}$

$$k_{4,1} = h\ f_1\ (t_0 + h\ ,\ y_{1,0} + k_{3,1}\ ,\ y_{2,0} + k_{3,2})$$

$$= h\ f_1\ (0.5\ ,\ 3.109375\ ,\ 6.857563) = -0.777344$$

$$k_{4,2} = h\ f_2\ (0.5\ ,\ 3.109375\ ,\ 6.857563) = 0.815897$$

والآن:

$$y_{1,1} = y_{1,0} + \frac{1}{6}(k_{1,1} + 2k_{2,1} + 2k_{3,1} + k_{4,1}\ )$$

$$= 4 + \frac{1}{6}\ (-5.308594) = 3.115234333$$

$$y_{2,1} = y_{2,0} + \frac{1}{6}\ (k_{1,2} + 2k_{2,2} + 2k_{3,2} + k_{4,2})$$

$$= 4 + \frac{1}{6}\ (5.146022) = 6.85767$$

والآن انتهينا من حساب $y_1\ (0.5) \cong y_{1,1}$, $y_2(0.5) \cong y_{2,1}$

ويمكننا إكمال الحساب لنحصل على الجدول:

t	**y_1**	**y_2**
0	4	6
0.5	3.115234	6.85767
1.0	2.426171	7.632106
1.5	1.889523	8.326886
2.0	1.471577	8.946865

في أحيان كثيرة يتطلب تقديم حلول عددية لمسائل فيزيائية وهذه تكون على صيغة معادلة من رتب أكثر من واحدة. إن مسألة القيمة الابتدائية من الرتبة m:

$$y^{(m)}(t) = f(t, y, y', \dots, y^{(m-1)}) \qquad : a \le t \le b$$

مصحوبة بالشروط الابتدائية $y^{(m-1)}(a) = \alpha_m, \dots, y'(a) = \alpha_2, y(a) = \alpha_1$.

يمكن حلها عن طريق إعادة كتابة المسألة بنظام من الرتبة m مكون من معادلات تفاضلية من الرتب الأولى وإليك الطريقة.

ليكن $u_1(t) = y(t)$, $u_2(t) = y'(t)$ ، وهكذا $u_m(t) = y^{(m-1)}(t)$ وعند كتابتها على الصورة .

$$\frac{du_1}{dt} = \frac{dy}{dt} = u_2$$

$$\frac{du_2}{dt} = \frac{dy'}{dt} = u_3$$

$$\frac{du_{m-1}}{dt} = \frac{dy^{(m-2)}}{dt} = u_m$$

وأخيراً:

$$\frac{du_m}{dt} = \frac{dy^{(m-1)}}{dt} = y^{(m)} = f(t, y_1, y', \dots, y^{(m-1)})$$

$$= f(t, u_1, u_2, \dots, u_m)$$

مع الشروط $u_m(a) = y^{(m-1)}(a) = \alpha_m, \dots, u_2(a) = y'(a) = \alpha_2, u_1(a) = y(a) = \alpha_1$

فإننا سنحصل على نظام معادلات يمكن حله كما في الأمثلة السابقة.

◄◄ مثال:

حوّل مسألة القيمة الابتدائية من الرتبة الثانية إلى نظام معادلات تفاضلية كما في الشرح التوضيحي.

$$y'' - 2y' + 2y = e^{2t} \sin t \qquad 0 \le t \le 1$$

$$y(0) = -0.4 \quad , y'(0) = -0.6$$

$$\frac{du_1}{dt} = u_2(t)$$

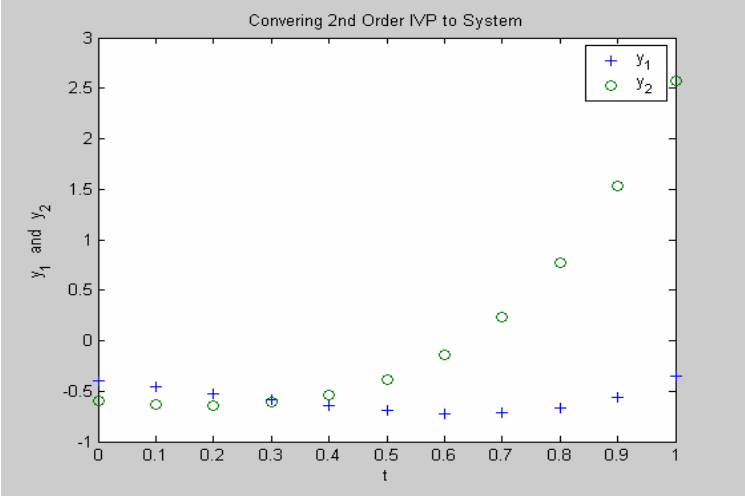
$$\frac{du_2}{dt} = e^{2t}\sin t - 2u_1(t) - 2u_1(t) + 2u_2(t)$$

$$u_1(0) = -0.4 \;,\; u_2(0) = -0.6$$

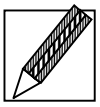
مثال:

حل النظام السابق ومنه استنتج الحل للمعادلة التفاضلية من الرتبة الثانية ثم الرسمة معها.

t_n	$y_1 = y(t)$	$y_2 = y'(t)$
0	-0.4	-0.6
0.1	-0.4617	-0.6316
0.2	-0.5256	-0.6401
0.3	-0.5886	-0.6137
0.4	-0.6466	-0.5366
0.5	-0.6936	-0.3887
0.6	-0.7212	-0.1444
0.7	-0.7182	0.229
0.8	-0.6697	0.772
0.9	-0.5564	1.5348
1	-0.3534	2.5788



تدريب (8)



استخدم Rk4 في حل نظام المعادلات:

$$\frac{dy_1}{dt} = -y_1 e^{1-t} + 0.8\, y_2$$

$$\frac{dy_2}{dt} = y_1 - y_2^3$$

$$y_1(0) = 0 \quad , y_2(0) = 2 \quad , \quad h = 0.2$$

أسئلة تقويم ذاتي



1- متى يكون لنظام المعادلات التفاضلية حل وحيد؟

2- اشرح الخطوات اللازمة لاستخدم طريقة أويلر لحل نظام المعادلات التفاضلية؟

5. أمثلة عامة على الوحدة

◄◄ مثال (1)

استخدم صيغة أويلر لإيجاد حل تقريبي للمسألة:

$y' = \sin t + t^2$

حيث $y(0) = 1$, $n = 0.1$

الحل:

$y_1 = 1 + 0.1 (\sin 1 + 1^2) = 1.184$

$y_2 = 1.184 + 0.1 (\sin 1.184 + (1.184)^2) = 1.4169$

$y_3 = 1.4169 + 0.1 (\sin 1.4169 + (1.4169)^2) = 1.7166$

ملاحظة:

الحسابات هي بالتقدير الدائري (radians)

◄◄ مثال (2)

استخدم صيغة شبه المنحرف لإيجاد حل تقربي للمسألة

$y' = \sin t + t2$

حيث $y(0) = 1$, $h = 0.1$

الحل:

صيغة شبه المنحرف يمكن كتابتها على الشكل:

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{2}(h\, f(t_0, y_0) + h\, f(t_0 + h, y_0 + k_1)$$

$k_1 = h\ f_0$

$k_2 = h\ f\ (t_0 + h,\ x_0 + k_1)$

$k_1 = 0.1\ (\sin 1 + 1^2) = 0.184$

$k_2 = 0.1\ (\sin 1.184 + (1.184)^2) = 0.2328$

$$\Rightarrow y_1 = 1 + \frac{1}{2}(0.184 + 0.2328) = 1.2084$$

والخطوة التالية:

$k_1 = 0.1\ (\sin 1.2084 + (1.2084)^2) = 0.23952$

$k_2 = 0.1\ (\sin 1.44792 + (1.44792)^2) = 0.30889$

لاحظ ان: $y_1 + k_1 = 1.2084 + 0.23952 = 1.44972$

$$y_2 = 1.2084 + \frac{1}{2}(0.23952 + 0.30889) = 1.482605$$

◄◄ مثال (3)

استخدم رنج – كتا من الرتبة الرابعة لحل:

$y' = \sin t + t^2$

$h = 0.1 \quad ,\ y\ (0) = 1$

الحل:

$k_1 = 0.1\ (\sin 1 + 1^2) = 0.18141$

$k_2 = 0.1\ (\sin 1.09071 + (1.09071)^2) = 0.20766$

$k_3 = 0.1\ (\sin 1.10383 + (1.10383)^2) = 0.21114$

$k_4 = 0.1\ (\sin 1.10557 + (1.10557)^2) = 0.21160$

$y_1 = 1 + \frac{1}{6}\ (0.18141 + 2\ (0.20766) + 2\ (0.21114) + (0.21160) =$
1.20510

◄◄ مثال (4)

استخدم استكمال حدودية لاجرانج لتقريب قيمة y (4.5):

	1	3	6
f(x)	1	5	10

	1	3	6
f(x)	1	5	10

الحل:

$$P_2(x) = \frac{(x-3)(x-6)}{(1-3)(1-6)}(1) + \frac{(x-1)(x-6)}{(3-1)(3-6)}(5) + \frac{(x-1)(x-3)}{(6-1)(6-3)}(10)$$

$$= \frac{1}{10}(x^2 - 9x + 18) - \frac{5}{6}(x^2 - 9x + 6) + \frac{10}{15}(x^2 - 4x + 3)$$

$$= -\frac{1}{15}(x^2 - 34x + 18)$$

◄◄ مثال (5)

اكتب خوارزمية تعبر عن $P_2(4.5) = 7.65$ باستخدام حدودية لاجرانج.

الحل:

1. *Input* $\{x_i, f_i\}$ *and* x^*
2. $p^* = 0$
3. *For* $i = 1, 2, \ldots, n+1$,
   - 3.1 $p \leftarrow 1$
   - 3.2 *For* $j = 1, 2, \ldots, n+1$,
     - *if* $j \neq i$,
       - $p \leftarrow p(x^* - x_i)/(x_i - x_j)$;
       - $p^* \leftarrow p^* + f_i p$
4. *Output* $\{x^*, p^*\}$

◄◄ مثال (6)

اكتب خوارزمية لحساب الفروق المقسومة.

الحل:

Algorithm 3.1 *To compute* $f[x_1, \ldots, x_k]$, $k = 1, 2, \ldots, n+1$:

1. *Input* $\{x_i, f_i\}$, $i = 1, \ldots, n+1$
2. *For* $j = 1, 2, \ldots, n+1$

   $d_i \leftarrow f_j$.
3. *For* $k = 1, 2, \ldots, n$

   For $j = n+1, n, \ldots, k+1$

   $d_j \leftarrow (d_j - d_{j-1})/(x_i - x_{j-k})$
4. *Output* $\{d_i\}$, $i = 1, 2, \ldots, n+1$.

◄◄ مثال (7)

اكتب خوارزمية لحساب الاستكمال باستخدام صيغة نيوتن.

الحل:

1. *Input* $\{x_i, d_i\}$, $i = 1, 2, \ldots, n+1$
2. *Until no more values of* x

   Input $\{x\}$

   $p \leftarrow d_{n+1}$

   For $i = n, n-1, \ldots, 1$

   $p \leftarrow p(x - x_i) + d_i$

   Output $\{x, p\}$
3. *Stop*

◄◄ مثال (8)

إذا كان $f(x) = x^3$ فأثبت أن:

$$f[x, y] = x^2 + xy + y^2$$
$$f[x, y, z] = x + y + 2$$
$$f[x, y, z, w] = 1$$
$$f[x, y, z, w, v] = 0$$

الحل:

$$f[x,y] = \frac{y^3 - x^3}{y - x}$$
$$= x^2 + xy + y^2$$
$$f[x, y, z] = \frac{f[y,z] - f[x,y]}{z - x}$$
$$= \frac{(y^2 + yz + z^2) - (x^2 + xy + y^2)}{z - x}$$
$$= x + y + z$$
$$f[x, y, z, w] = \frac{f[y,z,w] - f[x,y,z]}{z - x}$$
$$= \frac{(y + z + w) - (x + y + z)}{w - x}$$
$$= 1$$
$$f[x, y, z, w, v] = 0$$

الخلاصة

عزيزي الدارس،

بدأنا الوحدة بمعرفة ماهية مسائل القيم الابتدائية ووجود حلول لتلك المسائل بالاعتماد على شرط ليبشيتز ودرسنا بعض الطرق والتي أبسطها صيغة أويلر بأنواعها وهي رنج – كتا وغيرها من الطرق ذات الرتب المختلفة، ثم استطعنا الاستفادة من تلك الطرق في تطوير صيغ أخرى وفي حل أنظمة معادلات تفاضلية أو معادلات تفاضلية ذات رتب أعلى. وفيما يلي أبرز ما ورد في الوحدة.

- الدالة $f(t, y)$ تحقق شرط ليبشيتز (Lipschitz Condition) في المتغير التابع y في المجموعة $D \subseteq R^2$ إذا وجد ثابت $L > 0$ بحيث:

$$|f(t, y_1) - f(t, y_2)| \leq L |y_1 - y_2|$$

لكل (t, y_1) , (t, y_2) في D .

- المجموعة $D \subseteq R^2$ تسمى محدبة (Convex) إذا كان لكل (t, y_1) , (t, y_2) في D فإن النقطة $[(1 - \lambda) t_1 + \lambda t_2, (1 - \lambda) y_1 + \lambda y_2]$، والمعنى الهندسي لمجموعة محدبة هو أنه أي نقطتين تقعان في المجموعة D فإن الخط الواصل بينهما يقع بأكمله في D.

- إذا كان $D = \{(t, y) : a \leq t \leq b \ , -\infty < y < \infty \}$ وكانت $f(t, y)$ دالة متصلة في D. إذا حققت الدالة f شرط ليبشيتز في D بالنسبة للمتغير y فإن مسألة القيمة الابتدائية.

$$y'(t) = f(t, y(t)) \quad , a \leq t \leq b \quad , y(a) = y_0$$

لها حل وحيد هو $y(t)$ حيث $a \leq t \leq b$.

- إذا كان $D: \{(t, y) \quad : a \leq t \leq b \ , -\infty < y < \infty \}$ فإن مسألة القيمة الابتدائية

$$y'(t) = f(t, y(t)) \ : a \leq t \leq b \ , y(a) = y_0$$

موضوعة جيداً عندما تكون f متصلة وتحقق شرط ليبشيتز في المتغير y في المنطقة D.

- إذا كان s, m عددان حقيقيان موجبان، و $\{a_n\}_0^k$ متتالية $(a_0 \geq 0)$ تحقق

$$a_{n+1} \leq (1 + m)\, a_n + s$$

لكل $n = 0, 1, \ldots, k$ فإن:

$$a_{n+1} \leq e^{(n+1)m} \left(\frac{s}{m} + a_0\right) - \frac{s}{m}$$

- إذا حققت f شرط ليبشيتز وكان L ثابت ليبشيتز في المنطقة

$$D = \{(t, y) \; : a \leq t \leq b \;, \quad -\infty < y < \infty\}$$

وإذا وجد ثابت M بحيث:

$$|y''(t)| \leq M \qquad \forall\, t \in [a, b]$$

فإن:

$$|y(t_n) - y_n| \leq \frac{h\,M}{2L}\{e^{L(t_n - a)} - 1\}$$

- يمكن التعبير عن صيغة هن بالمعادلة التالية:

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{2}h\left[f(t_n, y_n) + f(t_n + h, y_n + hf(t_n, y_n))\right]$$

- نظرية تايلر:

$$R_m(t, y) = \frac{1}{(m+1)!}\sum_{j=0}^{m}\binom{m+1}{j}(t - t_0)^{m+1-j}(y - y_0)^j \frac{\partial^{m+1} f}{\partial t^{m+1-j}\partial y}(\zeta, \eta)$$

حيث أن الدالة $P_m(t, y)$ ما هي إلاّ حدودية تايلر من الرتبة m في متغيرين، وكذلك: $R_m(t, y)$ هو الباقي (Remainder) المرتبط مع $P_m(t, y)$.

- طريقة آدم – باشفورث ذات الخطوتين:

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}[\,3f_n - f_{n-1}\,]$$

- صيغة AM2 يمكن كتابتها على الشكل. $y_{n+1} = y_n + \frac{h}{12}(5f_{n+1} + 8f_n - f_{n-1})$

إجابات التدريبات

التدريب (1)

t	y_Euler	delete	y_exact	error
0	1	1	1	0.0000
0.1	1	1.004996	1.009996	0.0100
0.2	1.019983	1.019933	1.039933	0.0199
0.3	1.05985	1.044664	1.089664	0.0298
0.4	1.119402	1.078939	1.158939	0.0395
0.5	1.198344	1.122417	1.247417	0.0491
0.6	1.296287	1.174664	1.354664	0.0584
0.7	1.412751	1.235158	1.480158	0.0674
0.8	1.547173	1.303293	1.623293	0.0761
0.9	1.698908	1.37839	1.78339	0.0845
1	1.867241	1.459698	1.959698	0.0925

التدريب (2)

الحل الدقيق: $y(t) = t + e^{-t}$

$$|y''(t)| = |e^{-t}| \le 1 = M \text{ on } [0, 1/2]$$

$$\frac{0.1(1)}{2(1)}\left[e^{(1)(t_n)} - 1\right] \Leftarrow \left|\frac{\partial f}{\partial y}\right| = |-1| = L$$

n	t_n	y_n	$y(t_n)$	$\lvert y(t_n) - y_n \rvert$
0	0.0	1.000000	1.000000	0.000000
1	0.1	1.000000	1.004837	0.004837
2	0.2	1.010000	1.018731	0.008731
3	0.3	1.029000	1.040818	0.011818
4	0.4	1.056100	1.070320	0.014220
5	0.5	1.090490	1.106531	0.016041

n	t_n	y_n	$y(t_n)$	error	bound
0	0	1	1	0	0
1	0.1	1	1.004837	0.004837	0.005259
2	0.2	1.01	1.018731	0.008731	0.01107
3	0.3	1.029	1.040818	0.011818	0.017493
4	0.4	1.0561	1.07032	0.01422	0.024591
5	0.5	1.09049	1.106531	0.016041	0.032436

التدريب (3)

باستخدام الصيغة السابقة $n = 0$

$$y_1 = y_0 + \frac{1}{2} h [f(t_0, y_0) + f(t_1, y_0 + h f(t_0, y_0))]$$

$$= 0 + \frac{0.2}{2} [y_0 + e^{to} + y_0 + h (y_0 + e^{to}) + e^{to+h}]$$

$$= (0.1) [0 + 1 + 0 + 0.2 (0 + 1) + e^{0.2}] = 0.24214$$

$n = 1$

$$y(0.2) \approx y_2 = y_1 + \frac{1}{2} h [f(t_1, y_1) + f(t_1 + h, y_1 + h f(t_1, y_1))]$$

$$f(t_1, y_1) = y_1 + e^{t1} = 0.24214 + e^{0.2} = 1.46354$$

$$y_1 + h f(t_1, y_1) = 0.24214 + (0.2) (1.46354)$$

$$= 0.53485$$

$$f(t_1 + h , y_1 + h f(t_1, y_1)) = f(0.4, 0.53485)$$

$$= 0.53485 + e^{0.4} = 2.02667$$

$$y(0.4) \approx y_2 = 0.24214 + (0.1) [1.46354 + 2.02667]$$

$$= 0.59116$$

التدريب (4)

$y_0 = 2$, $t_0 = 1$ ، نحسب المشتقات الأربع الأولى للحل y:

$$y'(t) = (t + 1)\, y + e^t$$
$$y''(t) = (t^2 + 2t + 2)\, y + (t + 2)\, e^t$$
$$y'''(t) = (t^3 + 3t^2 + 6t + 4)\, y + (t^2 + 3t + 5)\, e^t$$
$$y^{(4)}(t) = (t^4 + 4t^3 + 12t^2 + 16t + 10)x + (t^3 + 4t^2 + 11t + 12)\, e^t$$

لذلك:

$$y_{n+1} = y_n + h\,[\,(t_n + 1)\, y_n + e^{t_n}\,] + \frac{h^2}{2}\,[\,t_n^2 + 2t_n + 2)\, y_n + (t_n + 2)e^{t_n}] + \frac{h^3}{6}$$
$$[(\,t_n^3 + 3\,t_n^2 + 6t_n + 4)\, y_n + (\,t_n^2 + 3t_n + 5)\, e^{t_n}\,] + \frac{h^4}{24}\,[\,t_n^4 + 4\,t_n^3 + 12\,t_n^2 + 16t_n +$$
$$10)\, y_n + (\,t_n^3 + 4\,t_n^2 + 11t_n + 12)\, e^{t_n}\,]$$

$n = 0, 1, \ldots, 20$

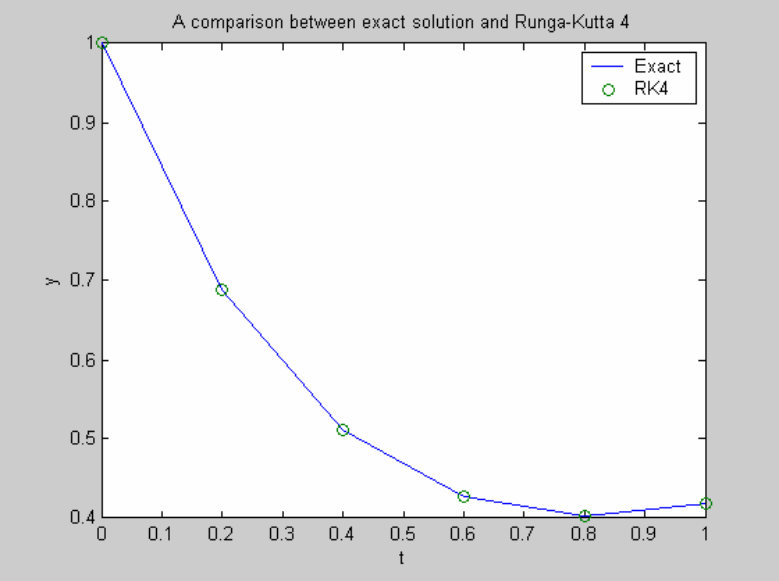
سنحصل على الجدول التالي:

n	t_n	y_n
0	1	2
1	1.01	2.068099
2	1.02	2.138068
3	1.03	2.20996
4	1.04	2.283833
5	1.05	2.359744
6	1.06	2.437755
7	1.07	2.517928
8	1.08	2.600327
9	1.09	2.685018
10	1.1	2.772069
11	1.11	2.861552
12	1.12	2.953539
13	1.13	3.048105
14	1.14	3.145327

15	1.15	3.245287
16	1.16	3.348067
17	1.17	3.453751
18	1.18	3.562429
19	1.19	3.674192
20	1.2	3.789132

التدريب (5)

t	y_RK4	y_exact	error
0	1	1	0.000000
0.2	0.688	0.6879	0.000100
0.4	0.511795	0.511661	0.000134
0.6	0.426628	0.426493	0.000135
0.8	0.402491	0.402371	0.000120
1	0.41927	0.419169	0.000101



التدريب (6)

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{24}[\,55\, f_n - 59\, f_{n-1} + 37 f_{n-2} - 9 f_{n-3})$$

نستخدم $y_0 = y(0) = 1$

$n = 3 :$ $\quad f_{n-3} = f_0 = f(t_0, y_0) = f(0, 1) = 0$

$f_{n-2} = f_1 = f(t_1, y_1) = f(0.1\ ,\ y(0.1))$

$y(0.1) = e^{-(0.1)} + (0.1) = 1.0048374$

$f_1 = 0.0951625$

وبالمثل: $f_{n-1} = f_2 = 0.181269$

$f_n = f_3 = 0.25918$

لذلك $y_4 = y_3 + \frac{h}{24}[7.081]$

$= 1.0408 + 0.0295 = 1.070322387$

وبإكمال باقي القيم نحصل على الجدول مع الأخطاء مقارنة بالحل الدقيق:

t_n	y_n	error
0.4	1.07032292	2.874 × 10−6
0.5	1.10653548	4.816 × 10−6
0.6	1.14881841	6.722 × 10−6
0.7	1.19659339	8.090 × 10−6
0.8	1.24933816	9.192 × 10−6
0.9	1.30657961	9.954 × 10−6
1	1.36788996	1.052 × 10−5

التدريب (7)

Rk4

$k_1 = h\, f(t_n, y_n) = 0.1\,(t_n + y_n)$

$k_2 = h\, f(t_n + h/2\,,\, y_n + k_1/2) = 0.1\,(t_n + 0.05 + y_n + k_1/2)$

$k_3 = h\, f(t_n + h/2\,,\, y_n + k_2/2) = 0.1\,(t_n + 0.05 + y_n + k_2/2)$

$k_4 = h\, f(t_n + h\,,\, y_n + k_3) = 0.1\,(t_n + 0.05 + y_n + k_3)$

سنحصل على الجدول التالي:

n	x_n	k_1	k_2	k_3	k_4	y_{n+1}
0	0	0.1	0.11	0.1105	0.12105	1.110341667
1	0.1	0.121034167	0.132085875	0.13263846	0.144298013	1.242805142
2	0.2	0.144280514	0.15649454	0.157105241	0.169991038	1.399716994
3	0.3	0.169971699	0.183470284	0.184145214	0.198386221	1.58364848
4	0.4	0.198364848	0.21328309	0.214029003	0.229767748	1.797441277

ثم نحسب:

$f_0 = t_0 + y_0 = 1$

$f_1 = t_1 + y_1 = 1.210341667$

$f_2 = t_2 + y_2 = 1.442805142$

$f_3 = t_3 + y_3 = 1.699716994$

إذن القيمة المخمنة:

$$y_4^{(0)} = 1.399716994 + \frac{0.1}{24}[44.14157297] = 1.583640125$$

$$\Rightarrow \ f_4 = 1.983640215$$

ثم القيمة المصححة:

$$y_4 = 1.399716994 + \frac{0.1}{24}\ [44.14370078] = 1.583649081$$

$$\Rightarrow f_4 = 1.983649081$$

وبنفس الطريقة القيمة المخمنة للمقدار:

$$y_5^{(0)} = 1.583649081 + \frac{0.1}{24}\ [51.30811207]$$

$$= 1.79743288$$

$$\Rightarrow f_5 = 2.29743288$$

القيمة المصححة:

$$f_5 = 1.58364908 + \frac{0.1}{24}\ [51.31044864]$$

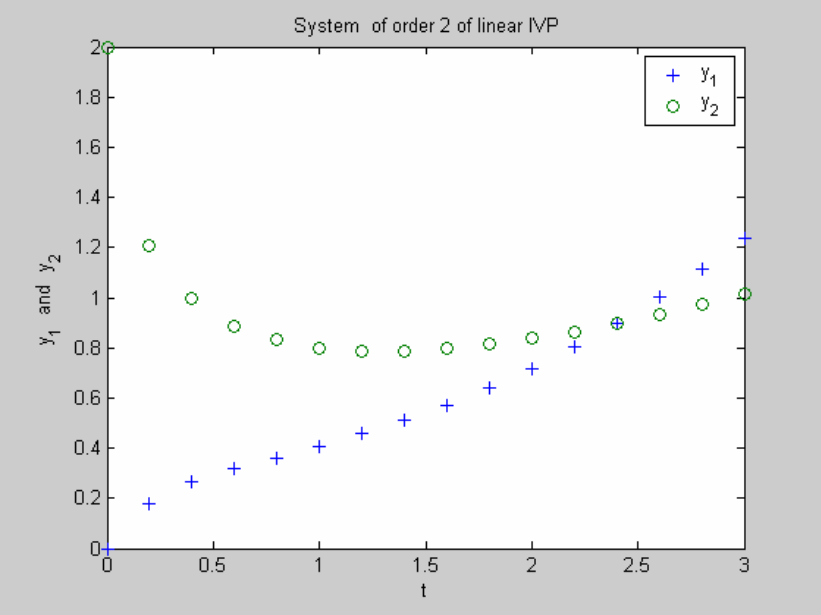
$$= 17944261$$

وبمقارنة الحل الدقيق: 1.79744254

التدريب (8)

تتبع الخطوات السابقة ونحصل على الجدول التالي:

t_n	y_1	y_2
0	0	2
0.2	0.1805	1.2094
0.4	0.2635	0.9948
0.6	0.3172	0.8886
0.8	0.3625	0.8307
1	0.4076	0.8
1.2	0.4563	0.7868
1.4	0.5104	0.7864
1.6	0.5714	0.7957
1.8	0.6399	0.8129
2	0.7167	0.8364
2.2	0.8022	0.8651
2.4	0.897	0.898
2.6	1.0012	0.934
2.8	1.115	0.9723
3	1.2386	1.0121


System of order 2 of linear IVP
y1
y2
y1 and y2
t
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1
1.2
1.4
1.6
1.8
2
0
0.5
1
1.5
2
2.5
3

المراجع

- Kincaid and Cheney, **Numerical Analysis: Mathematics of Scientific Computing**. 3rd ed., 2002.
- Schilling and Harris, **Applied Numerical Methods for Engineers: Using Matlab and C**. 1st ed., 2000.
- C. Butcher, **The Numerical Analysis of Ordinary Differential Equations: Runge-Kutta and general linear methods**. Wiley, 1987.
- K. Dekker and J. G. Verwer, **Stability of Runge-Kutta methods for stiff nonlinear differential equations**. North Holland, 1984.
- S. O. Fatunla, **Numerical Methods for Initial Value Problems in Ordinary Differential Equations**. Academic Press, 1988.
- C. W. Gear, **Numerical Initial Value Problems in Ordinary Differential Equations**. Prentice Hall, 1971.
- E. Hairer, S. P. Norsett, and G. Wanner, **Solving Ordinary Differential Equations**. Springer-Verlag; I: nonstiff problems (1993), II (1991).
- Peter Henrici, **Discrete Variable Methods in Ordinary Differential Equations**. Wiley, 1962.
- Iserles, **A First Course in the Numerical Analysis of Differential Equations**. Cambridge University Press, 1996.
- J. D. Lambert, **Numerical Methods for Ordinary Differential Systems: The Initial Value Problem**. Wiley, 1991.
- J. Lambert, **Computational Methods in Ordinary Differential Equations**.
- W. E. Milne, **Numerical Solutions of Differential Equations**, 2nd ed. Dover, 1970.
- L. Shampine, **Numerical solution of ordinary differential equations**, Chapman & Hall, 1994.
- L. Shampine and M. Gordon, **Computer Solution of Ordinary Differential Equations**. Freeman, 1975.